国家"八五"重点
图书规划项目

吴文俊 主编

北京师范大学出版社

ZHONGGUO SHUXUESHI DAXI



中国数学史大系

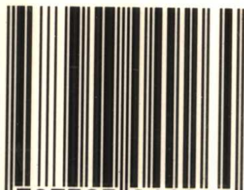
第五卷 两宋

中国数学史大系

责任编辑 潘淑琴
封面设计 李葆芬







ISBN 7-303-04926-6
9 787303 049264 >

ISBN 7-303-04926-6/O·213
定价：45.00 元

国家"八五"重点图书规划项目

中国数学史大系

吴文俊 主编

本卷主编 沈康身

第五卷 两宋

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

中国数学史大系. 第5卷,两宋/吴文俊主编;沈康身分主编.
—北京:北京师范大学出版社,2000.4
ISBN 7-303-04926-6

Ⅰ.中… Ⅱ.①吴…②沈… Ⅲ.数学史-中国-宋代
Ⅳ.O119

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第32211号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街19号 邮政编码:100875)
出版人:常汝吉
北京东方圣雅印刷有限公司印刷 全国新华书店经销
开本:850mm×1 168mm 1/32 彩插:2页 印张:23.5 字数:580千字
2000年4月第1版 2000年4月第1次印刷
印数:1~5000 定价:45.00元

中国数学史大系编委会

主　编：吴文俊

副主编：白尚恕　　李　迪

沈康身　　李继闵

编　委：（以姓氏笔画为序）

王文涌　王荣彬　冯立升

刘洁民　李兆华　李培业

林水平　何文炯　罗见今

贺江林　郭世荣　高宏林

韩祥临

本卷主编：沈康身

执 笔 人：沈康身



欽定四庫全書　　子部六

數學九章　　天文算法類二　算書之屬

提要

臣等謹案數學九章十八卷宋秦九韶撰九

韶始末未詳據原序自稱其籍曰魯郡然

序題淳祐七年魯郡已久入於元九韶蓋述

其祖貫耳未詳為何許人也是書分為九類

一曰大衍以奇零求總數為九類之綱二曰

文渊阁四库全书本《数书九章》书影



沈康身　李培始　李迪出席中国科学史第一届国际会议

比利时鲁汶市,1982 年 8 月



沈康身　何丙郁出席中国科学史第三届国际会议

北京 1984 年 8 月



《数书九章》成书 740 周年国际会议代表合影

1987 年 5 月于北京师范大学



宜稼堂丛书本《杨辉算法》书影



宋建清修飞英塔　韩祥临摄

浙江省湖州市

序

1984年间，四位中国数学史的专家教授，倡议缮写一部全面论述中国传统数学历史发展的巨大著作，取名为《中国数学史大系》，这四位教授（以年事为序）是：

北京师范大学的白尚恕教授；

杭州大学的沈康身教授；

内蒙古师范大学的李迪教授；

西北大学的李继闵教授。

中国传统数学源远流长，有其自身特有的思想体系与发展途径，从远古以至宋元，在很长一段时间内成为世界数学发展的主流，但自明代以来，由于政治社会等种种原因，特别如明末徐光启所指出的那样，一方面“名理之儒，土苴天下之实事”，另方面“妖妄之术，谬言数有神理”，致使中国传统数学濒于灭绝，以后全为西方欧几里得传统所凌替以至垄断，虽然康乾之世曾有一度重视，但仅止于发掘阐释古籍而已，循至20世纪中叶，李俨、钱宝琮先生撰写中国数学史专门著作进行介绍，使中国古算得以不绝如缕。到70年代特别是改革开放以来，全国兴起了研习中国传统数学的高潮，论著迭出，仅就对《九章算术》与注者刘徽的各种形式的专著，就在10种以上，其它方面论著之多，更难以统计，这些研究使中国传统数学的固有特色，如构造性、机械化、以及离散型的算法形式

等，与西方欧几里得传统迥然异趣，得以贻然在目，甚至国外数学史家，也表示了对中国古算的浓厚兴趣，李约瑟的中国科技史巨著固不待论，此外还酝酿了《九章算术》与刘徽注的英文与法文编译，尤其值得一提的是：《九章算术》刘徽注中关于阳马术的一段术文，过去认为有脱漏舛误而难以理解。丹麦的 Wagner 先生却给予了正确的解释，使中国古算中一段辉煌成就，得以大白于世。虽然如此，目前国内大部分群众对中国数学的成就和发展情况了解仍嫌不足，已有的同类书籍却偏于某一侧面，不能满足现在教学、科研或其他方面的需求。已有的工作与我国的发展形势还不太相称，国际学术界也有较强烈的要求，希望有大型的中国数学史著作问世。《大系》的倡议，可谓来自这些对客观形势的分析，有鉴于客观上有此必要而来。《大系》全书是编年史，自上古以迄清末，共分八卷，各卷自成断代史，除复原古代算法的形式，并对照以近代算法外，将尽量收入各家最新研究成果，以期能对中国古代数学的发展情况与辉煌成就作一次较彻底的清理与研究，借以达到发扬成绩，总结规律，预见未来并服务于我国四化建设的目的。

《大系》在白、沈与二李等四位倡议与领导之下，有不少中算史的专家学者参与了写作，规模之宏，在国内外还从未见过，可谓首创。不幸的是：在写作过程中，李继闵教授于 1993 年因病逝世，白尚恕教授也于 1995 年因肺癌逝世。这影响了编写进程，使《大系》的写作不得不一再延期，原来的计划也作了某些局部修改，所幸赖写作者的积

极工作，以及北师大出版社的高度热情，第一部分一、二、三卷自上古以迄以刘徽为中心的三国时代，终于问世。在《大系》全书不久即可全部出齐之际，聊志数语，以示庆贺。

吴文俊

1997.12.25

第五卷前言

事实严峻地证明：中国传统数学是世界数学发展之树不可缺少的一枝。[1] 中国数学已受到学术界的重视，其重要的标志之一是本世纪，特别是下半世纪以来，以中国数学家及其业绩选为文题，递交的博士论文迭起：

1932 年，三上义夫，关孝和の業績と京坂の算法併に支那の算法との関係及び比較(关孝和的业绩和东京大阪算学与中国数学的关系及其比较)。文刊《东洋学报》20(2,4)，21(1,3,4)22(1)，32 节，共 168 页，(1932～1935)

1955 年，王铃(英籍华人,L. Wang)，The Chiu-Chang Suan Shu and the History of Chinese Mathematics during the Han Dynasty, Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy, Trinity College, Cambridge, 1～295, Notes 1～255(《九章算术》和汉代中国数学史,剑桥大学三一学院)

1968 年，Lam Lay Yong(蓝丽蓉,新加坡)，A Critical Study of the Yang Hui Suan Fa《杨辉算法》研究(其增订本 1977 年由新加坡大学出版社出版,全书 1～360 页)

1973 年，U. Libbrecht (李倍始，比利时)，Chinese Mathematics in the Thirteenth Century, Cambridge, Mass., MIT Press, 1～555 页(13 世纪中国数学,《数书九章》与秦九韶)，麻省

---

[1] 茅以升. 中算导论·序，上海：上海教育出版社，1986

理工学院出版社出版，这是李倍始在荷兰莱顿 Leydon 获得享有盛誉的 Cum laude 高水平博士论文）

1982 年，K. Chemla（林力娜，法国），“Reflets des Measures du Cercle sur la Mer” de Li Ye，Thèse Présentée pour l'Obtention du Doctrorat de 3e Cycle avec 3 appendices. Université de Paris XIII（李冶与《测圆海镜》，主文外有三个附录，巴黎第十三大学博士论文）

1985 年，C. Jami：（詹嘉玲，法国），Étude du Iivre Méthodes Rapides de Trigonométrre et du Rapport Précis du Ming Antu. Thèse un Édite，Doctorat de 3e Cycle de Mathemafiques，Université Paris XIII（明安图《割圆密率捷法》研究，巴黎第十三大学博士论文）

1988 年，洪万生（W. S. Horng ，台北），Li Shanlan：The Impact of Western Mathematics in China during the Late 19th Century. Ph. D dissertation，City University of New York（李善兰：19 世纪晚期西方数学在中国冲撞，纽约市立大学博士论文）

论文篇幅都很长，学术价值高，很多还提出有待进一步解决的某些问题。

我国两宋（公元 960～1279）承汉唐盛世之后，科学技术继续发展、繁荣，其中不少成果数当代第一流。两宋数学尤其是中算耀眼的璀璨明珠。从 18 世纪开始，就有学者作专题研究，著书立说。三百年来，特别是本世纪后半叶，国内外已发表论文、专著数以百计。本卷总结了前人研究两宋数学成果的总结，也含不少笔者新的见解。前人成果已由呼和浩特李迪教授以姓氏、发表年代为序写成“两宋时期研究论著文献”附本卷之末，为节省篇幅、在本卷行文中、除必要外，不再一一点明文献所引。

本卷六编。为便于读者了解两宋科学技术发明的主流——数学发展的源头之一，我们设第一编总论、第二编介绍贾宪、刘益、

蒋周和沈括四大师的数学成就。秦九韶的工作特多，我们厘为上、中、下三编，第六编述杨辉。其中，除第二编第五章北宋数学教育由李迪教授执笔，其他都由本卷主编撰写。应该指出，在撰写过程中，除了学习同行们已发表的成果以外，1983年以来，杭州大学数学系举办过《数书九章》及《杨辉算法》读书班(Seminar)五届，每届一学期，每周活动两个半天。参加过读书班的有：80级、81级四年级学生各12人、16人，83～84学年进修教师4人(许鑫铜、郭熙汉、朱家生、何文炯)，85级研究生张加敏，88级研究生陈艳、韩祥临、汪晓勤，国家自然科学基金资助项目“中国古典数学的世界意义”课题组全体成员及本系教师：刘操南、王云海、丰宁欣、方茂炽、曹希斌、闻人军、何文炯、王之光、张加敏等。读书班上富有内涵的探讨，对本卷的完成，起着重要作用。在此向同学、同事和同行们表示深切感谢。

两宋数学中困惑人、而逗引人的问题，例如秦九韶不以素数为工具，化不两两互素模为定母的计算法，杨辉所作为数众多的幻方、幻圆、异形幻圆的构造法等等秘奥，有的已解密，有的解得还不尽如人意，有的还没有解决，留待新世纪伙伴们进一步探索。

在本卷编写过程中，对中国科学院吴文俊院士的热心指导，对北京师范大学出版社的大力支持，表示衷心感谢。

本卷主编、执笔人：沈康身

1999年9月9日

于浙江大学数学系

邮政编码310028

目　录

第 一 编

总 论

中国历史在唐朝大统一和五代十国离乱之后，进入北宋与辽，南宋与金、元对峙的局面。

宋太祖赵匡胤夺取后周政权，建立宋朝，史称北宋(960～1127)，统一中原和南方地区。12世纪初居住在东北长白山一带的女真族建立金朝，逐步向南扩张，在1125年灭辽，1127年又灭北宋。宋高宗赵构在南方建立南宋，1234年蒙古族灭金，于1279年灭南宋，元朝统一全国。

五代十国半个多世纪的割据战争，使黄河流域经济受到巨大损失。北宋建国后，均定赋税，兴修水利，开垦荒地，从而农业得到迅速恢复和发展，农村中有不少定期集市，逐步形成市镇。北宋手工业分工细致，科学技术和生产工具有显著进步。有些作坊规模增大，促进城镇繁荣，海外交通、国际贸易空前活跃。唐时，据文献统计，十万户以上城市全国只有十多个，到北宋已增加到四十多个。在这些社会条件下，商业发达，市民生活水准有所提高。民用、官署、寺庙、宫殿建筑活动频繁，南宋首都临安人口一百多万，超过北宋东京。临安有四百四十行，手工业分工更细，商业更加发达，纸币盛行。交子、会子广泛流通。农业和手工业的发展，增加商品交换的需要，而商业的发达反过来又促进了农业和手工业的发展。两宋三百年间虽在兵荒马乱之中，风雨如晦，鸡鸣不已，但是含数学在内的科学技术在各个领域内俱有出色建树。

本编述两宋科学技术活动的一般情况，分二章。

第一章　科学技术成就

第一节　天　　学

两宋在天学上著称的工作有：

一　天文仪器制造

漏壶、圭表、浑仪和浑象是我国传统测天仪器，到两宋时代达到最好水平。

燕肃于天圣九年(1031 年)创作莲花漏壶，在漏壶中使用浸流系统：漏壶上部开孔，使多余的水由此溢出，以保持有恒定水位，消除因水位变化而影响流量，提高计时精度，在温度影响漏壶中液体粘滞度这一因素，“冬月水涩，夏月水利”现象，宋时已有人察觉并予克服。张思训于太平兴国四年(979 年)改用水银代水。

圭表表端副影影响读数精度是长期未能解决的问题，苏颂(1020～1101)在《新仪象法要》提出“子午正以望筒指日，令影透筒窍，以窍心之影指圭面之尺寸为准，”使测日影长度技术得到改善。

北宋制造天象观测用浑仪，在 11 世纪前后一百年间先后制造六架，每架用铜约十吨。这种巨型仪器有固定的地平、子午、天常等环，有转动的白道、黄道、赤道等环。为提高精度和减少制作、使用麻烦，不少学者如沈括还简化设计和制作浑仪。

天文仪器的代表和杰作是元祐三年(1088 年)苏颂等人所做水运仪象台，能用多种形式来反映及观测天象的运行，它利用一

套齿轮系，在漏壶流水驱动下，使仪器整体经常保持恒速，和天体运动同步，它既能演示天象、观测天象，又能计时、报时。(图1.1.1)。

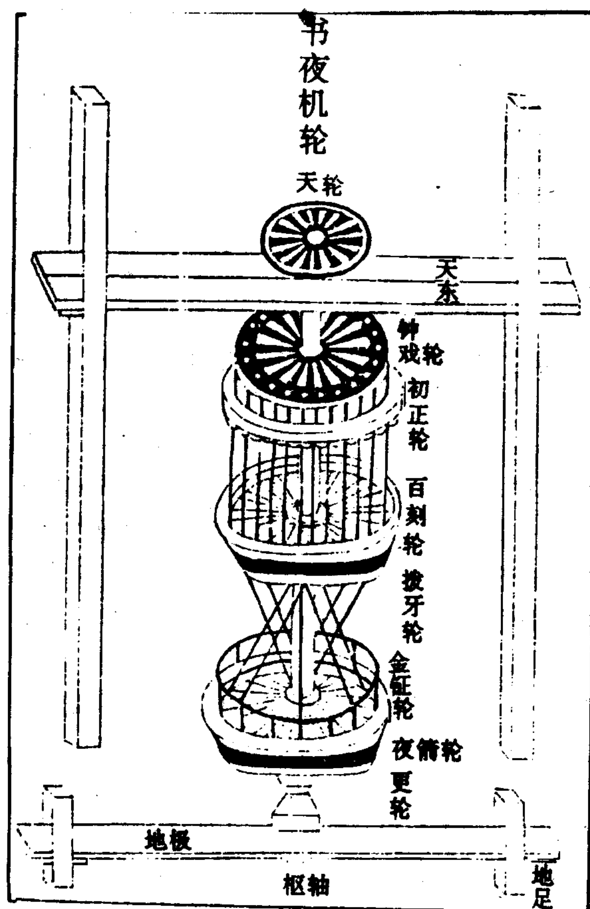


图 1.1.1

二 星象观测

11世纪前后，约百年之间，北宋曾进行过五次大规模恒星位置观测。大中祥符三年(1010年)韩显符观测“外官星位去斗(宿)、极度数”。斗宿是指冬至点，说明这次测量，是以冬至点为原点。景祐元年(1034年)为编写《景祐乾象新书》进行第二次观测，在《宋史·天文志》中保存了这次测定的二十八宿距星位置。周琮等于皇祐元年至五年(1049～1053)以五年时间，对全天作第三次观测，在王安礼《灵台秘苑》中记载了观测成果，含345个恒星的距星的入宿、去极度。元丰元年至八年(1078～1085)作第四次观测，画成星图定稿，在淳祐七年(1247年)据黄裳原图(12世纪末)刻石，这就是著名的苏州石刻天文图(图1.1.2)。原刻幅3×2.5尺，刻星1430颗。它以北极为圆心，绘有三个同心圆、二十八条辐射线，以示北极常见圈、南极恒隐圈和赤道二十八宿距度。苏颂《新仪象法要》星图也是这次观测记录，比苏州石刻多六颗星。姚舜辅等人于崇宁元年(1102年)起，以五年时间作第五次观测，精度最高，成果见姚著《纪元历》。经今人分析，二十八宿距度误差绝对值平均仅0.15度，刷新了三百年前唐代僧一行的观测精度记录。

在天象观测方面，特别值得一提的是对于新星和超新星的记录。《宋会要》记曰：“嘉祐元年三月，司天监言：客星没，客去之兆也。初、至和元年(1054年)五月，晨出东方，守天关(金牛座ζ星)，昼见如太白，芒角四出，色赤白，凡见二十三日。”20世纪70年代以来，国际天文学界公认天关星附近的蟹状星云就是1054年爆发的超新星遗迹，而我国宋代的详细文献为蟹状星云等理论问题的研究提供了依据。

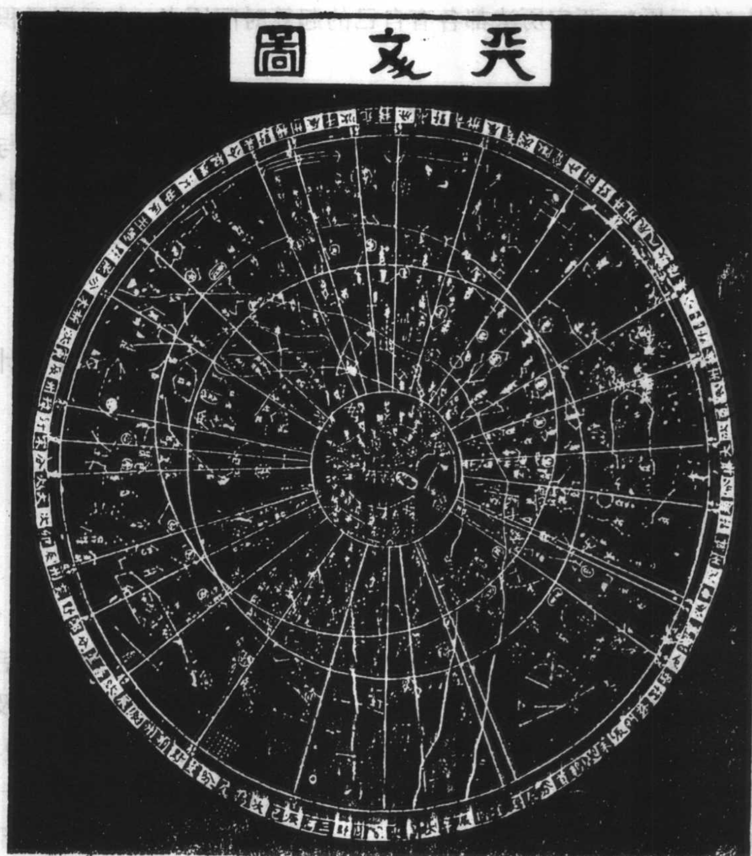


图 1.1.2

三 制订历法

北宋 168 年间颁行九种历法，南宋 149 年间也颁行九种历法，平均 17 年就要改历一次，宋初沿用后周王朴《钦天历》。北宋时代历法推算大都仿效边冈《崇玄历》，边冈用刘焯内插法所建立的计算公式使用不便，姚舜辅《纪元历》予以简化。南宋时代初期

用《纪元历》。两宋历法都各有自己的起算时间原点，上元甲子积年不一。

北宋学者沈括《梦溪笔谈》主张以十二气(节)替代十二月。这种“十二气历”与天文实际吻合，为生产服务非常直接、简便，与今用太阳历相仿。“可惜格利高里历十二月的大尽、小尽不很合理，节气日期还有一日的上下，远不如沈括十二气历的理想。”[1]

四 气 象

在秦九韶《数书九章》第二章天时类有量雨、量雪的定量计算，这是气象学史上首创。

第二节 地 学

一 地 方 志

以图经形式编写的地理专著宋初盛行，开宝(968～975)先后两次重修天下图经，后来文字部分增加，地图渐成附庸地位。及南宋，文图分离，改称为志，是我国有特色的地方志文化的开始，以后就形成统一格式和体例。《宋史·艺文志》所记地方志就有一百几十种。

全国总志有《太平寰宇记》(太平兴国元年～九年，976～984年)成书。乐史编修，全书二百卷。讲述内容还兼及外域，不少内容是人物和文艺。《元丰九域志》(元丰元年～八年，1078～1085年)王存主修，编纂特点是“当世之务”。着重记载四至八到，各地里数，城堡名称，山川之利等“当世之务”。

---

① 钱宝琮. 从春秋到明末的历法沿革.《钱宝琮科学史论文选集》. 北京：科学出版社，1983. 475

宋刊郡县地方志保存至今还可以列出二十种以上。例如乾道、淳祐、咸淳《临安志》、范成大《吴郡志》等。宋代府、州、军、县、监一般都有志。这种风气，代代相承，且扩大为山、川、寺庙、关隘、桥梁。直至今日，市、县、镇、乡竞相仿效，修志成风。

二 地 图

宋王朝建立后，军、政、财权都集中于中央，对于失地常存收复之心，所以对地图的绘制非常重视，中央所藏各州府送造的地图相当丰富。北宋真宗皇帝常到收藏地图的滋福殿观看地图，并诏令“翰林院遣画工分询诸路，图上山川形势，地理远近，纳枢密院”(据《玉海》)。淳化四年(993 年)用绢一百匹制成《淳化天下图》，图幅之大创历史纪录。至今保存完好的宋刻三石刻地图：《华夷图》、《禹迹图》和《地理图》，其中华夷图、禹迹图是南宋绍兴六年(1136 年)石刻，今存西安碑林。二图刻在同碑的正反面，长宽都是 77 厘米。《华夷图》相当于世界地图，禹迹图相当于全国地图(图 1.1.3)，上有方格，“每格折地百里。”横方 70，竖方 73，共计5 110方，图上黄河、长江、珠江等水系比较真实，河套、汉水、山东半岛、海南岛赫然可见，这是杰出的古代有比例尺的全国地图。

三 兴修水利

宋初在黄河和海河流域修浚许多河渠，使黄河南北不少地区都得到灌溉之利。

11 世纪之初，福建省莆田县兴修木兰陂，是一座有代表性的兼有引、蓄、灌、排多功能、综合利用的大规模水利工程。九百多年后的今天一直在发挥巨大的作用。整个 11 世纪，据统计北宋修建农田水利工程有一万多处，灌田3 660万亩。南宋继续兴修水

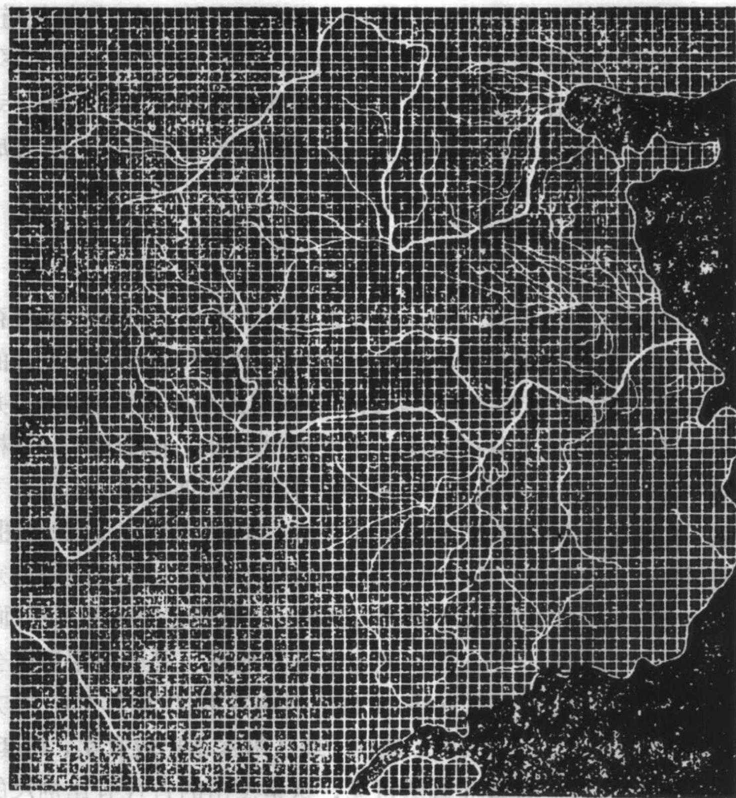


图 1.1.3 禹迹图

利，12世纪初，潭州修复龟塘灌田一百万亩。眉州通济堰、淮东绍熙堰的建造，使数百里内无缺水之忧。在江南围田工程尤其宏伟，规模大、受益面积数以万亩计。此外沿海地区修建海塘也是著称历史的利民工程。11世纪初浙江地区征民工数百万，修成捍海土塘，由于海潮破坏力太大，景祐元年(1034年)后曾以五年时间，两次投资修建石塘。

宋代还留下有名的水位站，例如江苏省吴江县水则碑，碑上铭刻："横七道，道为一则，以下一则为水平之衡，在一则，高低

田俱无恙，过二则，极低，田渰(淹没)，……过七则极高田俱渰”。還記有紹熙五年(1194年)最早水位綫所在，為水文研究提供了珍贵历史资料。

第三节　农　学

一　农业技术

宋代农业技术发展达到了新水平。

土地的开垦和利用，已有一整套办法。在地少人稠地区力图扩大耕地面积：与水争田——圩田规模很大，浙西路有1 400多处；在高地有水汇流处建堰坝蓄水灌旱地，既可自流灌溉，又可免水土流失；梯田也有很大发展，据统计，广东、福建、浙江、江西、四川等省多山丘陵地区都有开垦。

在农作物分布上，宋时水稻高居第一位，南方为主要栽种区，逐渐向北方推广，还从越南引进抗旱力强、对肥料要求不高的占城稻，从朝鲜引进颗粒饱满的黄粒稻。西北维吾尔地区种棉技术传布到长江流域，蚕桑事业在江浙发展尤速。

二　《农书》

宋时还出现农学专著，以陈旉《农书》为代表作，书成于绍兴十九年(1149年)，也是我国最早论述水稻地区农业技术和经营的农书，其主要内容有：

其一，整地。在“耕耨之宜”篇谈整地技术。按早田、晚田、丘陵、平原与低地不同情况，采取不同措施。

其二，育苗。在“善其根苗”篇论述水稻秧田的育田技术。播种前的耕作和施肥，防烂秧法、控制秧田水层浅深等技术。

其三，除草。强调即使无草也应耘田、松土，有利作物生长，

使“草死土肥，浸灌有渐，水不走失”。

其四，施肥。论述肥源，指出“用粪犹用药”的重要认识，例如黑土过肥，穗而不实，要用生土拌和。

其五，天时。在“天时之宜”篇指出种植庄稼必须知道天时地宜，“则生之，蓄之，育之，成之，熟之，无不遂矣。”

第四节 工业技术

宋代手工业空前繁荣，这里简记重要项目。

一 冶 金

宋代建国后有色金属和黑色金属的生产都有长足发展。据统计北宋建国后 50 年间铜产量增加 3 倍，锡、金各增加 1 倍，铅增加 4 倍，到治平元年(1064 年)铁的产量比唐元和元年(806 年)增加 4 倍，北宋初年各路铁冶炼场二百多处，其产量仅徐州利国监铁矿年产铁达 154 万斤。矿工人数如江西信州、广东韶州、岭水矿场各达十万，而且日夜开采。

冶金技术在宋代迭有创新：如炼银有“吹灰法”，炼铜有“胆铜法”，炼铁以木风扇提高产量。敦煌壁画上画西夏煅铁炉也用木风扇鼓风。木风扇结构牢固，体量大，风量风压显著提高，强化冶炼反应速度，产量相应得到提高。这项技术比欧洲要早五、六百年。到 10 世纪前后我国已用煤炼铁，元丰元年(1078 年)徐州利国监附近发现煤矿，用以炼铁，节省大量木炭。灌钢技术在宋代得到改进，沈括《梦溪笔谈》记载灌钢(团钢)：“用柔铁屈盘之，以生铁陷其间，泥封炼之，锻令相入……二三炼则生铁自熟，乃是柔铁”。这是说生铁熔化成铁汁，渗入熟铁，又加锻打，使所含碳分布均匀，就提高了硬度，成为性能较好的钢，这就是灌钢。

二　陶　瓷

宋代瓷器在工艺上达到新的水平，已有一百多县市发现宋瓷遗址，可证宋代瓷业的发达和普及。宋代形成了有影响的八大窑系：北方的定窑、磁州窑、均窑、耀窑，南方的景德镇窑、越窑、龙泉窑和建窑。其中磁州窑以磁石泥为坯，所以瓷器又名为磁器。磁州窑产品多白地黑花，或作凸花纹、划花纹，别具一格。均窑多施彩：胭脂红、葱翠或墨色。耀州窑薄坯、釉层均匀，反映陶瓷技术高水平，器壁内外布满纹样，玲珑可爱。景德镇瓷器纯白，透光，是宋代制瓷技术的代表作。浙江处州章氏弟兄各设一窑，哥窑即琉田窑，弟窑即龙泉窑。哥窑釉表以碎纹著名，弟窑无碎纹，釉色靓丽，色泽多粉青或翠青。

三　纺　织

宋人在纺织技术上革故创新。纱、罗、锦、缎等纺织品织造工艺如提花都达到了最好水平。棉织业也逐步发展，据文献记载：

纱罗　宋代的纱以二或三根经线绞成，宋墓出土丝织文物亮地提花纱，稀经密纬，有良好的透明、飘逸效果。图案循环回纹，长达 60 余厘米。

锦　宋代锦的品种已发现有四十余种，苏州宋锦、南京云锦都从宋时开始，色泽典雅厚重。

缎　缎是古时最华丽的丝织品，平滑而有光泽，有立体感，纬线用色富变化，纹样益加美观。

棉纺　从维吾尔地区引入棉花后，中原棉纺品随之发展。轧棉机代替手剥棉桃，大大提高生产率，弹棉花用“绳弦大弓”振幅大而有力，每天能弹棉七、八斤。当时松江成为全国棉纺中心，有松江布“衣被天下”之称。

四 印 刷

在唐代基础上宋时雕板印刷业更加发达，趋于鼎盛，当时雕板良工巧匠大多荟萃杭州。宋刻本技术优良，字体方整，刀法圆润，纸墨装璜都称上乘。据记载，刻大部头书，往往集中刻工一百多人。雕板书之最是开宝四年(971 年)在成都刻印《大藏经》，计1 076部，5 048卷，历时十三年，雕板 13 万块。

元丰七年(1084 年)秘书省初刊含《九章算术》等汉唐以来十部算经，绍定四年(1231 年)鲍浣之又重新翻刻。大字恭楷精雕，图文并茂的《营造法式》在宋朝刻过两次。

在雕板术飞黄腾达之际，宋代印刷业又出现另一项发明。据沈括《梦溪笔谈》记载，宋庆历朝(1041～1048)毕昇创造活字印刷术，它大大节约人力、物力。这不仅在我国，在世界文化史上也是伟大创举。毕昇活字印刷术与现代铅字排印同一原理，他用胶泥制成活字，一泥刻一字，火焙变硬，事前准备铁板，将松香、蜡和纸灰混合物放在铁板上，铁板放入铁框里，再据需要排入活字，排满一框在火上加热，混合物遇热熔化，冷却后一板活字粘成一体，印完后，旧字还可以重用。为提高效率，一人印书，另一人排版。常用字各多备二三十个，可以保证排版不至缺字。

印刷术是中国四大发明之一，毕昇活字法为印刷术增添光辉，对西方拼音文字贡献甚于中国方块字。

第五节 医 药

两宋时期，中国医药全面发展，宋王朝重视各种医药书藉的修订，作为医药知识汇编的本草学，有宋一代，著述极为丰硕。

开宝六年、七年(973～974)刘翰等奉敕以唐《新修本草》《蜀本草》为据，修纂《开宝本草》21 卷，载药物 983 种。

嘉祐二年(1057 年)苏颂等奉敕修成《嘉祐本草》20 卷，载药物1 082种。

《嘉祐本草》成书后不久，宋政府又仿唐《新修本草》附图作法，皇帝下诏，命令各地州郡绘画当地所产药草图送呈东京，由苏颂整理编写成《图经本草》，后经增补，益加完善。

元祐时(1086～1094)四川成都医生唐慎微以私人之力修纂《经史证类备急本草》32 卷，60 余万字，收录药物1 700多种，载百病主治药，服药食忌及药物畏、恶、须、使等，使人们对历代本草源流和药物配伍禁忌有概括了解。书中还采录古今单方，经史百家有关药物记载。因本书质量优秀，宋政府为之整理出版，成为私家著作官印本草，此后又重修多次，有大观二年(1108 年)，政和六年(1116 年)，绍兴二十七年(1157 年)三种版本，以后又屡次修订再版，在明代李时珍《本草纲目》问世之前，是本草学范本。

第六节 兵 器

火药是另一中国四大发明。至宋代火药的使用已经成熟。《宋史·兵志》记开宝三年(970 年)兵部令史冯继昇进火箭法，又有神卫水军队长唐福献火毬、火蒺藜。火药武器的大量使用，推动对火药的研究，曾公亮《武经总要》(宝元三年～庆历四年，1040～1044)载三种火药配方，配方中硝的含量高于唐代，硫与硝的比接近 1∶3，与近代黑火药配方相似。史书有火炮的记载，北宋末年在抗金战争中发明霹雳炮、震天雷等杀伤力较大的火炮。

宋代兵器种类繁多，《宋史·艺文志》记兵书 347 部，著名专著且流传至今有曾公亮《武经总要》40 卷，许洞《虎钤兵经》20 卷，有关兵器制造和军事工程方面专书有《砲经》1 卷，《强弩备术》3 卷，《行兵攻具及图》2 卷。

《宋史·兵志》称：“工署南北作坊及弓弩院年造铁甲三万二

千，弓一千六百五十万，各州造弓弩六百二十万”，熙宁元年(1068年)平民李宏献神臂弓，弓长三尺二寸，弦长二尺五寸，铜弩机，射三百四十步。沈括《梦溪笔谈》说神臂弓“能洞重札，最为利器”。绍兴五年(1135年)韩世忠又将神臂弓加大尺度，易名为克敌弓，在宋金之战中，大获全胜。关于长短兵器，长兵器以枪、大刀为主，短兵器如刀、剑、鞭、棒等。

制造兵器作坊规模大，工人人数众多。

为统一兵器标准，熙宁六年(1073年)设军器监，制度都有“式”，共110卷汇编成《熙宁法式》，元丰八年(1083年)又编制《军器什物法制》。

第七节　海　　运

一　指南针

指南针是我国另一项四大发明。航海事业的发展必须有可靠导航设备，促使磁体指向技术的进步。宋代对于其中两个关键问题都已顺利解决，其一，指针的磁化。其二，指针的装置方法。宋人著书中对第一个问题沈括《梦溪笔谈》说：“方家以磁石摩针锋，则能指南。”这是说以天然磁石磁场，理顺钢针内部磁场。《梦溪笔谈》还讨论了第二个问题，认为最好的方案是“其法取新纩中独茧缕，以芥子许蜡缀于针腰，无风处悬之，则针常指南。”南宋陈元靓《事林广记》介绍当时流行的指南龟装置新法：将天然磁石放在木制指南龟腹内，腹下挖一光滑小穴，对准在竹钉尖安置，使支点有很小摩擦力，木龟便可以自由转动指南。这种指南针很快就应用于航海。重和二年(1119年)朱彧《萍洲可谈》明确记载：“舟师识地理，夜则观星，昼则观日，阴晦则观指南针。”几年后徐兢《宣和奉使高丽图经》也有类似说法：“惟视星斗前迈，若晦

冥则用指南浮针，以揆南北。”吴自牧《梦梁录》也说：“风雨晦冥时，惟凭针盘而行。乃火长掌之，毫厘不敢差误。”

二 造 船

造船业的兴旺是两宋海运发达的另一个重要因素，在沿海不少地区都设立造船务、场、坊，广东广州、福建泉州、浙江杭、明、温三州都是造海船主要基地。我们以时间先后选述其中重要事项。

北宋天禧五年(1021年)，据《宋会要辑稿·食货》说奉命打造运船605艘。明州(宁波)所造者材料尤其讲究，设备完善。抛锚用碇石，风帆有大小，以利迎风疾驶，起碇。转帆采用转轴，舵也有大小，以利转向，船上还备铅锤测海深浅。“又于舟腹两旁缚大竹为橐”，为增加浮力和减轻风浪猛力冲击。船只大小据沈括《梦溪笔谈》记：“两浙献龙船，长二十余丈，上为宫室层楼……设御榻，以备游幸”。

元祐五年(1090年)，《宋会要辑稿·食货》“诏温州、明州岁造船以六百只为额”。

元丰元年(1078年)，《宋史·食货志》说：宋政府遣使臣往聘高丽，指令明州造大船，一名凌虚致远安济神舟，一名灵通顺济神舟。完工后，“自定海(今镇海)绝洋而东，到达高丽”，当地“欢呼出迎”。

宣和年间(1119～1125)据徐兢《宣和奉使高丽图经·神舟》说，朝廷又在明州打造两艘巨舰：“巍如山岳，浮动波上，锦帆鹢首，屈服鲛螭”。到达高丽时“倾国耸观，欢呼嘉叹”。这种神舟长阔高大，什物器用，乘坐人数都比客舟大三倍。所谓客舟规模同书记：“长十余丈，深三丈，阔二丈五尺，可载二千斛粟，以整木巨枋制成。甲板宽平，底尖如刀……每船十橹，大桅高十丈，……碇石用绞车升降。……每舟篙师水手可六十人”。内部构造都精心设计：“上平如衡，下侧如刀”以便破浪。船舱分隔为三，前舱安

放水柜、炉灶，中舱分四室，使者各以阶序分居，还有后舱。这种分舱措施，可免一处受损而全船覆没的危险。

南宋时因山东半岛已为金人所占，造船业南移。建炎三年(1129年)据《续资治通鉴》说："提领海船张公裕云，已得千舟"，说明宋室南渡后造船业不减北宋。下文述三种战舰：

乾道五年(1169年)，水军统制冯湛造多桨船一艘，船长八丈三尺，宽二丈，用桨四十二支。载甲士二百人。这种新型桨船，性能极好，在江河湖海都可使用。

淳熙七年(1180年)，马定远造运马船一百只，用以运军马，也可以迎敌，是战渡两用船只。

嘉泰三年(1203年)，秦世辅造铁壁战船，长十丈，宽一丈八尺，两底各有橹八支。载士兵，水手一百五十人。结构特别坚固，能冲击敌船。

1974年福建泉州湾出土宋代海船，尖底，船身扁阔，头尖尾方，龙骨由两段接成。船板有搭接和平接两种方式，用麻丝、竹茹、桐油灰嵌缝。全船共十四舱。复原后的泉州古船长34.56米，宽9.9米，排水量374.4吨。与历史文献记载吻合。

两宋造船不论数量或质量都体现我国航海史的新高度。而指南针导航、船舵指挥航向、风力扬帆是远航三大必要条件，宋时已经具备。这种技术西传欧洲后，西方才在15～16世纪绕好望角到东南亚，"发现"新大陆，后又绕地球一周。

三　航　海

两宋政府都重视海外贸易，南宋还远远超过北宋。市舶司的税收，占南宋财政收入二十分之一。宋高宗时收入达二百万贯，超过北宋年入最高额的二倍多。绍兴七年(1137年)"上谕：市舶之利最厚，若措置合宜，所得动以百万计，岂不胜取之于民？朕所

以留意于此，庶几可以少宽民力尔。”[1] 上行下效，南宋航海事业特别发达。

在航海技术上固有指南针可以明辨方向，如遇狂风巨浪船舰都有碇石自船首垂下，使船在中途可以抛“锚”，停止前进。船上有布帆、利蓬(席帆)，正风用布帆，偏风用利蓬。船桅又设转轴，可以自由起倒。由于造船航海技术的进步，两宋时期中国商船航行东海、黄海、渤海的船只空前增多，比以往更为安全。

徐兢《宣和奉使高丽图经·封境》记航海到朝鲜历程：“由明州定海放洋，绝海而北，舟行皆乘夏至后南风。风便，不过五日即抵岸焉。”《宋史·高丽传》也说：“自明州定海遇便风，三日入洋。又五日抵墨山，入其境。自墨山过岛屿，诘曲礁石间，舟行甚驶、七日至礼成江，江居两山间，束以石峡。湍急而下，所谓急水门，最为险恶。又三日抵岸，有馆曰碧澜亭，使人由此登陆，崎岖山谷四十里，乃其国都云(开城)。”这是说由明州航海到礼成江要七天。再航行三天到碧澜亭登陆。步行四十多里，才能抵达开城。文献记载中朝海路交往要看风向，如遇顺风，则“历险如夷”，遇逆风，则“舟触礁辄破”。从经验教训积累安排航行安全日程：明州到高丽多在七、八、九月乘西南季风，返程则以十、十一月为宜，乘东北季风。

在航海技术中宋代有针路的设计——用指南针引路。记载针路有专书，称为针经，或针谱。写明：某地开始，航向，航程，船到某地。还有海图。徐兢的《宣和奉使高丽图经》是我国第一部海道图，可惜原图已佚。

① 《宋会要辑要·职官》。

第八节 桥 梁

中国造桥技术至宋而成熟。

唐及唐以前桥梁已杳无痕迹，而两宋桥梁非但存今佳例甚多，而且至今仍在使用，真是老当益壮，令人敬，也令人爱。我们分型制选析。

一 石 梁 桥

万安桥又名洛阳桥，在福建省泉州市。北宋皇祐五年(1053年)始建，嘉祐四年(1059年)竣工，历时六年八个月。主持人郡守蔡襄《万安渡石桥记》：当时桥长三百六十丈，宽一丈五尺。有47桥孔。今存桥长834米，桥面宽7米。有46个桥墩，加两侧桥台，仍47个桥孔，保留原貌。

桥在洛阳江入海口，江面辽阔。江海之交，水急浪高，施工艰巨，不言而喻。当年为解决基础稳固问题，首创筏形基础，在江底沿桥址抛数万巨石，成为石堰，宽20余米，长500米，提高江底标高3米以上。在此基础上建筑桥墩，迎水面做成尖劈状，以减弱海潮冲击。为解决块石之间的联结，在无混凝土材料的条件下，当地工匠以大量牡蛎倾倒江底，日深月久，牡蛎贝壳互相勾结，使石块凝聚成为整体。桥孔之上架重达20～30吨巨型石梁三百余条，在无起吊设备下，当时只能利用潮汐涨落，利用浮力控制运石船只位置，使石梁各自准确到位。这种浮运架梁是近代建桥中常用，不意近千年前宋人已着先鞭。

洛阳桥历经沧桑，当地虽发生过上百次地震、海啸和台风，至今无恙。20世纪30年代，在原有桥面上高铺水泥桥面，行驶各种车辆，是闽南北交通孔道。

以洛阳桥为母型，在泉州境内形成建桥热，长桥成风。在两

宋时建成的有：

桥 名	长(尺)	宽(尺)	孔数	始建于	工程进行年数
石笋桥	805	17	16	皇祐元年(1049年)	5
东洋桥	5 470		248	绍兴元年(1131年)	30
安平桥	8 110	16	362	绍兴二十年(1151年)	2
顺济桥	1 500	14	31	嘉定四年(1211年)	
龙尾桥	5 000			宝庆三年(1227年)	
盘光桥	4 000	16	160	宝祐元年(1253年)	12

这种洛阳桥式的造桥活动在时间和空间上都有延伸。广东潮州广济桥于乾道五年(1169年)始建，长1 600尺，宽15尺，19孔，中间留300尺空档，有18只船联系作为浮桥，为开合式桥首例。福州万寿桥始建于元代大德七年(1303年)，历时二十年，长1 700尺，宽13尺，共36孔。

二 木 拱 桥

《清明上河图》是12世纪张择端所作。名画如实记北宋东京东南城郊清明时节景象：红楼翠阁、绣户珠帘、酒肆茶楼、居宅院落以及舟楫车马、贩夫、走卒尽入画中。图上有几座桥都是实际存在过的，最突出的就是那座虹桥，桥式很别致。(图1.1.4)

汴水原是引黄河水，后来引洛水，每当洪水季节，水流湍急。《宋会要》："大中祥符四年(1011年)陈留有汴河桥与水势相戾，往来舟船多致损溺……五年，京城东津门外新置汴河浮桥，未及半年，累损公私船。"可见，水上通船和桥柱的矛盾，古今一理。惟有向大跨度发展，河中不设桥墩，就永绝撞船之患。《宋会要》所载魏化基创议："天禧元年(1017年)正月，罢修汴河无脚桥。内殿承制魏化基言，汴水悍激，多因桥柱坏舟，遂献此桥木式，编木

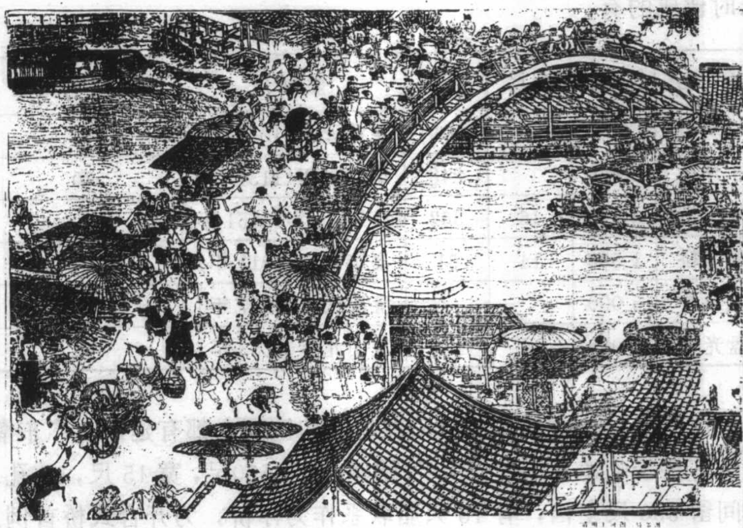


图 1.1.4

为之，钉贯其中，诏化基与八作司营造。至是，三司度所废工逾三倍，乃请罢之”。这说明魏化基的无脚桥建议未获成功，原因只是太费工。另一文献《渑水燕谈录》记：“青州(今山东省益都)城四面皆山，中贯洋水，限为二城，先时跨水植柱为桥，每至六七月间，山水暴涨，水与柱斗，率常坏桥，州以为患。明道中(1032～1033)夏英公守青，思有以捍之，会得牢城废卒，有智思，叠巨石固其岸，取巨木数十相贯，架为飞桥，无柱，至今五十余年不坏。庆历中(1041～1048)陈希亮守宿，以汴桥坏，率常损官舟，害人命，乃法青州所作飞桥，至今汾汴皆飞桥，为往来之利，俗曰虹桥”。《宋史》陈希亮传也说：“希亮知宿州，州跨汴为桥。水与桥争，常坏舟。希亮始作飞桥无柱，以便往来。诏赐缣以褒之，仍下其法，自畿邑(东京)至于泗州，皆为飞桥。”可见《清明上河图》上的桥就是文献所记飞桥或虹桥。

图上所取透视角度可见虹桥内部结构(图 1.1.5)，从桥侧向

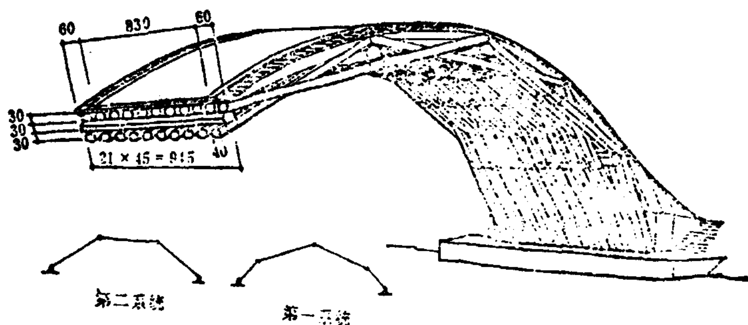


图 1.1.5

桥腹看，在桥的宽度内一共列有 21 组拱骨。拱骨为大圆木，依行人大小比例，直径约 40 厘米。共上下两面锯成，拼成平面。21 组拱骨，共分两个系统：其一，外面一组拱骨是两根长拱骨和两根短拱骨。其二，由三根等长拱骨组成。如此排比，前者有十一组，后者十组。前者如单独存在，为不稳定结构，于是以后者拱木的交会点，设置横贯全桥宽度的横梁，这种横梁全桥共有五条，各起联系拱骨，使成稳定结构和在横向分配活荷载的作用(图 1.1.5)，《渑水燕谈录》所记："取巨木数十相贯"就确切地描述了这一结构。从图上看拱骨与横梁间联结，或是竹材、藤材捆绑式，或是铁材箍式。每根横梁端部，钉有长方木板，上画兽头。拱骨上横铺桥面板，顺拱势到接岸处成反弯曲线，使道路和顺，也增加桥的美观。拱桥会产生推力，所以要"叠巨石固其岸"，即用条石砌筑桥台。图上还可以看到桥台侧，留有纤道，真是周到的设计。

虹桥经张择端如实写生，可以估测其实物大小：桥跨约 25 米，净跨 20 米，桥矢 5 米，桥冠与水面距近 6 米，桥宽 8 米，矢跨比为 1∶5。虹桥为世界桥梁史上所罕见，是我国独创的桥梁结构形

式。

在很长一段时间里，人们认为虹桥的结构形式已失传。本世纪70年代末期，茅以升领导下的《中国古桥技术史》编写委员会同事们，经过艰苦实地考察，发现在浙江西南、福建东北洞宫山脉、雁荡、括苍、鹫峰等山脉间仍有不少此类木桥，当地称为蜈蚣桥，可以视为汴梁虹桥的延伸。我们列表如下：

桥　名	全长（米）	拱跨（米）	宽（米）	高（米）	始建于	所在地
营岗店桥	33	28.2	5	10.6	清咸丰六年(1856年)	浙江泰顺
溪东桥	38	27	5		清道光七年(1827年)	浙江泗溪
下　桥	50	31	5.2			浙江泗溪
怀仁桥	38.5	29.5	5			浙江青田
梅崇桥	39	33.4	5		清嘉庆七年(1802年)	浙江云和
千乘桥	60	26×2	5		宋代	福建屏南

经过调查测绘，这些木桥结构、布置、细节基本一致，技术上相通。拱骨也分两个系统，以横梁联系，成为稳定构架，更有趣的是《屏南县志》记载说："千乘桥在棠口，有亭，长二十一丈，阔一丈八尺。自宋以来，重建已三次矣。迨嘉庆十四年(1809年)两河伯一时争长，又荡然无存。募金再造于嘉庆二十五年(1820年)临渊累石，下同鼎峙，千秋架工，凌空上拟，虹横百尺，自此依然有千乘桥济厥巨川也。"可见这类拱桥的范本就是东京虹桥。

三　石拱桥

河北赵县大石桥(安济桥)敞肩石拱，是我国今存最著名的桥梁。宋代兴建石拱桥也不少，如江苏苏州宝带桥，今测全长317米，联拱石桥，共53孔，其中三孔特大，以通舟楫。桥跨运河支流玳玳河，造型靓丽，有如宝带，"长桥卧波，未云何龙？"宋绍定五

年(1232年)重建，后重毁重建多次，今桥系清咸丰十年(1860年)毁后，同治十一年(1872年)重建者。我们遍查有关材料，宋原建石拱桥已全毁，无复存者。

第九节 建 筑

在建筑方面两宋出现许多新风格、新技术、新的进步。人们说，建筑是石头写的历史，存今为数众多，体量宏伟的实物，正无言地说明这些成就。我们分城市、祠庙、塔、建筑专著四段陈述。

一 城 市

宋代都城布局打破了唐以来里坊制度，东京城临街设店，取消夜禁，形成按行业成街。旅店、酒楼和娱乐性建筑也沿街兴建，寺观、园林成为市民新的活动场所。

北宋都于东京(今河南省开封市)，据文献记载，东京有三重城，每重城墙之外都有护城河环绕，外城周折今19公里。城墙每百步设有防御用“马面”。南面设三座门，东、北各四门，西面五门，每座城门都有瓮城，上建城楼。内城周9公里，每面三门。主要建筑为宫殿、衙署、寺观、宅第以及居民住宅、商店、作坊。宫城又称大内，每面各一座城门，四角建角楼。南城门为正门，五门洞。在主轴线上为御街。外朝宫殿有九间大庆殿，皇帝大朝所在；后为紫宸殿，左右有文德、垂拱等殿。外朝以北是皇帝寝宫和内苑。内城东北为艮岳，外城西郊有金明池，为皇帝游乐的地方。东京继承隋唐长安、洛阳建城传统，其规模虽不够宏大，却具有灵活、精巧特色。(图1.1.6)

东京城内有8厢121坊，大街通向各城门，都很宽阔。酒楼都是二、三层建筑。为了防火，城中建多处望火楼，各坊设军巡

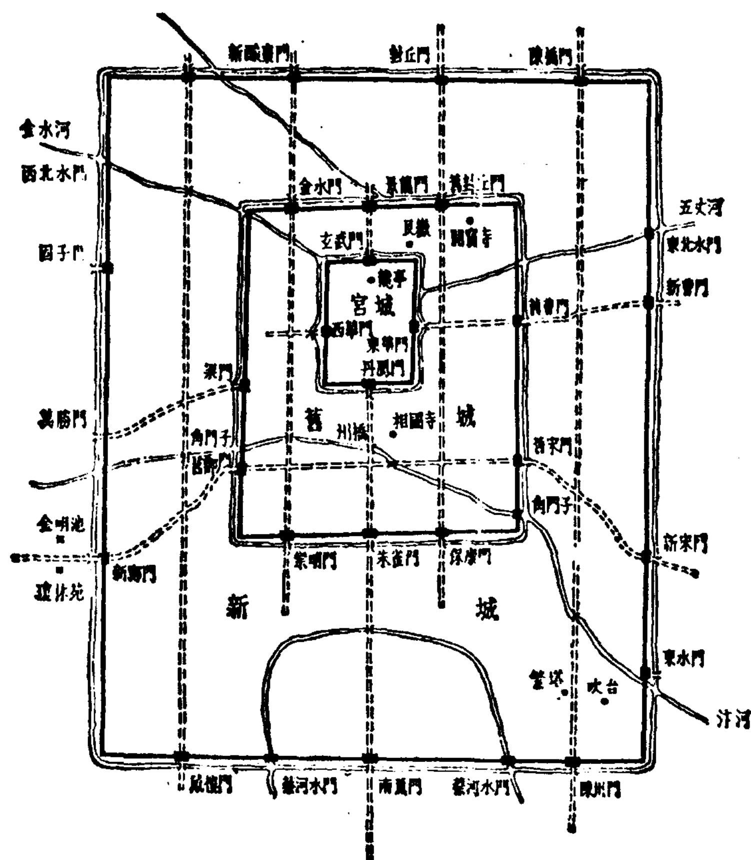


图 1.1.6

铺屋，这种消火治安设施是前所未有的。大街两旁种果树，护城河内植荷花，绿化工作也已予注意。

东京城内有汴、蔡等四条河流贯通，河上建有各式桥梁，据记载，汴河上有桥十三座，虹桥之外，还有天汉等桥，蔡河上有桥十一座。

二 祠 庙

两宋儒、佛、道宗教信仰并行不悖，各自兴建颇具特色的建筑物。宋建筑至今在全国城乡还能鉴赏，它们都成为国家级重点文物保护单位，成为著名旅游胜地，其平面布局的宏伟，其构造的精巧，鬼斧神工，叹为观止。可惜在历代战火中江南宋构毁坏比较严重，存者已非全貌。北方保存至今者比较完整，主轴线长动辄数里，例如唐明皇遗址。而在北宋乾道、大中祥符间增修的河南省登封中岳庙，前后十三进，身入其中，有行行重行行，庭院深深深几许的感觉。这里介绍二例：

晋祠 山西省太原晋祠是园林风味祠庙建群。沿纵轴线有石桥、献殿、飞梁、圣母殿等建筑物。圣母殿建于北宋天圣年间(1023～1032)，座西朝东，阔七间，进深六间，重檐歇山顶(图1.1.7)，四周回廊，殿中所用斗拱用材雄大。内部彻上露明造，因此内部高敞。殿内有四十尊侍女塑像，是宋塑精品。

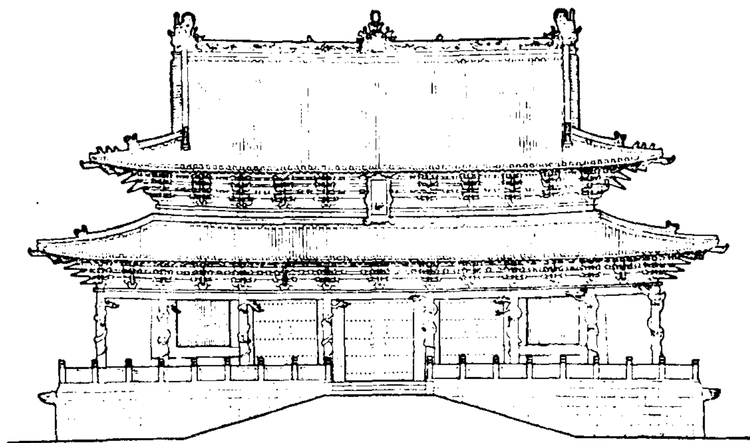


图 1.1.7

隆兴寺 河北省正定隆兴寺是宋建筑重要实例，全寺院落依

主轴线纵深、左右布置，自外而内，殿宇重重，高低错落，主次分明。全寺七进，其主体建筑为佛香阁。阁前两侧为转轮藏和慈氏阁。第三进为摩尼殿，其左右配殿，自成纵长方院落。佛香阁高 33 米，三层，歇山顶，上二层都用重檐。阁内供四十二手观音，高 24 米，是北宋开宝四年(971 年)建阁时所铸，是今存我国古代最大铜像，像身比例匀称，衣纹流畅。

三　塔

今存最古老的砖塔是嵩岳寺塔，平面十二角形，高 41 米，在河南省登封境，是北魏正光元年(520)建。入唐，塔多八角、六角或四方形。今存宋建塔有三种类型。

其一，楼阁式塔。砖心，外围木构，今存苏州报恩寺塔、杭州六和塔，虽屡毁屡建，但众信基本保存原貌。六和塔始建于宋开宝三年(970 年)，塔基面积达 1.3 亩，高 60 米，外观十三层，平面八角形，塔身内实为七层。宣和三年(1121 年)焚毁，绍兴二十三年(1153 年)重建，前后花了十一年才竣工，今塔光绪二十六年(1900 年)重修。彩色插图图版六为浙江湖州飞英塔，始建于唐。南宋瑞平初年(1234～1236)重建，存宋楼阁式塔风韵。

其二，楼阁式塔，全砖(石)造，所有屋檐，阑干，斗栱，柱，梁全用砖(石)构，代表作为福建省泉州双塔，都在开元寺内。东塔名镇国塔，始建于唐。宋宝庆三年（1227 年）改用石建，直至淳祐十年(1250 年)竣工，高 48 米。西塔名仁寿塔，始建于五代，宋绍定元年(1228 年)改用石建，直至嘉熙元年(1237 年)竣工，高 44 米。双塔仿木石造，雄伟壮丽，雕刻精美。(图 1.1.8)

其三，仿楼阁式砖塔。河北省定县料敌塔，高达 84.2 米，是我国今存最高砖塔。北宋咸平四年(1001 年)始建，至至和二年(1055 年)落成，先后造了五十多年。当时宋、辽对峙，战事频繁，塔名料敌，以登高瞭望，以知敌情。平面八角形，外观十一层，塔

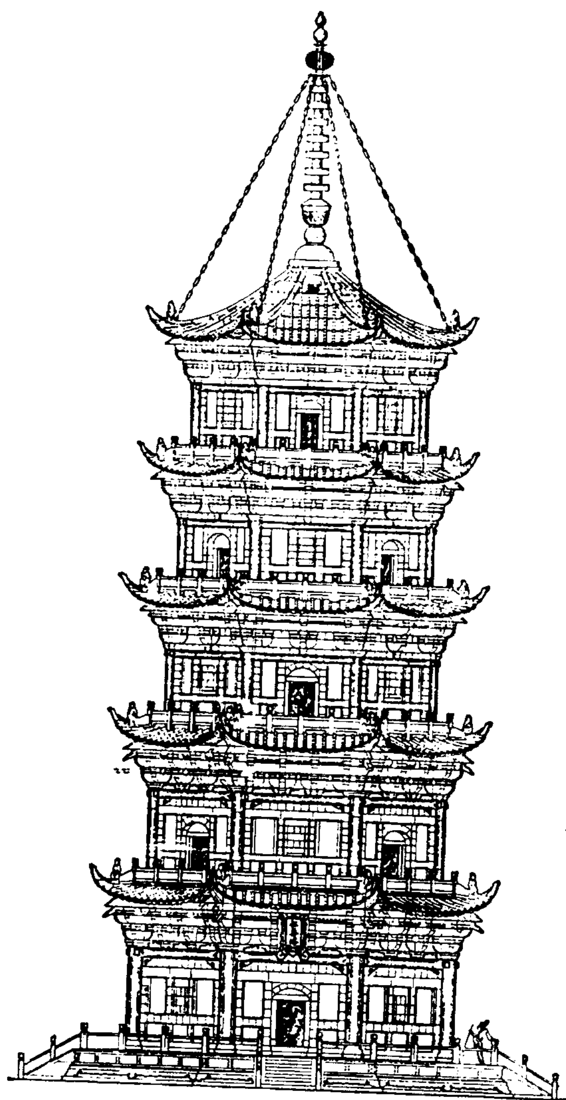


图 1.1.8

内设阶梯，登临各层。塔壁与塔心之间有走廊回绕，与四门相通。内部构造各层不一致，显然非出于同一设计图纸，但是外观一气呵成，完整和谐。光绪十年(1884年)塔壁东北面局部崩坍，遗地面宋砖数以千计。笔者于1982年由当地文物主管导引登塔至顶，参观访问，得悉虽历经百余年各种动乱，定县老百姓视宋砖为圣物，自觉保护，爱护文物之忱，值得我们学习。

《营造法式》

北宋崇宁二年(1103年)，政府为了管理宫室、祠庙、官署、府第工程，颁行《营造法式》一书。此书是工程主管将作少监李诫编写。全书357篇，3 555条。反映当时中原地区建筑技术和艺术的水平，对于研究宋代建筑乃至中国古建筑的发展，提供了重要文献，也是全世界建筑遗产中的珍贵文献。

《营造法式》有五个组成部分，共34卷。

其一，释名。第1、2卷总释、总例考证每一建筑术语的源流。

其二，各作制度为本书主要内容。第3至15卷是壕寨、石作、大木作、小木作、雕作、旋作、锯作、竹作、瓦作、泥作、彩画作、砖作、窑作共十三个工种的规范。说明每一个工种怎样按建筑物业主的地位尊卑，选用材料标准，以及各构件的比例尺寸和加工方法，各构件的位置和相互关系等 。

大、小木作又是主中之主，共占8卷。大木作制度中规定，造屋以“材”为祖，而材有八等。房屋的等级和大小都以“材”为准，它有绝对尺寸，也有相对尺寸。这种以“材”作为基本模数的设想，在现代工程技术中(如机械制造)有类似做法。

其三，功限。第16至25卷按照各作制度内容，规定各工种构件的劳动定额和计算方法。

其四，料例。第26至28卷规定各工种用料定额和工作质量。

其五，图样。第29至34卷，绝对篇幅几乎占全书三分之一，包括测量工具，及石作、大小木作、雕木作和彩画的平面图、断

面图、构件细部图及其相互关系以及各种雕饰与彩画图案。

《营造法式》久佚，本世纪初朱桂辛重新发现，整理后由上海商务印书馆用连史纸彩色套印，线装八巨册，朱桂辛还斥资于30年代在北平建立中国营造学社，聘请梁思成、刘敦桢主其事，测绘宋、辽、金古建筑，以实物对照研究《营造法式》。又出版《中国营造汇刊》(1至6卷)交流研究成果，《营造法式》秘奥才真相大白。它仍是今日、今后研究中国古建筑的最主要参考书和经典。

第二章　数学专著

第一节　数学发展的源头

两宋科学技术的长足进步，其中有关数量关系和空间形式处处需要数学，也为数学提出许多新的研究课题，促进了数学的发展。天文历法计算，海、陆地图绘制，兴修水利、造船、造桥、城市规划、修庙建塔，都有丰富的数学内涵。宋代科学技术的进步著称于世，即以中国四大发明而言，入宋后进展尤速，火药、指南针有了重要应用价值，造纸和印刷术也不无后人，在世界文化史上卓著功勋。英国学者F. 培根(F. Bacon，1561～1626)曾指出："印刷、火药和指南针已在书写军事和航海方面改变了全世界的面貌和一切事物的状态，后来又引起无数的其他方面的发明。因此，任何国家、任何一种学说、任何一位杰出人物对人类事业的巨大影响都无出其右者"。就在两宋这一特殊环境中，即科学技术的突飞猛进，连同金元数学在一起，使以筹算为工具的传统数学，达到登峰造极的新阶段，在许多领域内都取得极其辉煌的成绩，这些成就，远远超过了同时代的欧洲，不仅是中算最杰出的篇章，而且是中世纪数学多彩之页。尽管当时交通维艰，对朝鲜、日本、西亚、北非地区某些国家数学知识还有重要影响。

两宋经济发展，商业计算发达是数学发展另一源头。我们查《宋史》艺文六①，历算类载书目165部计585卷。除众多的历法和宋前算经以外有《算范要诀》，《明算指掌》，《一位算法》，《算

① 宋史（第十二册）. 北京：中华书局，1977，5271

术玄要》等，这些算书虽都未传世，可见当时民间商业算术之盛。

第二节 知名数学家及其传世名著

北宋数学有突出贡献，但无专著传世。

知名数学家四人：贾宪、刘益、蒋周、沈括。

沈括的工作散见于其笔记式文集《梦溪笔谈》，刘益《议古根源》和蒋周《益古集》早已失传，只能分别在南宋杨辉所著《田亩比类乘除捷法》及金李冶所著《益古演段》引文中看到片段，凤毛麟角，弥足珍贵。贾宪二项重大发明："增乘开方法"和"开方作法本源"的失传处境尤窘。杨辉虽在其《详解九章算法·纂类》全文引述，且拟题引申，可惜杨辉著书也已散失。明《永乐大典》算法类曾抄录，清末庚子之劫，《大典》遭掠。本世纪初，有人发现在英国剑桥大学图书馆竟藏有这二项发明的《大典》抄件，经辗转传抄，复制，发明才大白于天下。

南宋首都临安，当年在浙江湖州、杭州出传世名著。

知名数学家二人：秦九韶和杨辉。

秦九韶所著书，今名《数书九章》凡18卷，秦氏在湖州写成未刻印，几经流传殆失，至清道光二十二年(1842年)始有刻本。杨辉所著书《详解九章算法》12卷，《日用算法》2卷，《乘除通变算宝》3卷，《田亩比类乘除捷法》2卷，《续古摘奇算法》2卷。杨氏在钱塘(杭州)写书，成书曾刻印。几经沧桑，流失，至今传本仍残缺不全。

第二编

北宋时代

北宋传世数学专著虽然不多，但非常重要。为后世好几部经典作品奠定了深厚基础。这些数学专著中很多内容是开创性的。北宋(960～1127)，在欧洲正当中世纪黑暗时代，古希腊数学盛况已沉沦殆尽。所以北宋数学在当时居世界一流水平。

第一章 贾 宪

贾宪的身世所知很少。《宋史·艺文志》:“贾宪撰《黄帝九章算法细草》九卷。”又从贾宪的同代人王洙著作中获知:“近世司天算，楚衍为首。既老昏，有弟子贾宪、朱吉著名。宪今为左班殿值，吉隶太史，宪运算亦妙，有书传于世。而吉驳宪：弃去余分，于法未尽。”[①]《宋史·方技志》记楚衍“开封胙城(今河南省延津)人，于九章、缉古、缀术、海岛诸算经尤得其妙。”于天圣元年(1023年)与宋行古等同修崇天历(1024～1063)，从此已可推断贾宪是11世纪上半叶人，从事天文历算工作，有名师楚衍传授，特精于数学，且有专著传世。

贾宪的学术专著久佚，幸赖南宋杨辉所撰算法多种，得以保

① 王氏谈录．宝颜堂秘笈广集第20帙

存。杨辉《详解九章算法》在序中说，有12卷。此书也长期失传，经清人辑录，今改录6卷，次序显已非原貌。八国联军浩劫，《永乐大典》,所抄录杨辉原著被掠至异邦,今存英国剑桥大学图书馆。从这些文献中我们尚可见有二处记录贾宪原作：《永乐大典》卷16 344有①《详解九章算法·纂类》勾股第九后有："贾宪立成释锁平方法、增乘开平方法，贾宪立成释锁立方法、增乘方法。"②"杨辉详解开方作法本源，出《释锁算书》，贾宪用此术"等记载。这与《宋史·楚衍传》所说贾宪"运算亦妙，有书传于世"可以呼应。

第一节　释锁开方与增乘开方

我们已在本《大系》第二卷第二章第一节筹算和第七节中陈述秦汉时开平方和开立方的繁重运算过程。它来源于图形：从已知面(体)积求正方形(立方体)边长。先民尊重由形到数的变换,小心翼翼地作如此复杂的计算，是可以理解的。但是当开方运算进一步用来解更高次方幂以及一般多项式时,对这种运算的简化,已是迫不及待的普遍需要。以贾宪为代表的北宋数学家创立释锁开方，以此作为过渡，又发明增乘开方，在这一课题上的简化，取得飞跃性的进展。

贾宪所提出的释锁开方有两种：开平方和开立方。以开平方来说，全称"立成释锁平方法"。"立成"是指唐代以后天文学家为计算各种天文数据立出的表格，此处喻"立等可取"。"释锁"，释就是开，释锁就是开锁。是指原来《九章算术·少广》开平方法则说得过于笼统，虽然释锁开方并无新内容，但明确了许多关键问题。在表2.1.1现以$\sqrt{55\ 225}$为例，把九章开方术和释锁开方(括弧内)作一比较，后者明确的是：其一，超一等是从被开方数末位起算；其二，开平方四行数分别给予命名，自上而下：商、实、

表 2.1.1

步骤	算筹
①置积为实，借一算。（置积为实，别置一算，名曰下法，于实数之下。）	55 225
②步之，超一等。（自末位常超一位）	55 225 10 000
③议所得，（实上商置第一位，得数。）	200 55 225 10 000
④以一乘所借一算为法。（下法之上，亦置上商，为方法。）	200 55 225 20 000 10 000
⑤而以除。（以方法命上商，除实。）	200 15 225 20 000 10 000
⑥除已，倍法为定法（二乘方法为廉法。）	200 15 225 40 000 10 000
⑦其复除：折法而下，复置借算，步之如初。（一退，下法再退。）	200 15 225 4 000 100
⑧以复议一乘之。（续商第二位。）	230 15 225 4 000 100
⑨所得副以加定法。（得数于廉法之次，照上商，置隅。）	230 15 225 4 300 100
⑩以除。（以方廉二法皆命上商，除实）	230 2 325 4 300 100
⑪以所得副从定法。（二乘隅法，并入廉法）	230 2 325 4 600 100
⑫复除，折下如前。（一退，下法再退。）	230 2 325 460 1
⑬以所得、以复议一乘之。（商置第三位。）	235 2 325 465 1
⑭所得、副以加定法（得数、下法之上、照上商，置隅。）	235 2 325 465 1
⑮以除。（以廉隅二法皆命上商，除实尽，得平方一面之数。）	235 0 465 1

廉、隅；其三，在减根变换时，各项系数扩大倍数，九章只说："折法而下"，而释锁开方给予定量说明：一退、再退；其四，九章对答数只说：议所得。贾宪则点明其个、十、百位数，这样做使当时计算工作者可以按部就班地按《九章算术》做旧法开平方运算。更重要的是以释锁开方为过渡和基础，把开方运算纳入崭新的方法——增乘开方（今称以估根、扩根、减根三位一体的数值解方程），"增"就是加，"增、乘"就是随乘随加，我们说释锁开方是过渡，因为它确为增乘开方提供许多准备：行的名称、扩根术语、根的位数的确定等等。

贾宪所发明的增乘方法有两种：增乘开平方和增乘开[立]方法，我们在表 2.1.2 以$\sqrt[3]{1\,860\,867}$为例，说明增乘开立方的具体步骤。

如表 2.1.2 把这十个步骤用现代综合除法表示，可见在近十个世纪前的算法与今法完全一致！只是算式横竖表示相异而已。

	下法	廉	方	实	
①	1 000 000	0	0	−1 860 867	(1 上商
		1 000 000	1 000 000	1 000 000	
②	1 000 000	1 000 000	1 000 000	−860 867	
		1 000 000	2 000 000		
③	1 000 000	2 000 000	3 000 000	−860 867	
		1 000 000			
④	1 000 000	3 000 000	3 000 000	−860 867	
⑤	1 000	30 000	300 000	−860 867	(2
		2 000	64 000	728 000	
⑥	1 000	32 000	364 000	−132 867	
		2 000	68 000		
⑦	1 000	34 000	432 000	−132 867	
		2 000			
⑧	1 000	36 000	432 000	−132 867	
⑨	1	360	43 200	−132 867	(3
		3	1 089	132 867	
⑩	1	363	44 289	0	

表 2.1.2

步骤	筹式
①实上商置第一位，得数。	商 1 860 867 实 方 廉 1 000 000 下法
②以上商乘下法，置廉，乘廉为方，除实讫。	100 商 860 867 实 1 000 000 方 1 000 000 廉 1 000 000 下法
③复以上商乘下法，入廉，乘廉入方。	100 商 860 867 实 3 000 000 方 2 000 000 廉 1 000 000 下法
④又乘下法入廉。	100 商 860 867 实 3 000 000 方 3 000 000 廉 1 000 000 下法
⑤其方一、廉二、下三退。	100 商 860 867 实 300 000 方 30 000 廉 1 000 下法
⑥再于第一位商数之次，复商第二位得数，以乘下法入廉，乘廉入方，命上商，除实讫。	120 商 132 867 实 364 000 方 32 000 廉 1 000 下法
⑦复以次商乘下法入廉，乘廉入方。	120 商 132 867 实 432 000 方 34 000 廉 1 000 下法
⑧又乘下法入廉。	120 商 132 867 实 432 000 方 36 000 廉 1 000 下法
⑨其方一、廉二、下三退，如前。	120 商 132 867 实 43 200 方 360 廉 1 下法
⑩上商第三位得数，乘下法入廉。乘廉入方，命上商除实适尽，得立方一面之数。	123 商 0 实 44 289 方 363 廉 1 下法

我们上溯对照贾宪原著是饶有兴趣的。(表 2.1.2)

增乘方法曰："实上商置第一位，得数(1)。以上商乘下法(1 000 000)置廉，乘廉为方(1 000 000)，除(去)实讫(−860 867)——式中①～②两行。以上商乘下法，入廉(2 000 000)乘廉入方(3 000 000)——式中③行。又乘下法，入廉(3 000 000)——式中④行。

其方一、廉二、下三退——式中第⑤行。

再于第一位商数之次，复商第二位(2)，得数以乘下法(1 000)入廉(32 000)，乘廉入方(364 000)。命上商(728 000)，除实讫(−132 867)——式中⑤～⑥行。复以次商(即 2)乘下法，入廉(34 000)，乘廉入方(432 000)，又乘下法，入廉(36 000)——式中⑦～⑧行。

其方一、廉二、下三退——式中第⑨行。

如前上商第三位(3)，得数乘下法(1)，入廉(363)，乘廉入方(44 289)。命上商(132 867)，除实适尽(0)——式中⑩行。

得立方一面之数(123)。"

第二节　开方作法本源

《九章算术·少广》中开方术："除已，倍法为定法。"开立方术："除已。三之为定法……以三乘所得数置中行……。"由此知道开平方和开立方实在就是二次二项式和三次二项式的数值解法。从开方术和开立方术人们逐渐发现在数值解方程中减根变换前后，新旧方程间的系数关系，就是二项式展开前后的系数关系。一般说，对于 $x^n=a$，作减根变换 $x_1=x-b$，那么新方程 $(x_1+b)^n=a$ 可变形为

$$\binom{n}{0}x_1{}^n+\binom{n}{1}bx_1{}^{n-1}+\cdots+\binom{n}{n-1}b^{n-1}x_1+\binom{n}{n}b^n=a。$$

对于系数$\binom{n}{0}$，$\binom{n}{1}$，…，$\binom{n}{n}$，$n=1$，2…可以排列成一个三角形

$$
\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1\\
\cdots\cdots
\end{array}
$$

借助于这些系数可以开方、开立方和开高次方。

在今存《永乐大典》卷16 344有“杨辉详解开方作法本源”明确自注：“出《释锁算书》，贾宪用此术。”贾宪开方作法本源附图[①]，恰是二项六次式的展开系数表，图下有五句话说明，“左衺[②]乃积数，右衺乃隅算。中藏者皆廉，以廉乘商方，命实而除之。”大体说，贾宪是用这张表所示系数借以开方（含高次方），所以他名此表为“开方作法本源。”从上一节释锁开方已知用随加随乘手续减去被开（立）方数（实）以获得所求数，所以后面两句话很好理解。至于前面三句话是指二项式展开系数三角形中左边的1称为积，右边的1称为隅，而中间那些数都称为廉，这些名词在释锁开方中也都出现过。

贾宪还在系数三角形图后面有一段文字说明：怎样从隅逐步计算出中间那些廉。我们抄录如下：

增乘方求廉法草曰（释锁求廉本草）：“列所开方数（如前，五乘

① 见第六编第一章第三节，三，贾宪“开方作法本源”杨辉详解。

② 衺是衺字之误，衺是斜的异体字。

方列五位，隅算在外）[①]，以隅算一自下增入前位，至首位而止。（首位得六，第二位得五，第三位得四，第四位得三，下一位得二。复以隅算如前升增，递低一位求之）。

求第二位

六（旧数）　五（加十而止）　四（加六为十）　三（加三为六）　二（加一为三）

求第三位

六　十五（并旧数）　十（加十而止）　六（加四为十）　三（加一为四）

求第四位

六　十五　二十（并旧数）　十（加五而止）　四（加一为五）

求第五位

六　十五　二十　十五（并旧）　五（加一为六）

上廉　二廉　三廉　四廉　五廉。”

事实上“求廉法草”就是对二项式$(x+1)^6$展开系数求法。参照贾宪的文字说明，我们列表2.1.3，步骤①至⑤，然后对照综合除法，就很容易验证其中运算规律。

表2.1.3

	①求第一位	②求第二位	③求第三位	④求第四位	⑤求第五位
首	5+1=6（上廉）	6	6	6	6
二	4+1=5	5+10=15（二廉）	15	15	15
三	3+1=4	4+6=10	10+10=20（三廉）	20	20
四	2+1=3	3+3=6	6+4=10	10+5=15（四廉）	15
下一	1+1=2	2+1=3	3+1=4	4+1=5	5+1=6（五廉）
隅算	1	1	1	1	1

① 括弧内原著用小字，系贾宪自注注文。

增乘求廉法（综合除法表示）

	1	0	0	0	0	0	1	(1
		1	1	1	1	1		
	1	1	1	1	1	1	1	
		1	2	3	4	5		
①	1	2	3	4	5	6		
		1	3	6	10			
②	1	3	6	10	15	6	1	
		1	4	10				
③	1	4	10	20	15	6	1	
		1	5					
④	1	5	15	20	15	6	1	
		1						
⑤	1	6	15	20	15	6	1	

第二章 刘益和蒋周

第一节 刘 益

刘益身世难考，我们仅能在南宋杨辉所著书中了解北宋时刘益的重要数学活动，在杨辉专著中有三处提到，现录二则：

“刘益以勾股之术治演段锁方。撰《议古根源》二百问，带益隅开方，实冠前古。”(《算法通变本末》卷上,1274 年)

“中山刘先生作《议古根源》。序曰，入则诸门，出则直田，盖此义也。撰成直田演段百问，信知田体变化无穷。引用带从开方正负损益之法，前古之所未闻也。”(《田亩比类乘除捷法·序》，1275 年)

杨辉恰如其分地予刘益的学术贡献作了很高评价。

刘益生活年代约与贾宪同时。北宋政和三年(1113 年)将河北西路定州升为中山府。13 世纪杨辉称中山刘先生，只能理解刘益居于中山之地，未必生活在 1113 年之后。又程大位《算法统宗》所附元丰(1078～1085)、绍兴(1131～1162)、淳熙(1174～1189)以来刊刻算书书中有《议古根源》，且列为第一部书。由此可以推定刘益是 11 世纪中叶人①。

《议古根源》原著虽已失传，杨辉《田亩比类乘除捷法》在刘著 200 题中征引 22 题：“知片段则能穷根源，既知根源，而于心无蒙昧矣。今姑摘数问，评注图章(草)，以明后学。其余自可引而伸之，触类而长，不待尽述也。”(图 2.2.1 为书影)

---

① 李迪. 简评《中国数学史》. 科学通报，1965(11)：998

中山劉先生序謂算之術入則諸門出則直用議古根源
故立演段百問蓋欲演算之片段也知片段則能窮根源
既知根源而於心無懞昧矣今姑摘數問詳注圖章以明
後學其餘自可引而伸之觸類而長不待盡述也

图 2.2.1 书影

一　几　何

对勾股术的进一步探索。

对于直角三角形，以 a，b，c 表示其勾、股、弦。《九章算术·勾股》对于 a，b，c；$a+b$，$a+c$，$b+c$；$b-a$，$c-a$，$c-b$ 中任取二元素解直角三角形(边)，做了不少工作，创立许多公式①。唐代王孝通《缉古算经》对已知 ab，$c-a$；bc，a；ac，$c-b$ 类型问题提出了解题方案②。杨辉所引《议古根源》22题中第1～10题对已知 ab，$a+b$；ab，$b-a$ 类型题作出解法，并导致立二次方程和数值解二次方程。例如：

第4题：直田积八百六十四步③。只云长阔共六十步。欲先求阔步，得几何？答数是24步。而益隅术说："置积为实，共步为从方，以一为益隅，开平方除之。"如设所求阔为 x 步，术文就是列出了方程　$-x^2+60x=864$。

截积术

从已给图形截取其部分，又从已给面积关系求所割取部分中的线段关系。例如：

第13题：梯田一段，长三十步。南阔二十步，北阔三十八步，今自南北截地八百二十二步半。问：所截长、阔各几步？答数：截长35步，截阔27步。

如设梯形上下底分别为 a，b(图2.2.2)，高为 h，又设截取梯形面积为 A，它的下底为 x，高为 y。则据题意列出方程组

$$\frac{1}{2}(a+x)y=A,\ \frac{y}{h}=\frac{x-a}{b-a}。\qquad \text{(i)}$$

① 参见本《大系》第二、四卷有关章节。

② 参见本《大系》第二、四卷有关章节。

③ 指方步，下同。

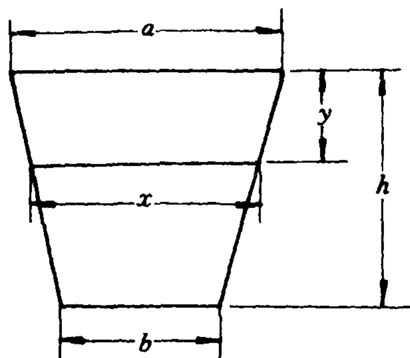


图 2.2.2

如在(i)式中消去 x，得含 y(刘益称为截长)的方程

$$y^2+\frac{2ah}{b-a}y=\frac{2Ah}{b-a}。\qquad\text{(ii)}$$

在(i)式中如消去 y，得含 x(截阔)的方程

$$x^2=a^2+\frac{2A(b-a)}{h}。\qquad\text{(iii)}$$

刘益对此题解法也提出两种方案，与上述结果相同：

先求(截)长术曰："二因截积(A)，元(原长,h)乘之。如阔差($b-a$)而一，为实。倍南阔(a)，以元长乘之，如阔差而一，为从法，开方除，得截长。"这就是按《九章算术·勾股》第 20 题术文模式所列出的方程(ii)。然后他从所求得截长反算截阔："如阔差乘长，如元长而一，得截阔。"

他又提出另一方案：先求阔术曰："二之截积，以阔差乘之，元长除之，并小头阔(a)自乘。开平方除之，得截阔。"这就是方程(iii)。然后反算截长："并两广折半，除截积即差。"

第 18 题：圆田一段，直径十三步。今从边截积三十二步。问：所截弦、矢各几步。答数，弦 12 步，矢 4 步。

设题中圆直径为 D，又所说弓形矢长为 x，弦长为 y，又已给

所截弓形面积为A，从《九章算术·方田》弧田术及勾股章第9题圆材埋壁术文分别列出方程(图2.2.3)

$$\frac{1}{2}x(x+y)=A,\ D=\frac{y^2}{4x}+x。\tag{i}$$

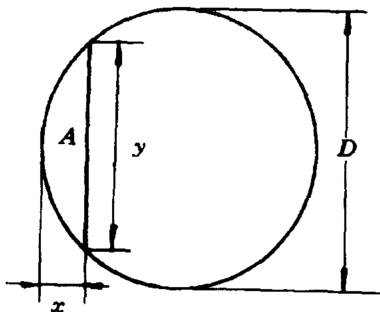


图 2.2.3

在其中消去y就得含x的四次方程

$$-5x^4+4Dx^3+4A=(2A)^2。\tag{ii}$$

本题术文与(ii)式一致，术曰：倍积自乘为实。四因积步为上廉。四因(直)径步为下廉，五为负隅。开三乘方除之，得矢。

刘益还以圆截割图形，例如：

第17题：环田外周七十二步、中周二十四步，实径八步。欲从内周截积一百九十五步。问：所截外周、实径各几步？答数：截径5步，外周54步。

设环田外周、内(中)周长分别为C_1，C_2，二者距离(实径)为B，截割的环宽为x步，面积为A，(图2.2.4)据题意及《九章算术·方田》环田术公式可列出方程

$$\frac{1}{2}\left(C_2+2\pi\left(\frac{C_2}{2\pi}+x\right)\right)x=A,$$

这就是$2C_2x+2\pi x^2=2A$。《议古根源》术文说："二因积步为实，以径步除二周差步为正隅，二因中周为从方，开平方除之，得所求

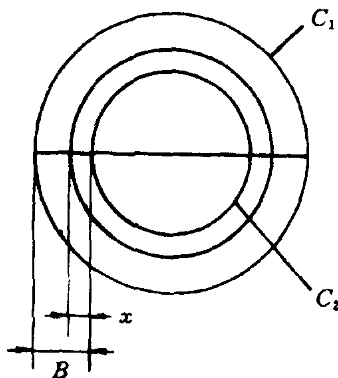


图 2.2.4

径步。”与上式一致，这里原著取$\frac{C_1}{2\pi}-\frac{C_2}{2\pi}=B$，反算 $2\pi=\frac{B}{C_1-C_2}$。

演段[①] 术

刘益继承前人刘徽注《九章算术》所用出入相补、以盈补虚原理处理图形问题、并进一步形数结合、数量化，创立演段术，正如杨辉在《田亩比类乘除捷法·序》中说刘益："撰成直田演段百问，信知田体变化无穷。"在同书卷下又论述说："《议古根源》故立百问，盖欲演算之片段也。知片段则能穷根源，既知根源而于心无蒙昧矣。"刘益发明的演段术就是用几何图形解释代数方程问题，现举三例说明。

第 4 题：直田积八百六十四步。只云长阔共六十步。欲先求阔步，得几何？答数：24 步。

设阔为 x 步，据题意列方程

① 清人李锐释演段云："所谓演者，演立天元；段者，以条段求之也。"所以演段是布列方程的两种步骤：其一，立天元一为某未知数，其二，用条段(图解法)列出方程。

$$x(60-x)=864，-x^2+60x=864。\quad (i)$$

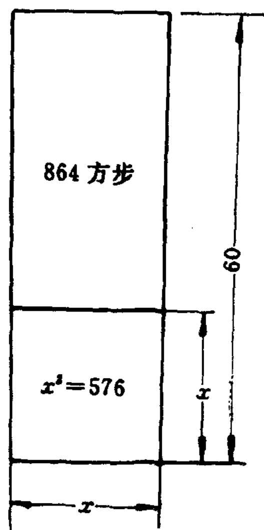


图 2.2.5

刘益作一长方形使长为60(步)，阔为所求步数(图 2.2.5)用以解释方程(i)，在本题先以当时的数学语言列出方程：益隅术曰："置积为实，共步为从方，以一为益隅，开平方除之。"然后对图 2.2.5 作解释，演段曰："一积止(只)有一长，若以长阔共步为从方，正少一阔。所以用一为益(负)隅，益入一段阔方，以应从方除(去)数。"

第 6 题：直田积八百六十四步。只云长阔共六十步。问：长多阔几步？

此题与上题相似而异。我们如设长比阔多 x 步，阔为 y 步(图 2.2.6)，据题意列方程：

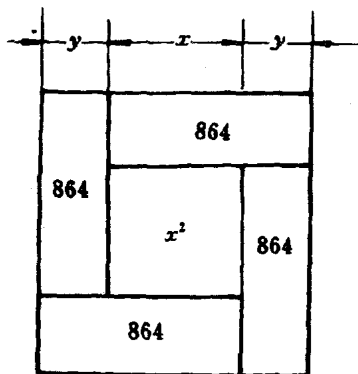


图 2.2.6

$$y(x+y)=864，x+2y=60。\quad (i)$$

消去 y，得 $$x^2+4\times 864=60^2。 \tag{ii}$$
刘益在“其和步求差术：四之积步，减和自(乘)之积，余，开平方除之，得长阔之差步”之后作图解释：“演段曰：和自乘，有四段直田积，一段差方积，所以用田积减和方，余得差方一段。”这种直观说明，深入浅出，非常得体。

第20题：钱田积七十二步。只云面径三步。问：内方几何？

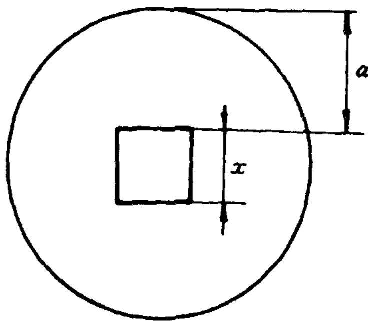


图 2.2.7

钱田，是指田形如旧时铜钱，圆内有空缺的正方形(图2.2.7)。面径是指正方形边与圆周的距离。设面径为 a，取 $\pi\approx 3$，已给面积为 A，而空缺的正方形边长为 x，那么据题意可列方程

$$\frac{3}{4}(2a+x)^2-x^2=A，\ -x^2+12ax=4A-12a^2。$$

这就是原著所说：“四因积步，以面径自乘，又十二乘之，用减积，余为实。十二乘面径为从方，一为益隅，开平方除之，得内方之数。”对这一数量关系，刘益又演段为图解。演段曰：“四因钱田，变井田三段：……有面径方积十二段。又面径乘内方十二段，比钱田又负内方一段，所以用一为益隅，开平方”。(图2.2.8)

二 代 数

刘益在《议古根源》中以几何模型布列的多项式方程，其系

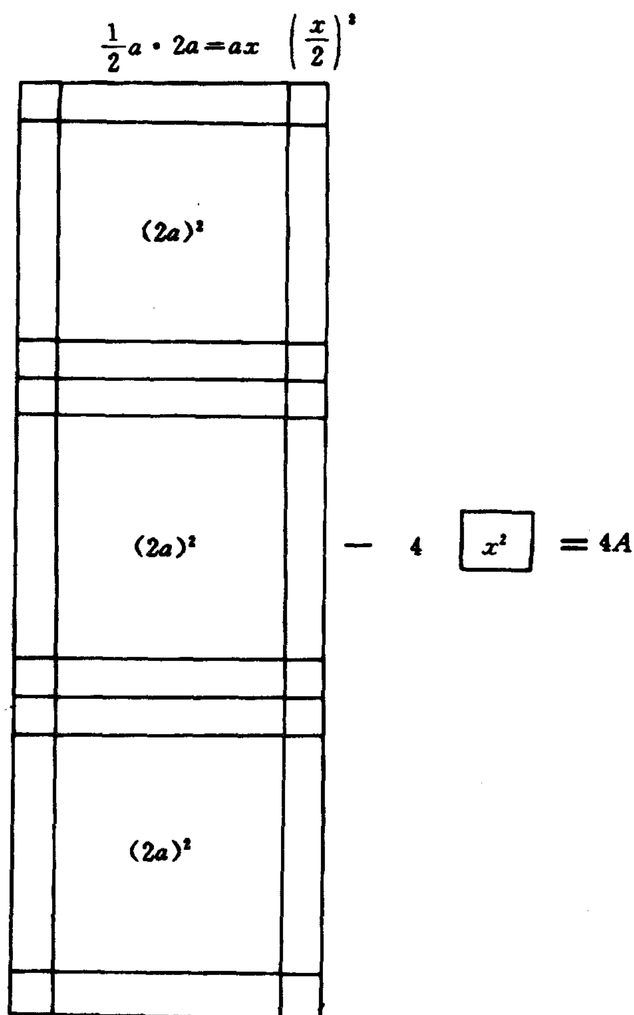


图 2.2.8

数比前人复杂：符号可正可负，次数有达四次的。所以杨辉说："中山刘先生……引用带从开方正负损益之法，前古之所未闻也。"

所谓“带从”是说方程不限于二项，是一般多项式方程。所谓“开方正负损益”是指刘益把数值解方程从贾宪增乘方法(正系数)推广到一般实系数方程。这里举二例说明。

第4题：前文已述贾宪用演段解释所列方程

$$-x^2+60x=864,$$

这一三项式方程用综合除法逐步减根，其算式如下：

$$\begin{array}{rrrl}
-1 & 60 & -864 & (20 \\
 & -20 & 800 & \\
\hline
-1 & 40 & 64 & \\
 & -20 & & \\
\hline
-1 & 20 & 64 & (4 \\
 & -4 & -64 & \\
\hline
-1 & 16 & 0 &
\end{array}$$

刘益在草文中说：“置积八百六十四为实，以六十步为从方，以一算为负隅。上商置阔二十，以乘负隅，减从方二十。以上商命余从四十，除积八百，余积六十四。以上商乘负隅，又减从方二十，余从二十步。又于实上商置阔四步，以乘负隅，减从方四，余从十六，命上商，除实尽，得阔二十四步，合问。”由此可见，刘益当年的理解与现今全相一致。

第18题：前文已介绍在截积术中，为计算所截弓形矢长(x)，刘益列出含负系数四次方程

$$-5x^4+4Dx^3+4A=(2A)^2,$$

其中$A=32$，$D=13$。在解$-5x^4+52x^3+128x^2=4096$时，现用综合除法：

$$\begin{array}{rrrrrl}
-5 & 52 & 128 & 0 & -4096 & (4 \\
 & -20 & 128 & 1024 & 4096 & \\
\hline
-5 & 32 & 256 & 1024 & 0 &
\end{array}$$

求得正根是4。而刘益此题草云：

“于实上商置上商得矢四步，以命负隅五，减下廉二十，余三十二。以上商四步，依三乘方乘下廉，入上廉，共二百五十六。又

以上商四步乘上廉得一千二十四，为三乘方法。以上商命方法，除实尽，得矢四步。”

对照图 2.2.9(原著插图书影)足见贾宪增乘开方——刘益正负开方——现代数值解方程一脉相承，只是在形式上横竖立式不

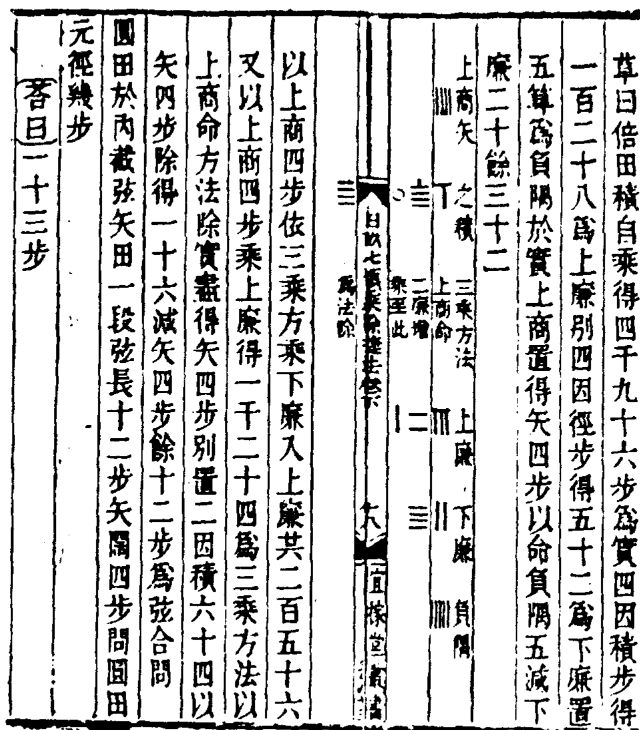

草曰倍田積自乘得四千九十六步爲實四因積步得
一百二十八爲上廉別四因徑步得五十二爲下廉置
五算爲負隅於實上商置得矢四步以命負隅五減下
廉二十餘三十二
上商矢 之積 三乘方法 上廉 下廉 負隅
上商命 二廉增 乘至此
爲法除
田畝比類乘除捷法卷下
宜稼堂叢書
以上商四步依三乘方乘下廉入上廉共二百五十六
又以上商四步乘上廉得一千二十四爲三乘方法以
上商命方法除實盡得矢四步別置二因積六十四以
矢四步除得一十六減矢四步餘十二步爲弦合問
圓田於內截弦矢田一段弦長十二步矢闊四步問圓田
元徑幾步
荅曰一十三步

图 2.2.9

同，所用记数数字不同而已。原来只用来作简便开(立)方的增乘方法，刘益进一步推广为解一般多项式方程，而且系数不拘正负，这实在是一项杰出的贡献。

第二节　蒋　　周

蒋周著《益古集》，原著已失传，而金代李冶(1192～1279)的专著《益古演段》是在《益古集》基础上的力作。在《益古演段·序》中李冶说："近世有某者以方圆移补成编，号《益古集》，真可与刘(徽)、李(淳风)相颉颃。余犹恨其秘匿而不尽发，遂再移补条段，细缗图式，使粗知十百者便得入室啖其文。"又元代朱世杰《四元玉鉴》(1303 年)祖颐序说："平阳蒋周撰益古"点出了《益古集》作者姓名及籍贯。李冶居栾城(河北省)，朱世杰寓燕山(北京市)，两人分别生活在金、元时代，都引述前人名著《益古集》，从政治环境和地理条件看，平阳(今山西临汾)蒋周应是北宋人，而它的《益古集》显然是李著《益古演段》的母本。后者设题 64 问，在题解中有的还保留"旧术"，当是《益古集》原术。于是我们还能看到蒋周所作富有特色的演段术，举其二例，并作解释。

第 56 题："今有圆田一段，内有圆池水占之。外计地二十三亩一分，又云从外田通内池径六十三步。问：内外周、径各多少？(圆依密率)答数：外周 286 步、径 91 步，内周 110 步、径 35 步，实径 28 步。"

设环田内、外周是 c_1，c_2，内、外直径是 D_1，D_2，面积为 A (图 2.2.10)。《九章算术·方田》有环田术："并内外周而半之，以径乘之为积步，这就是：

$$A=\frac{1}{2}(c_1+c_2)\cdot\frac{1}{2}(D_2-D_1)=\frac{\pi}{4}(D_1+D_2)(D_2-D_1)。\quad (i)$$

题中所说"从外田通内池径"[①] 是指内外直径的平均，即 $\frac{1}{2}$ (D_1+

① 简称通步，做两个分数的通分。

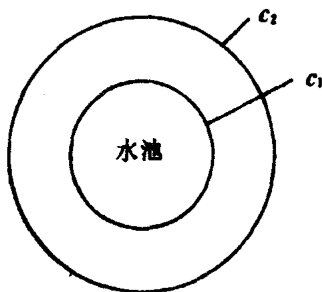


图 2.2.10

D_2)。密率据李淳风习惯 $\pi\approx\frac{22}{7}$。实径是指$\frac{1}{2}(D_2-D_1)$ 即环宽。所以原题已给$\frac{1}{2}(D_1+D_2)=63$ 步，$A=23.1$ 亩[①]。求 c_1，c_2，D_1，D_2 和$\frac{1}{2}(D_2-D_1)$。

李冶所说本题旧术即蒋周原术有二：

①旧术曰："二十二之通步，如七而一为法，除田积，见[实] 径。"

这里蒋周从九章环田术把圆环视为长方形条段：长为$\frac{1}{2}(c_1+c_2)=\frac{1}{2}\pi(D_1+D_2)$，宽为$\frac{1}{2}(D_2-D_1)$，按环田术得到所求是

$$\text{实径}=\frac{1}{2}(D_2-D_1)=\frac{A}{\frac{\pi}{2}(D_1+D_2)}\approx\frac{A}{\frac{22}{7}\cdot\frac{1}{2}(D_1+D_2)}。$$

求出实径后，其余求件就易于求出。

②又法，"并通步，自（乘）之，又十一之，于上。以十四之积减上，余为实。四十四之通步为法，见池径。"后文有注文："义曰，倍通步，即大小径并。其幂内有大小径幂各一，大小径相

① 1 亩作 240 方步计。

乘直分二。内减圆环积所变之方环积，余小径幂二，大小径相乘之直方二。又为小径乘大小径，并之直方二。又为小径乘通步之直方四，故以七倍之积较为实，二十二之通步为法，即得小径也。"

这里蒋周又以另一种演段解题：化圆为方，改先求出小圆(池)直径。我们如从代数方法理解，设小圆直径为 x，大圆直径仍为 D_2，那么从下面恒等变形：

$$\frac{\pi}{4}(D_2+x)^2-A=\frac{\pi}{4}(D_2+x)^2-\frac{\pi}{4}(D_2+x)(D_2-x)$$

$$=\frac{\pi}{4}(2D_2x+2x^2)$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot 2(D_2+x)x=\frac{\pi}{4}\cdot 4\left(\frac{D_2+x}{2}\right)x。$$

可求得

$$x=\frac{\frac{\pi}{4}(D_2+x)^2-A}{\pi\cdot\frac{D_2+x}{2}}。$$

蒋周则从几何变换入手，我们列表作一比较。

表 2.1.4

代 数 语 言	蒋 周 演 段
$2D_2x+2x^2$	余小径幂二、大小径相乘之直方二
$2(D_2+x)x$	又为小径乘大小径并之直方二
$4\frac{D_2+x}{2}x$	又为小径乘通步之直方四
$\frac{\left(\frac{\pi}{4}(D_2+x)^2-A\right)}{\pi\frac{D_2+x}{2}}$	故以七倍之积较为实，二十二之通步为法，即得小径也。

李刊此题旧术末行误为："故以十一倍之积较为实，四十四之通步为法。"借此不能得出结果小径 35 步。此处已据题意改正。小径求得后，就易于从通步换算其他求件。

第 22 题：今有方田一段，其西北隅被斜水占之外，计地一千一百一十二步七分半，只云从田东南隅至水楞，四十五步半。问：田方面多少？答数：田方面 35 步。

题意是说图 2.2.11 中正方形 $ABCD$ 中，已给直角$\triangle MCN$ 为

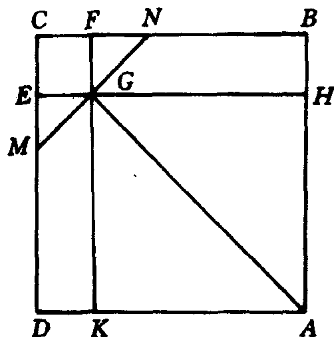


图 2.2.11

水域，五边形 $ABNMD$ 面积为1 121.75方步。对角线（部分）AG 长 45.5 步。求正方形边长。我们根据蒋周的演段思路：① 自 G 引 $GH /\!/ CB$，$GK /\!/ CD$，并设 DK 为 x。据题可列出等式：

$$\text{正方形 } AHGK+2 \text{ 梯形 } HBNG =\text{正方形 } ABCD-\text{直角三角形 } MCN。\quad \text{(i)}$$

按照《九章算术・勾股》第 11 题刘徽注："圆三径一，方五斜七，虽不正得尽理，亦可言相近耳。"可计算：

$$\text{正方形 } AHGK=\left(\frac{5}{7}45.5\right)^2=(32.5)^2,$$

① 李冶《益古演段》本题．旧术附图，图 2.2.11 据此参考改画。

$$梯形\ HBNG=(65-x)\frac{x}{2}。$$

$$\triangle MCN=1.96x^2。$$[1]

又梯形 $HBNG$=长方形 $HBFG-\triangle GNF$，把这些数据代入(i)，然后整理，得

$$2\cdot 32.5x-0.96x^2=1\ 212.75-(32.5)^2。\qquad (ii)$$

李冶在本题之后所列“旧术”，即蒋周原术：

“列田积于头位”指五边形面积1 212.75。

“又列(斜)至步除四，则直至步自乘，减头位，余为实。”这里斜至步即 45.5 步，好理解，“除四”是说减去四成。因蒋周从刘徽说方五斜七，正方形 $AHGK$ 边长应是对角线长除以 1.4，即

$$AH=\frac{AG}{1.4}$$

称为直至步。方程(ii)右端称为实。

“二之直至，为从。”指方程(ii)左端的一次项系数。

“以九分六厘为廉，减。”指方程的二次项系数为负数。

“开平方，得二步半，加直至三十二步半，得三十五步，即田方面也”。

从上举二例可见蒋周在演段术上所作筚路褴缕，以启山林的开创性工作。虽然他只是用几何图解列出等价于方程的等量关系，并未点出立天元一这个术语，但演段术本身正如胎儿躁动母腹，天元术之诞生已指日可待。

① 蒋周不作 $2x^2$，而是执着方五斜七之说，把$\triangle MCN$ 面积视为$\left(\frac{7}{5}x\right)^2=\frac{49}{25}x^2=1.96x^2$。

第三章 沈 括

沈括(1031～1095)，字存中，钱塘(今浙江省杭州市)人，(图2.3.1为沈括造像)



图 2.3.1

他24岁(1054年)任沭阳(今江苏省沭阳)主簿(县长助理)，在水利建设上立功：领导数万民工改变过去那种“熟不长粮，荒不长草，卅里萧条”的景象，成为水旱保收良田七千顷。他还在两浙、汴、淮等地为民造福，兴修水利。

33岁(1063年)沈括中进士，参加中央政府昭文馆编校书籍，研究天文历法。他亲自制作浑仪、晷表、浮漏等仪器，举荐平民卫朴合编《奉天历》(施行19年)。又曾任大常丞(礼乐部长助理)等文职官员。

45岁(1075年)出使辽国，力斥其夺地之谋，在外交事务上卓著功勋。

50岁(1080年)沈括统率部队，防御西夏入侵。

58岁(1088年)在润州(今江苏省镇江市)隐居，全力从事著作，写成《梦溪笔谈》26卷、《补笔谈》3卷、《续笔谈》1卷。全书共609条，总结了他多才多艺一生的经历，涉及考古学、文学、艺术、科学史、医学、药学、科学技术和囊括天文历法、地理、地质、生物、数学、物理、化学全部自然科学知识的当时认识。《梦溪笔谈》的学术价值享誉海内外，此点将在第四章评述，下文仅就与数学有关的成果作简要介绍。

第一节　天文历法

沈括对天体测量和地面测量有总的论述。他说“审方面势，复量高深远近，算家谓之書术……求星辰之行步气朔消长，谓之缀术，谓不可以形察，但以算数缀之而已。北齐祖暅有《缀术》二卷。”(《梦溪笔谈》卷18,技艺)

一　十二气历

“历法见于经者，唯《尧典》言‘以闰月定四时成岁’。置闰之法，自尧时始有。太古以前，又未知如何。置闰之法，先圣王所造，固不当议。然事固有古人所未至而俟后世者。如岁差之类，方出于近世，此固无古今之嫌也。凡日一出没谓之一日，月一盈亏谓之一月。以日月纪天，虽定名，然月行二十九日有奇，复与日会，岁十二会而尚有余日。积三十二月，复余一会，气与朔渐相远，中气不在本月，名实相乖，加一月谓之闰。闰生于不得已。……此殆古人未之思也。”“今为术，莫若用十二气为一年，更不用十二月。直以立春之日为孟春之一日，惊蛰为仲春之一日。大尽三十一日，小尽三十日。岁岁齐尽，永无闰余。十二月常一大、一小相间。纵有两小相并，一岁不过一次。……今此历论，尤当取怪怨攻笃，然异时必有用予之说者”。(《补笔谈》卷2,象数)

第一段沈括论述阴历置闰月是出于不得已，我国古代把冬至到冬至的时间(一年)等分为24段。每一个分点设一个气，共24气。从汉《太初历》开始把这24气排入历法：

立春(春天开始)、雨水、惊蛰、春分(昼、夜平分)、清明、谷雨；

立夏(夏天开始)、小满、芒种、夏至(白天最长、正午时日影最短那一天)、小暑、大暑；

立秋(秋天开始)、处暑、白露、秋分(昼夜平分)、寒露、霜降；

立冬(冬天开始)、小雪、大雪、冬至(白天最短,日影最长那一天)、小寒、大寒。

单数次序的如立春、惊蛰、谷雨、……称为中气，分别安排在一月、二月、三月、……。由于两个中气之间的时间为365.242 2÷12=30⁺(日)，而一个阴历月为29.530 6(日)。长期运转误差积累，有时整月内可以无中气："中气不在本月，名实相乖。"为此就必须置闰，把这个没有中气的月份定为闰月。

第二段是沈括所创新历，除了每年十二月大(31天)，小(30日)相间而外，就每年时间长短而言与今用阳历完全一致。这是一项非凡、合理的创造。为此竺可桢前后两次赞赏，这是对沈括十二气历最恰当的评价：

"括对古人之说，虽加以相当之尊重，但并不视为金科玉律，其论历法一条，抛弃一切前人之说，主张以节气定月，完全为阳历，而较现时世界通行之阳历，尤为正确合理。括去今已八百余年，冬夏时刻之有余、有不足；斗建之随时差迁徙，与夫阳历之优于阴历，虽早已成定论，而在括当时能独违众议，毅然创立新说，置怪怒攻笃于不顾，其笃信真理之精神，虽较之该列倭(Galileo)亦不多让也。①

沈括于历法主张抛弃一切前人之说，以节气定月，彻底为阳历，不管月亮的朔望，把闰月完全去掉。……这样彻底的一个阳历，较现行历法合乎理想。农夫春耕、夏种、秋收、冬藏的时间，统要看季节而定。沈括所创的历是最合老百姓所需要的。现行阳历的元旦于人生、于天时统无任何意义，而且月份的大小参差不齐，季节的安排毫无规律，这完全是罗马皇帝时代遗留下来的一

① 竺可桢. 北宋沈括对地学之贡献与记述. 科学，1926年，11 (6)：794～795

种制度。但在当时沈括这种主张是很受人的疯狂攻击的。20年前，英国气象局局长萧伯纳有同样的计划，不过他把元旦放在阳历的十一月六号，即中国的立冬节，称其历为农历。到如今英国气象局统计农业气候和生产，是用萧伯纳农历的。沈括说：'予今此历论，尤当取怪怒攻骂，然异时必有用予之说者。'他料想不到900年以后他的农历会在英国行起来了。"[①]

二　太阳视运动

"古今言刻漏者数十家，悉皆疏谬。历家言晷漏者，……皆未合天度，予占天候影，以至验于仪象，考数下漏，凡十余年，方粗见真数，成书四卷，谓之《熙宁晷漏》，皆非袭蹈前人之迹。其间二事尤微：一者，下漏家常患冬月水涩，夏月水利，以为水性如此；又疑水澌(柱)所壅，万方理之，终不应法。予以理求之，冬至日行速，天运已期，而日已过表，故百刻而有余。夏至日行迟，天运未期，而日已至表，故不及百刻。既得此数，然后复求晷影漏刻，莫不泯(吻)合，此古人之所未知也。二者，日之盈缩，其消长以渐，无一日顿殊之理。历法皆以一日之气短长之中者播为刻分，累损益。气初日差，每日消长常同。至交一气，则顿易刻差。故黄道有觚而不圆。""以圆法相荡(运算)而得差(分)，则差无不均；以要法相荡而得差，则差有疏数。相因以求从(积)，相消以求负(差)，从负相入(汇总)，会一术以御日行。以言其变，则秒刻之间消长未尝同。以言其齐，则止用一差。循环无端，始终如贯，不能议其隙，此圆法之微，古之言算者，有所未知也。……其详具予奏议，藏在史官，及予所著《熙宁晷漏》四卷之中。"(《梦溪笔谈》卷7，象数一)

漏(刻漏或漏刻、或铜壶滴漏)是古代测时仪器(图2.3.2)。

① 竺可桢．人民日报，1951-02-26

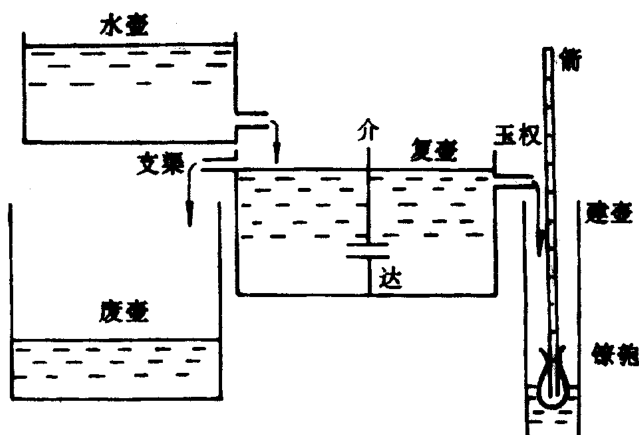


图 2.3.2

晷(晷漏或圭表)是古代测日影长仪器(图 2.3.3)。古人定义

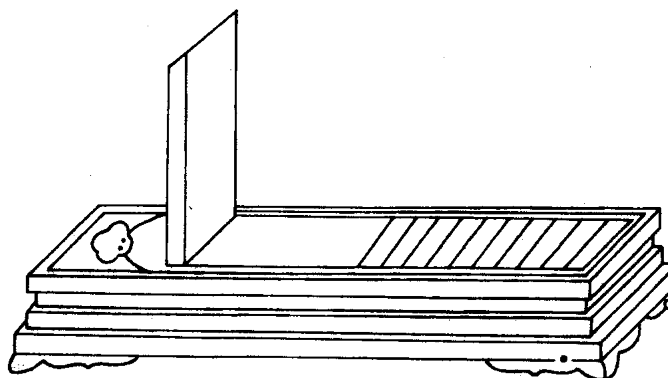


图 2.3.3

相继两天最短日影发生时刻之间的时间(等分为 100 刻)为一日。沈括的先辈误以为太阳视运动是匀速，但据晷表所测日影变化却不是均匀的。他们怀疑矛盾之所以发生是由于冬日水滴速度慢(水

涩，水澌所壅)，夏日水滴快(水利)。沈括经过十多年观察、实验，写成《熙宁晷漏》。在这里所引第一段他自述成果二则。

其一，否认先辈误导。沈括指出测时仪器运转是均匀准确的，而太阳视运动不均匀却是客观存在："冬至日行速，天运已期，而日已过表，故百刻而有余。"这是说冬至时太阳视运动快，所以相继两天最短日影形成的时刻周期已发生，而刻漏上读数已超过100刻。接着他又指出："夏至日行迟，天运未期，而日已至表，故不及百刻。"

其二，沈括论述："日之盈缩，其消长以渐，无一日顿殊(突变)之理。"又说"历法皆以一日之气短长之中者(平均值)播为划分……则顿易刻差，故黄道有觚(尖点)而不圆(光滑)"。这种说法深符今日连续函数的数学分析定义①。

这里所引第二段中所说圆法和妥法，虽语焉不详，其详"藏在史官，及予所著《熙宁晷漏》四卷(已佚)之中。"据近人严敦杰研究指出，这就是招差术(内插法)②，现摘引如下：

中国古代数学家，在6世纪时已发明了等间距的内插法(interpolation)，在7世纪时，又发明了不等间距的内插法，这在数学史上无疑是一件令人欣忭而且惊异的事实。

宋代各家修历，对于内插法公式都未及深造，只有沈括曾著文论及招差术。清张文虎(1808～1885)舒藏室杂著甲编卷下书《梦溪笔谈》后称此条："所言尤为入微(精微)，当为郭瀛台(郭守敬)平立定三差所自出。"……前此中国数学家对内插法计算没有定名。唐边冈称为相减相乘，宋沈括称为圆法或妥法。至此(郭守

---

① 如设时间 x 为横坐标，每日的时间长为 y，则连续函数 $y=f(x)$ 中对于任一点 x_0 在任意长度 ε，一定可以找到另一长度 δ，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ (无顿殊)

② 严敦杰. 中算家的招差术. 数学通报，1955 (1)

敬)称招差术，乃始得正名。

三 极星位置

“汉前皆以北辰居天中，故谓之极星。自祖暅以玑衡考验天极不动处，乃在极星之末犹一度有余。熙宁中予受诏典领历官，杂考星历，以玑衡求极星，初夜在窥管中，少时复出。以此知窥管小，不能容极星游转。乃稍稍变窥管候之。凡历三月，极星方游于窥管之内，常见不隐。然后知天极不动处，远极星犹三度有余。……予于《熙宁历奏议》中叙之甚详。”(《梦溪笔谈》卷7,象数一)

地球自转轴与天球的交点是北天极，位于北天极最近的星称为北极星。古时以为北天极恒静不动，所以《论语·为政》：“为政以德,譬如北辰,居其所而众星拱之。”建筑、营造就借以定出真北方向。北宋李诫《营造法式·定正》刊载测器——望筒(图 2.3.4,即窥管)及测法：夜则以筒指北，于筒南望，令前后两窍内正，见北辰极星。然后各垂绳坠下纪望筒两窍心于地，以为南北，则曰方正。”

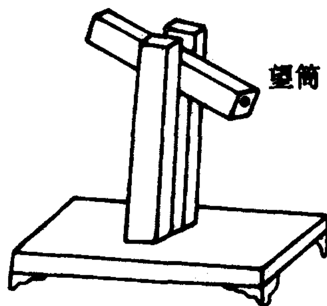


图 2.3.4

引文中沈括生动地描写了他在夜间观察天象，并记录他的结果——北极星与北极相距“三度有余。”由于天体摄动，北极并不恒静不动，像倾侧陀螺那样在空间每隔25800年回转一转，今北极星是小熊座 α 星(勾陈一)，沈括时代(11 世纪)的北极星是鹿豹座 32^2H 星(天枢星)。

第二节 测 望

一 水准测量

“熙宁中议改疏洛水入汴，予尝因出使，按行汴渠，自京师上善门量至泗州淮口，凡八百四十里一百三十步。地势：京师之地比泗州凡高十九丈四尺八寸六分。……验量地势，用水平望尺干尺量之，不能无小差。汴渠堤外，皆是出土，故沟水会相通，时为一堰节其水，候水平，其上渐浅涸，则又为一堰。相齿如阶陛，乃量堰之上下水面、相高下之数会之，乃得地势高下之实。”(《梦溪笔谈》卷25,杂志二)

本条沈括讲述他亲自从汴梁(开封)到泗州做水准测量的经过，所测地区平距折合今约400千米。两端高低差精度到分(折今2毫米)。他在文中还提出两种测量方法。其一，用水平(水准仪)及望尺(水准尺)，逐段求高差代数和，这在宋时曾公亮《武经总要》(1044年)(图2.3.5)及李诫《营造法式》已有细致记载。其二，在沿途作阶梯状堰坝蓄水，以测量地形高低(图2.3.6)。对于沈括所作水准测量在测法及其成果精度，竺可桢又有中肯评价：

“括之测量不但为平面测量，而且为地形测量。其量地面高低之法虽不尽善，但苟所筑之堰极为平直，当不致有大差误。其所用之尺，虽未必精密，但计高度至于分寸，可见其行事之不苟且。欧洲古代、希腊虽曾经测海岸之远近，罗马盛时亦有测量街道之举，但地形测量在括以前则未之闻。”[①]

再与欧洲同类测量作一比较，可见沈括此举在测法、在测区范围及精度上是有划时代意义的。俄国在1696年才开始在顿河地

---

① (《科学》第11卷第6期797页)

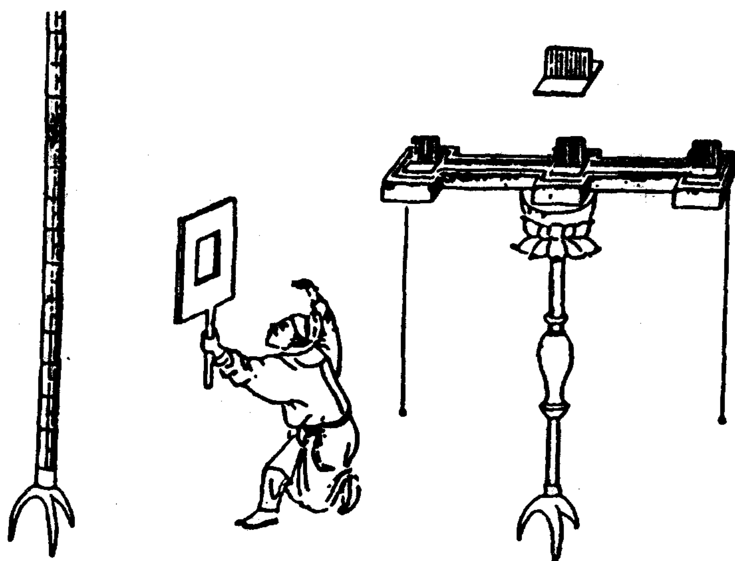


图 2.3.5

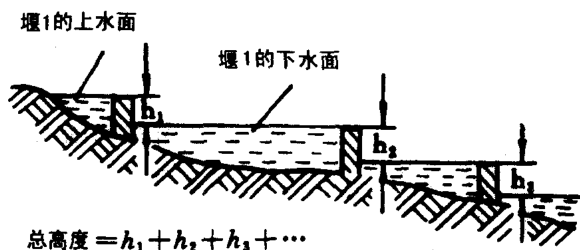


图 2.3.6

区作地形测量。19 世纪之初，法国皇帝拿破仑的随军工程师勒贝尔(Le Pere)，奉命测苏伊士地区 160 公里平距的高下水准却闹了笑话：地中海与红海海面相差 29 英尺。[①]

① Encyclopeadia Britannica, 11th edition, 26: 23, 191

二 弩 机

“予顷年在海州，人家穿地得一弩机。其望山甚长，望山之侧为小矩，如尺之有分寸。原其意，以目注镞端(箭尖)，以望山之度拟之，准其高下，正用算家勾股法也。……汉陈王宠善弩射，十发十中，中皆同处。……予尝……以镞注之发矢，亦十得七八。设度于机，定加密矣。”(《梦溪笔谈》卷19，器用)

弓、弩都是古代远射兵器。二者的差别在于弩有臂，弓则无臂。当弩的弦张紧之后，可以扣在弩臂尾部，一俟瞄准完毕，搭箭于弦上，松开扳手(古称拨机)靠弩背弹力把箭射远(图2.3.7)。

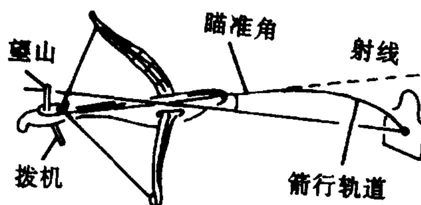


图2.3.7

从效果看无疑弩比弓前进了一大步，弩把张弦与瞄准区别为两个动作。此外它可以几个人甚至更多人施力张弦，增加弹力，加大射程。它还有可能装置有刻度的瞄准器(望山)，以提高命中率(图2.3.8)，所谓弩机就是指装置在弩臂尾部同时起到扣弦和瞄准两种功能的特制部件。沈括在本条记述这种兵器的构造和用法，其望山功能正与近代步枪表尺原理一致。在瞄准时除了几何要求：三点(表尺、准星和目标)成一直线之外，还有物理要求：重力场作用下对弹道的下坠影响。对弩机来说，三点(目标、箭尖、望山上选用适当刻度)选用高刻度，射线仰角较大，射程远时采用，射程近则反是。至于到底应对准望山上哪一分划，就要凭射击者的目测经验——“正用算家勾股法也”。这也正是沈括所论：“以目注镞，以

望山之度拟之，准其高下。”

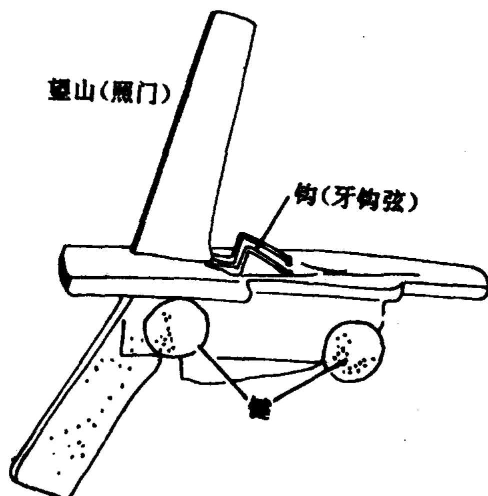


图 2.3.8

第三节　计　　量

沈括重视度量衡制度，在《梦溪笔谈》有全面论述。

一　　度

“予考乐律，及受诏改铸浑仪，求秦汉以前度量斗升。……古尺二寸五分十分 分之三，今尺一寸八分百分 分之四十五强。”(《梦溪笔谈》卷 3,辩证一)

沈括从文献及制造天文仪器时，考订宋代通行一尺长度是秦汉以前常称周尺标准尺长度之比为2 530：1 845。考古界以王莽新朝国家标准尺作为周尺，长相当于今 23 厘米。按此比率，可推测宋一尺长 23×2 530÷1 845＝31.53 厘米，比较传今宋代文物，

沈括所说与实物很接近。

1964 年江苏省南京市孝卫街出土木尺长 31.4 厘米，1965 年湖北省武汉市十里湖出土木尺长 31.2 厘米，1973 年江苏省苏州市横塘出土木尺长 31.7 厘米。

从文献看沈括所说今尺，即布帛尺。杨宽说：

“宋代沿袭唐制，官尺由太常寺掌造。因为宋代政府所颁布的标准尺主要还是为征收布帛之用。所以有太府市布帛尺之称也，或简称布帛尺，……这尺不仅宋初应用，而且是整个宋代所颁的标准尺度。……《续文献通考》引柳贯答宋景濂书·论尺法说：“不若且从文公(朱熹)之说，周尺七十五分弱者，应有依据”……宋代布帛尺当周尺一尺三寸五分弱。宋代所谓周尺……是由丁度、高若讷根据古物(王莽时法钱)考订出来的。……宋代布帛尺既是周尺的一尺三寸五分弱，那么布帛尺当合 0.31 米。《梦溪笔谈》说，周尺和今尺的比例是一八．四五和二五．三。据此布帛尺当周尺一尺三寸七分一厘二毫，合 0.316 米，较前面推算的略长。”[①]

二 量

“予考乐律，及受诏改铸浑仪，求秦汉以前度量斗升：计六斗当今一斗七升九合……为升中方，古尺二寸五分十分分之三，今尺一寸八分百分分之四十五强。”[②] “汉人有饮酒一石不乱……然汉之一斛，亦是今之二斗七升。人之腹中，亦何容置二斗七升水耶？”[③]

据上引第一段，古升以 200 立方厘米计，宋 1 升(石)合 $200\times6\div1.79=670.39$ 立方厘米。据上引第二段则合 $200\times1\div0.27=$

① 杨宽．中国历代尺度考·论宋代尺度．北京：商务印书馆，1938

② 《梦溪笔谈》卷 3，辩证一

③ 《梦溪笔谈》卷 3，辩证一

740.74 立方厘米。

宋代量器原件至今没有发现过。从文献看，《宋史·律历志》说："太祖受禅，诏有司精考古式，作为嘉量，以颁天下。其后定西蜀，平岭南，复江表，泉、浙纳土，并、汾归命；凡四方斗斛不中式者，皆去之。"吴兆洛在《中国度量衡史》中指出："所谓精考古式，当系唐代嘉量。"也就是说，宋承唐制，一升容 600 立方厘米，那么沈括所记偏大。这与文献[①] 说："嘉定九年(1216年)安徽宁国府造文思斛(容 5 斗)：径一尺、深一尺二寸八分"折合 1 升容积为

$$\frac{\pi}{4}10^2\times12.8\times3.1^3\div50=598.98(\text{立方厘米})$$

与吴说一致。

如果按照杨辉《续古摘奇算法》卷上的有关论述，南宋每升容约 673 立方厘米，则与北宋沈括所记又很合拍。

三　衡

沈括在《梦溪笔谈》卷 3，辩证一有五处论北宋衡制"予考乐律，……秤三斤当今十三两。""汉人有饮酒一石不乱，……，石乃钧石之石[②]，百二十斤。以今秤计之，当三十二斤。""挽蹶[③] 弓弩，古人以钧石率之。今人乃以粳米一斛之重为一石。凡石者，以九十二斤半为法，乃汉秤三百四十一斤也。今之武卒蹶弩，有及九石者，计其力，乃古之二十五石"。"弓有挽三石者，乃古之三十四钧。"

---

① 古代衡制：石、钧、斤、两、铢，1 石=4 钧，1 钧=30 斤，1 斤=16 两，1 两=24 铢。

② 古代衡制：石、钧、斤、两、铢，1 石=4 钧，1 钧=30 斤，1 斤=16 两，1 两=24 铢。

③ 用臂开弓为挽，用脚蹬开弩为蹶。

按古(以王莽新朝标准)1斤以250克推算，上引前三处依次、宋1斤、折合公制：

$$250\times3\div13\times16=923.08,$$

$$250\times120\div32=937.50,$$

$$250\times341\div92=926.63。$$

约为930克。宋代衡器原件仅在1975年发现嘉祐(1056～1063)铜则(重百斤)，折合宋1斤重640克[1]，嘉祐适与沈括生活年代相同，二者差距如此之大，有待深考。

第四节 算 术

"算术多门，如求一、上驱、搭因、重因之类，皆不离乘除，唯增减一法稍异，其术都不用乘除，但补亏就盈而已。假如欲九除者，增一便是；八除者，增二便是。但一位一因之，若位数少，则颇简便；位数多，则愈繁，不若乘除之有常。然算术不患多学，见简即用，见繁即变，不胶一法，乃为通术也。"(《梦溪笔谈》卷18,技艺)

本条沈括总结筹算的速算法，其中"然算术不患多学，见简即用，见繁即变(变换)，不胶(拘泥)一法，乃为通术也"至今犹有教益。

求一

在乘除法中，当被乘数首位是1，就可以用做一次加法来代替用几位乘法，例如$174\times98=9\ 800+74\times98$。而首位不是1时，视具体情况，用折半、加倍的方法化为首位是1。所以称为"求一"。例如$274\times52=137\times104=10\ 400+37\times104=10\ 400+3\ 700+37\times4$。但要视情况灵活运用："位数多，则愈繁，不若乘除之有

---

① 据国家计量总局《中国古代度量衡图集》，1984

常。”南宋杨辉在《乘除通变算法》设专章讨论求一乘和求一除。

上驱

在乘除法中遇到乘数(除数)的个位数是1的简便运算。例如43×91＝43×90＋43。如果个位数不是1，也可以用加倍、折半等办法化为1。

重因、搭因

在卷二论述筹算乘法和除法，对于多位数乘除法都得排列上中下三行。搭(拼搭,重叠)与重为同义字，因即乘，今称多项式因式分解，即分解分项式为几个式子的乘积。重因是指把多位数的乘积化为多位数与几个个位数的连乘积，使每次直接做几次单项连乘积，以简便运算。例如87×35＝87×7×5。

第五节　几　何

一　会　圆　术

“履田之法，方圆曲直尽矣，未有会圆之术。凡圆田既能拆之，须使会之复圆。古法惟以中破圆法拆之。其失有及三倍者。予别为拆会之术：置圆田径[①]，半之以为法，又以半径减去所割数。余者为股。各自乘，以股除弦，余者开方除，为勾，倍之为割田之直径。[②]以所割之数自乘，退一位倍之，又以圆径除所得，加入直径，为割田之弧。再割亦如之，减去已割之弧，则再割之弧也。”(《梦溪笔谈》卷18,技艺)

这是沈括从弓形弦长(a)、矢高(b)、圆直径(d)求弓形弧长(c)的近似公式。会田术分二步：(如图2.3.9)

---

① 今称直径。

② 今之弓形弦。

① 弓形弦长 $a=2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}-b\right)^2}$；

② 弓形弧长 $c=\frac{2b^2}{d}+a$。

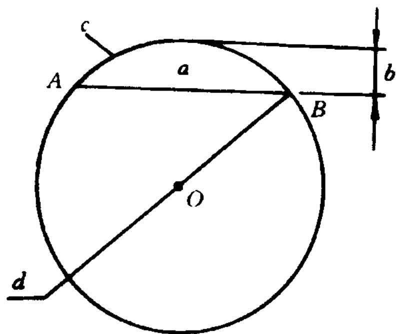


图 2.3.9

这一近似公式推导思想可以考虑沈括是按照《九章算术·方田》圆田术所说："半周半径相乘得积步。"对于扇形也作如此计算，那么扇形面积$=\frac{c}{2}\cdot\frac{d}{2}$，而弓形面积为

③ 弓形面积$=\frac{c}{2}\cdot\frac{d}{2}-S(OAB)=\frac{cd}{4}-\frac{1}{2}a\left(\frac{d}{2}-b\right)$。

又从《九章算术·方田》弧田术知

④ 弓形面积$=\frac{1}{2}(ab+b^2)$。

从③，④两式可以变换为沈括会田术公式②。这是金元数学家常用如积相消的运算手段。

元代郭守敬创《授时历》时，运用上述公式①②，进一步推导：已知弧长 c、直径，求相应的矢高，得解四次方程

⑤ $b^4+\left(d^2-\frac{cd}{2}\right)b^2-d^3b+\left(\frac{c}{4}\right)^2d^2=0$，

称之为弧矢割圆术。[①]

二　隙　积　术

"隙积者，谓积之有隙者，如累棋、层坛及酒家积罂之类。虽似复斗，四面皆杀，缘有刻缺及虚隙之处，用刍童法求之，常失于数少。予思而得之，用刍童法为上位，下位别列。下广以上广减之，余者以高乘之，六而一，并入上位。""刍童求见实方之积，隙积求见合角不尽，益出羡积也。"(《梦溪笔谈》卷 18，技艺)

这里沈括以叠棋、垒酒坛定义垛积(弹积，pllt)，今称高阶等差数列求和，此为二阶等差数列求和问题。

这里沈括形象地把垛看成是实体中之有空隙者，即把垛看成是离散量。因此按照实体(无空隙)连续量来计算，结果失之于少。沈括认为求隙积，即垛积，应在实体体积公式外添加附项，以堆成刍童形状的累棋，酒坛之类的隙积为例，如其上底为 $a\times b$ 个，下底为 $c\times d$ 个，共 h 层，按刍童公式算(图 2.3.10)

$$\frac{h}{6}((2a+c)b+(2c+a)d)\text{ (作为上位)}$$

之外，还应添加$\frac{1}{6}(d-b)$。(作为下位)

这是二阶等差数列

$ab,\ (a+1)(b+1),(a+2)(b+2),\cdots,(a+h-1)(b+h-1)=cd$

求和问题。他给出的求和公式是准确的，在文末，他还精辟地讲明公式的来源。现试作解释：把上底面 $a\times b$，下底面 $c\times d$，高 h 个长度单位的单位立方体堆成的垛(每一单位立方体表示一个罂)，沿着上底面$(a-1)\times(b-1)$，下底面 $c\times d$ 的边，构成四个斜平面，把原体剖分为(图 2.3.10)。

---

① 参见本《大系》第六卷第三编第三章。

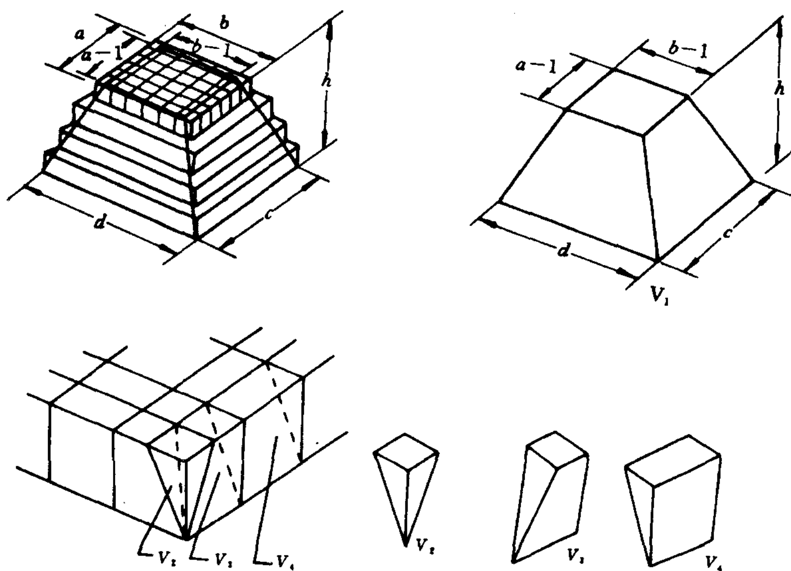


图 2.3.10

①刍童，含单位立方体个数：

$$V_1=\frac{h}{6}((2(a-1)+c)(b-1)+(2c+(a-1))d)。$$

②阳马，每个体积为$\frac{1}{12}$，共 $4h$ 个，含单位立方体个数：$V_2=\frac{h}{3}$。

③羡[①] 除，每个体积为$\frac{1}{6}$，共 $8h$ 个，含 $V_3=\frac{4}{3}h$ 个。

④堑堵，每个体积为$\frac{1}{4}$，左右侧共有$(a+c-4)h$ 个，前后侧

① “羡”，多余的意思，“益”可以作溢讲。“合角”是指角上的立体 V_2，V_3，V_4 的总和。

共有$(b+d-4)h$个，含体积个数为$V_4=\frac{h}{4}(a+b+c+d-8)$，即单位立方体个数。四种立体体积总和与沈括论说正同。在文末所说："刍童求见实方之积"指刍童实体体积V_1。

第六节　组合数学

组合数学是数学一个分支，它是研究"安排"的学科。对已给事物按一定规则安排，产生以下四方面问题：①符合要求的安排是否存在？(存在性)②这些安排有多少种？(计数)③怎样安排？(构造)④什么是最佳安排？(优化)这是运筹学研究的课题。沈括虽生活在11世纪，他善于观察、慎思明辨，除第①项存在性以外，其他各项俱有著录。组合数学是20世纪二战前后逐渐形成、发展起来的新兴学科，沈括却先声夺人，在900年前作出精辟见解令人惊叹。我们选录数则赏析。

一　计　数

"小说：唐僧一行曾算棋局都数，凡若干局尽之。余尝思之，此固易耳，但数多，非世间名数可能言之。今略举大数：凡方二路，用四子，可变八十一局；方三路，用九子，可变一万九千六百八十三局；方四路，用十六子，可变四千三百四万六千七百二十一局；方五路，用二十五子，可变八千四百七十二亿八千八百六十万九千四百四十三局；方六路，用三十六子，可变十五兆九十四万六千三百五十二亿八千二百三万一千九百二十六局；方七路以上，数多，无名可记。尽三百六十一路，大约连书万字五十二，即是局之大数。""其法：初一路可变三局，自后不以横直，但增一子，即三因之。凡三百六十一增，皆三因之，即是都局数。"

"又法：先计循边一行为法，凡加一行，即以法累乘之，乘终

十九行，亦得上数。”

“又法：以自法相乘，下位副置之，以下乘上。又以下乘下，置为上位；又副置之，以下乘上，以下乘下。加一法，亦得上数。有数法可求，唯此法最径捷。千变万化不出此数，棋之局尽矣”。①（沈括《梦溪笔谈》卷18，技艺）

本文第一段沈括记唐代一行和尚的故事，他曾计算棋局都数。沈括也曾考虑：问题并不难，只是所求局数过于庞大，没有现成的大数单位可以表述。第一段记录他的计算结果，相当于说：

纵线	横线	格点	棋局都数	
			幂	数
2	2	4	3^4	81
3	3	9	3^9	19 683
4	4	16	3^{16}	43 046 721
5	5	25	3^{25}	847 288 609 443
6	6	36	3^{36}	150 094 635 282 031 926
7	7	49	3^{49}	
⋮	⋮	⋮		数多，无名可记。
19	19	361	3^{361}	大约$(10\ 000)^{52}$

第二段是说每一格点有3种情况，不论纵横每增一格点，棋局变化情况扩大3倍。直至19×19共361个格点，361次重复排列数为3^{361}。

① 沈括文中所说棋指围棋。围棋盘上纵横直角相交各19线，19×19共361个交（格）点。棋子黑白二色。棋子下在纵横两线相交的格点上。赛棋时，每一格点或下黑子，或下白子，或空档，共有三种情况。棋局，指这361个格子不同变化。棋局都数，指这361个格点所有不同变化总数。引文据《宋元数学史论文集》p. 266，钱宝琮校释。

第三段是说先计算靠边19次重复排列数。沈括在自注中说这是 $f=3^{19}=1\ 162\ 261\ 467$。本段所说："以法累乘之，乘终十九行，即是都局数"，这里的法就是 f，棋局都数就是 $f^{19}=(3^{19})^{19}$。

第四段是说以 $f=3^{19}$ 为基数，据指数律作幂积运算，其含义如下表：

运算	法	以自位相乘，下位副置之	以下乘上	又以下乘下	以下乘上	以下乘下	加一位，亦得上数
上位	f			$f^3\cdot f^3=f^6$			
下位		f^2	$f^2\cdot f=f^3$		$f^3\cdot f^6=f^9$	$f^9\cdot f^9=f^{18}$	$f^{18}\cdot f=f^{19}$

评说　沈括生活在北宋时代，在这篇文章中他正确运用了重复排列公式。他的计算方法合乎今日组合数学计算原理，运用指数律以简化运算。由于计算工具(用算筹)原因，计算结果多处有误，现改正如下：

$3^{36}=150\ 094\ 635\ 282\ 031\ 926$误，应是

$150\ 094\ 635\ 296\ 999\ 121$。

$3^{361}\approx(10\ 000)^{52}$误①，应约是$(10\ 000)^{43}$，

用电子计算机算出精确数为：

$$3^{361}=17\ 408\ 965\ 065\ 903\ 192\ 790\ 718\ 823\ 807\ 056\ 436\ 974\ 660\ 272\ 495\ 626\ 354\ 119\ 482\ 811\ 870\ 680\ 105\ 167\ 618\ 464\ 984\ 116\ 279\ 288\ 988\ 714\ 938\ 612\ 096\ 988\ 816\ 320\ 780\ 613\ 754\ 987\ 181\ 355\ 091\ 329\ 514\ 803\ 369\ 660\ 572\ 893\ 075\ 468\ 180\ 597\ 603$$。

① 传本《梦溪笔谈》说："连书万字五十二"。

此外文章中说："方七路以上，数多，无名可记。"也不符历史事实。按甄鸾《数术记遗》中大数读法中规定：亿(10^8)，兆(10^{16})，垓(10^{24})，那么 $N=3^{49}$，$\lg N=49\lg 3=23.378\ 941$，因此 $N\approx 2.392\ 992\times 10^{23}$。此数可读为2 392万9 920兆。并非无名可记。如用大数读法，即使 3^{361}也可读出。

二　构　造

"十神太一……京师东西太一宫，正殿祠五福，而太一乃在廊庑，甚为失序。熙宁中，……下太史考定神位。予时领太史，预其议论。今前殿祠五福，而太一别为后殿，各全其尊，深为得礼。"(《梦溪笔谈》卷 3，辩证一)

沈括在本条所论太一，为神名。清学者顾炎武《日知录·卷34·太一》说："太一之名，不知始于何时。《史记·天官书》：'中宫天极星，其一明者为太一所居，'……此太一之祠所自起。《易·乾凿度》曰：'太一，取其数以行九宫。'"顾炎武自注："河图之数，戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足，五居中央，纵横十五，故曰太一。"因此沈括所论太一，为三阶幻方，属于组合数学研究课题。[①]

三　优　化

1. 运粮之法

"凡师行，因粮于敌，最为急务。运粮不但多费，而势难行远。予尝计之：人负米六斗，卒自携五日干粮，人饷一卒，一去可十八日。二人饷一卒，一去可二十六日。三人饷一卒，一去可三十一日。三人饷一卒，极矣。若兴师十万，辎重三之一，止得驻战之卒七万人，已用三十万人运粮，此外难复加矣。"(《梦溪笔谈》

① 参见本卷第六编。

卷 11，官政一）

沈括在指挥作战实践中作出因粮于敌的决策。他以令人信服的数据论证：依靠自带粮食作远行征战，是不可能的。在这篇论题的自注中说：每人每日食米 2 升。在二民工携粮供应一士兵情况下，出发后八日，“三人行”已吃去粮食不少，应给 6 日粮遣返一民工。在三民工一士兵情况下，出发后 $6\frac{1}{2}$ 日，应给 4 日粮，遣返一民工。出发后 17 日应给 9 日粮，遣返另一民工。沈括这种见解也深合运筹学根本要求。当然这只限于单纯依靠人力运粮条件下所作出的决策。

2. 五等收粮

“每岁发运司和籴米于郡县，未知价之高下，须先具价申禀，然后视其贵贱。贵则寡（少）取，贱则取盈（多）。尽得郡县之价，方能契数行下。比至则粟价已增，所以常得贵售。[刘] 晏法，则令多粟通途郡县，以数十岁籴价，与所籴粟数高下，各为五等，具籍于主者。粟价才定，更不申禀，即时廪收。但第一价则籴第五数，第五价则籴第一数，第二价则籴第四数，第四价则籴第二数。乃即驰递报发运司。如此粟贱之地，自籴尽极数，其余节级各得其宜，已无枉售。发运司仍会诸郡所籴之数计之。若过于多，则损贵与远者，尚少，则增贱与近者。自此粟价未尝失时，各当本处丰俭，即日知价，信皆有术”。（《梦溪笔谈》卷 11，官政一）

这是沈括运用运筹学思想的另一例。大意是说，先前国家粮站——发运司收购粮食时，要求各郡县自报粮价，再决定收购指标。但是各地粮价收集费时，当下达收购任务，粮价已上扬，政府就得购高价粮。文中所说刘晏是唐肃宗时户部（财政部）侍郎，以理财著称。沈括在此记其收购粮食的有利策略：根据产粮多、交通又方便的郡县数十年来粮价、以及收购量、统计资料各自分五等列表（如下表）。当各地粮价确定后，各地迳自按表收购：以第

粮价自高而下分五等	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
籴数自多而少分五等	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5

一等粮价收购第五等数量，以第二等粮价收购第四等数量，……以第五等粮价收购第一等数量。最低价郡县的粮食收购量最大，其余各县收购量也比较合适。把已收购确数快速报发运司，发运司从已购总和 $Q=q_1+q_2+q_3+q_4+q_5$ 比较应购任务 A。如果 $Q>A$，收购过多，就可把粮价高或路途远处已购粮处理一部分。反之，如 $Q<A$，尚未满足任务，就在粮价低、路途近处补购达标。

“五等收粮”属于线性规划问题。收购粮食总支出：$S=p_1q_5+p_2q_4+p_3q_3+p_4q_2+p_5q_1$ 是目标函数，所制订的收购方案，应该使 S 为极小。虽然约束条件很多：各地粮价、产量、收购总任务等等。由于上表的数据是多年统计所得，所以刘晏制定的是较优的方案。

3. 一举而三役济

“祥符中，禁(皇宫)火［灾］时，丁晋公主营复宫室，患取土远。公乃令凿通衢(大街)取土，不日皆成巨堑(沟)。乃决汴水入堑中。引诸道竹木排筏及船运杂材，尽自堑中入至宫门。事毕，却以斥弃瓦砾灰壤，实于堑中，复为街衢。一举而三役济(完毕)。计省费以亿万计。”(《梦溪笔谈》补卷 2，权智)

丁晋公即丁谓，宋真宗时官员，封晋国公。按沈括所记，他是修复皇宫的主持人。这里三役(劳役、工程)有三：①取建筑用土，②运输建筑材料，③处理建筑垃圾。如把这个问题按照规划论、图上作业法的要求来考虑，单从运输费用来说也是最佳方案。图 2.3.11，P 为皇宫所在地，A，B，C 分别是取土、堆放建筑材料、运输码头。如三者运输费(单位路程值)分别为 q_1，q_2，q_3，则运输总费用为：

$$S=q_1\cdot PA+q_2\cdot PB+q_3\cdot PC。$$

在丁谓的规划中：(i)取土于街衢；(ii)引汴水入巨堑，相当于码头就设在施工工地一侧；(iii)瓦砾实于堑中。几乎使 $PA=PB=PC=0$，运输费用是最节约不过的了，真是一举三得。何况大量其他施工中的麻烦问题都被略去。所以沈括结论说："计省费以亿万计"，是很恰当的说法。

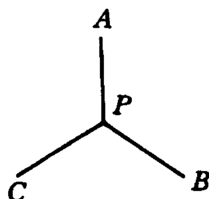


图 2.3.11

4. 四人围棋

"四人分曹共围棋者，有术可令必胜：以我曹不能者，立于彼曹能者之上。令但求急，先攻其必应，则彼曹能者为其所制，不暇恤局，则常以我曹能者当彼不能者。此虞卿斗马术也。"(《梦溪笔谈》卷 18，技艺)

曹，义：方。本条是说在四人参赛分成两方来下一局围棋时，有一种出赛对策可以保证我方取胜。让我方棋艺较弱者在对方较强者之前出子，指令他只管全力进攻，先攻对方所必须救应的地方，使对方较强参赛者被他牵制，再无精力顾及全局。再让我方较强参赛者对付对方较弱者。末尾所说虞卿(战国游说者，曾仕赵国)斗马术，很可能是指田忌赛马故事。据《史记·孙子吴起列传》记载：齐国大将田忌与齐王赛马，孙膑向田忌献策，将好马对齐王中马，中马对齐王劣马，劣马对齐王好马。田忌按策参赛，结果以二比一获胜。

本例说明沈括从所有可供选择的参赛方案中选取了最优对策。

5. 比玉玉带

"丁晋公从车驾巡幸礼成。有诏赐辅臣玉带，时辅臣八人，行在[1] 祇候库止有七带。尚衣有带，谓之比玉，价值数百万。上欲以赐辅臣，以足其数。晋公心欲之，而位在七人之下，度必不必己。乃谕有司不须发尚衣带，且可服之以谢，候还京师别赐可也。有司具以此闻。既各受赐，而晋公一带，仅如指宽。上顾谓近侍曰：丁谓带与同列大殊，速求一带易之。有司奏：唯有尚衣御带，遂以赐之。"(《梦溪笔谈》卷22，谬误、谲诡附)

本条大意是说：宋真宗在外地视察时，要赏赐八位大臣每人一条玉带，而驻地仓库仅七条，另有一条价值数百万的比玉玉带也准备放入，凑足八条。丁谓是八臣之一，很想能得到比玉，但官阶最低，不可能到手。他就出计谋：对主持发带人说，比玉带暂不要发，丁谓自己有带，回京后补赐就是了。七带分完后，皇帝见丁谓佩的带很寒酸(仅一指宽)，对近侍说，快给他一根带调换。主持人说，现仅剩比玉带了。丁谓终于达到目的。

本条说明作出适当安排(对策)可以从劣势转化为优势，转败为胜。具有多人对策思想。

第七节 艺用数学

一 透视学

"画……马不画毛，予尝以问画工。工言：'马毛细不可画'。予难之曰：'鼠毛更细，何故却画？'工不能对。大凡画马，其大不过盈尺，此乃以大为小，所以毛细而不可画。鼠乃如其大，自

---

[1] 皇帝在外地巡视时居住地。

当画毛。”“李成[①] 画山上亭馆及楼塔之类，皆仰画飞檐。其说以为自下望上，如人平地望塔檐间，见其榱桷[②]。此论非也。大都山水之法，盖以大观小，如人观假山耳。若同真山之法，以下望上，只合见一重山，岂可重重悉见！兼不应见其溪谷间事。又如屋舍，亦不应见其中庭园及后巷中事。若人在东立，则山西便合是远景；人在西立，则山东却合是远境。似此如何成画？李君盖不知以大观小之法。其间折高折远，自有妙理，岂在掀屋角也。”(《梦溪笔谈》卷 17，书画)

《梦溪笔谈》设专卷论书画，语都精辟。本条与透视画密切相关，定性地描述有关理论。上引第一段论述实物有大小时，在同大画面上，大者变形缩小率超过后者，因此马毛不显，画中应略去，而鼠毛应呈现。第二段是说，透视画视点与画面的位置关系影响画幅内容。中国山水画视点都设在无穷远处，所以沈括说：“大都山水之法，盖以大观小，如人观假山耳。”文中还批判同一画面出现两个视点的谬误。文末所指出“折高折远，自有妙理。”是说实物尺寸与透视画对应线段间的叉比关系。这在 16 世纪欧洲出现透视变换(画法几何)后才总结为定量关系。

清初年希尧著《视学》[③] 系统论述透视画的各种定性关系。在他的这一专著再版序文中，以沈括所论告诫作画时确定视点关系的关键意义：“古人论给事者有矣。曰‘仰画飞檐’，又曰‘得见溪谷中事’，则其目力已上、下无定所矣，乌足以语学耶？”

二　音　乐

“律有实积之数，有长短之数，有周径之数，有清浊之数。所

① 李成，字咸熙，唐室后裔，北宋画家。

② 榱桷，指屋檐下的椽子。

③ 参见本《大系》第七卷第四编第二章。

谓实积之数者，黄钟管长九寸，径九分，以黍实其中，其积九九八十一，此实积之数也。林钟长六寸，径九分，六九五十四，余律准此。所谓长短之数者，黄钟九寸，三分损一，下生林钟，长六寸；林钟三分益一，上生太蔟，长八寸，此长短之数也，余律准此。”(《梦溪笔谈》补卷 2,象数)

“《史记·律书》所论二十八舍、十二律，多皆臆配，殊无义理。至于言数，亦多差舛。”“又云：‘黄钟长八寸七分一，大吕长七寸五分三分一，太蔟长七寸七分二，夹钟长六寸二分三分一，姑洗长六寸七分四，仲吕长五寸九分三分二，蕤宾长五寸六分二分一，林钟长五寸七分四，夷则长五寸四分三分二，南吕长四寸七分八，无射长四寸四分三分二，应钟长四寸二分三分二。’此尤误也。此亦实积耳，非律之长也。盖其间字又有误者。疑后人传写之失也。余分下分母，凡七字皆当作十字，误屈其中划耳。(黄钟当作八寸十分一，太蔟当作七寸十分二，姑洗当作六寸十分四，林钟当作五寸十分四，南吕当作四寸十分八。凡言七分者，皆是十分。)”(《梦溪笔谈》卷 8,象数)

《梦溪笔谈》论音乐条目多达 46 条，主要集中在卷 5、卷 8 和补卷 2。我们于此只选与计算有关的二条。我国音乐发展源远流长，最古传世乐器出土于沈括故乡——浙江省七千年前河姆渡遗址的骨笛。我国自古以来以乐管——黄钟作为乐器原器，何谓黄钟？相传黄帝治五气，设五量。《吕氏春秋》：“黄帝使伶伦取竹于昆仑之嶰谷，以造黄钟之律，更据以作权衡度量”，其长度单位用一黍的纵度为标准叫做一分，九分叫做一寸，九寸或八十一分，叫做一尺，名古律尺，又名纵黍尺[1]。沈括论标准乐管黄钟长所说“长九寸、径九分，以黍实其中，其积九九八十一，此实积之数也”本于此。在卷 8 中，他通过计算订正《史记·律书》传抄之

① 林光澂等，中国度量衡，商务印书馆，1957

误。“黄钟长八寸七分一当作八寸十分一”(81 分)，这是由于黄帝古制取九分为一寸，因此 $9\times9=81$ 分，八寸十分一。[①] 同样林钟长六寸所实的黍应是 $6\times9=54$ 分，五寸十分四。沈括认为这是以实积(体积)定义律管的结果。由于传抄有误，他对数据作了订正。另外他又介绍以长度定义律管的方法——史称三分损益法。文中介绍了十二律，以管长长短为序，它们依次是：黄钟、大吕、太蔟、夹钟、姑洗、仲吕、蕤宾、林钟、夷则、南吕、无射、应钟。我们假设黄钟律管长是 9，按照文中所比喻的损(减去三分之一)益(增加三分之一)的说法其全过程运算就是

损：$9\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=9\times\frac{2}{3}=6$(林钟)

益：$6\times\left(1+\frac{1}{3}\right)=6\times\frac{4}{3}=8$(太蔟)

损：$8\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=8\times\frac{2}{3}=5.333\,3$(南吕)

益：$9\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^2=7.111\,1$(姑洗)

损：$9\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{4}{3}\right)^2=4.740\,7$(应钟)

益：$9\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{4}{3}\right)^3=6.321\,0$(蕤宾)

益：$9\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{4}{3}\right)^4=8.427\,9$(大吕)

损：$9\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{4}{3}\right)^4=5.618\,7$(夷则)

益：$9\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{4}{3}\right)^5=7.745\,8$(夹钟)

损：$9\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{4}{3}\right)^5=4.994\,3$(无射)

① 这就是黄帝时 9 寸折合司马迁时代的 8 寸 1 分。

益：$9\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{4}{3}\right)^6=6.6592$(仲吕)

如果我们把这十二个数，按从大到小次序排成一个数列$\{a_n\}$，$n=1, 2, \cdots, 12$，它近似于几何数列。记此数列首项$a_1=1$，末项$a_{13}=0.5=r^{12}$，r为公比。那么易于求得$r=0.94387974$。现列表对照《史记》所论实积之数，沈括所论长短之数，十二音律乐管相对长度，以及西方乐律波长对应相对长度①：

序号	a_n	律名	《史记》		沈括		西方乐律	
			管长（寸）	相对长度	管长（寸）	相对长度	调名	相对波长
1	1	黄钟	8.10	1	9.000 0	1	C	1
2	0.943 9	大吕	7.53	0.929 6	8.427 9	0.936 4	^bD	
3	0.890 9	太蔟	7.20	0.888 9	8.000 0	0.888 8	D	0.889
4	0.840 9	夹钟	6.23	0.830 8	7.745 8	0.860 4	^bE	
5	0.793 7	姑洗	6.40	0.790 1	7.111 1	0.790 1	E	0.800
6	0.749 2	仲吕	5.97	0.737 0	6.659 1	0.739 9	F	0.750
7	0.707 1	蕤宾	5.65	0.697 5	6.321 0	0.702 3	$^\#F$	
8	0.667 4	林钟	5.80	0.716 0	6.000 0	0.666 7	G	0.667
9	0.630 0	夷则	5.47	0.675 3	5.618 7	0.624 3	^bA	
10	0.594 6	南吕	4.80	0.592 6	5.333 3	0.592 6	A	0.600
11	0.561 3	无射	4.47	0.551 8	4.994 3	0.554 9	^bB	
12	0.529 8	应钟	4.27	0.527 2	4.740 7	0.526 7	B	0.533

从表可以看到沈括所指出的三分损益法是比较合理的音阶划分。《史记》的十二律经沈括修正后，标准律管长度比就很接近等比数列$\{a_n\}$。

① 《梦溪笔谈》译注，合肥：安徽科学技术出版社，1979：130～138

第四章　北宋数学的成就及影响

北宋数学的成就我们已在前三章从传世极少的文献中介绍其最重要的成果，其中不乏是稀世之珍，是后世形成参天乔木的种子，影响深远。

第一节　北宋数学居世界数学发展史上领先地位及对后世的影响

一　二项式展开系数三角形

东西方数学家对二项式展开系数表，或称系数三角形都有兴趣，俱有著录。这是因为它是开方的必要工具。论其产生年代都在我国贾宪“开方作法本源图”之后好几百年，例如中亚细亚阿拉伯学者阿尔·喀西(Al－Kashi,？～1429)，他在《算术之钥》(1427 年)有表，$n=9$(图 2.4.1)。西方国家称这种数表为帕斯卡(B. Pascal,1623～1662)三角形，因为他在 1654 年发表论文“论算术三角形”，其中有附图，$n=9$(图 2.4.2)在论文中这种系数表有好几张，而且运用数学归纳法论证其一般规律。其实欧洲较帕斯卡更早文献颇不菲，例如阿庇亚拿(P. Apianus,1495～1552,德国)所著《实用算术》(1527 年)封面上有此表，(图 2.4.3,$n=8$)。

9							
36	8						
84	28	7					
126	56	21	6				
126	70	35	15	5			
84	56	35	20	10	4		
36	28	21	15	10	6	3	
9	8	7	6	5	4	3	2

图 2.4.1

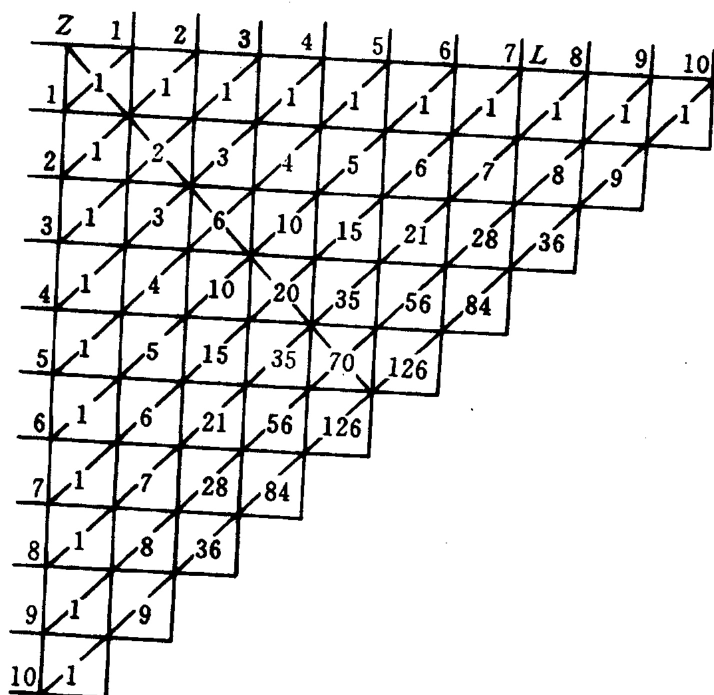

Z
L
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
1
3
6
10
15
21
28
36
1
4
10
20
35
56
84
1
5
15
35
70
126
1
6
21
56
126
1
7
28
84
1
8
36
1
9
1

图 2.4.2



Eyn Newe
Unnd wolgegründte
underweysung aller Kauffmanß Rech-
nung in dreyen Büchern/mit schönen Re
geln vñ fragstucken begriffen. Sunder-
lich was fortl unnd behendigkait in der
Welschẽ Practica vñ Tolletn gebraucht
wirdt/ des gleychen fürmalß weder in
Teütscher noch in Welscher sprach nie
gedrückt. durch Petrum Apianũ
von Leyßnick/ d Astronomei
zu Ingolstat Ordina-
riũ/ verfertiget.

o. TITLE PAGE OF THE FIRST EDITION OF APIANUS

图 2.4.3

贾宪是11世纪时人，其首创开方作法本源图早于欧洲最早文献2个世纪，早于帕斯卡6个世纪。

二　列四次方程

在本《大系》第二卷已指出《九章算术·勾股》第20题从测量需要已能列出数字系数二次方程。王孝通《缉古算经》又从水利工程中分配堤段长度列出了数字系数三次方程。这是人类历史上首次出现的盛事。从本编第二章可以看到刘益在《议古根源》从划分田亩几何问题列出了带负系数的四次方程，这也是数学史上的首例。

对照史称公元前二千年的古埃及《莱因得纸草》第28题，如写成现代表达式当是

$$x\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+1\right)=37。$$

希腊亚历山大代数学鼻祖刁番都(Diophantus(公元3世纪))未见有从实际问题列出方程的记录。中世纪阿拉伯数学家花拉子米在他的《代数学》中可以找到从设未知数 x，从平面几何问题列出了数字方程，它们是 $x^2+10x=39$，$x^2+21=10x$，$x^2=3x+4$。[①] 对于各种情况的二次方程都已涉及。直至16世纪，欧洲卡尔达诺才于牵涉体积问题中列出数字系数三次方程 $x^3+6x=20$[②]。也在16世纪，意大利 J. Colla 从问题“把10分成三部分，使成连比例，又已知三项中，前面二项乘积是6。”费拉里(L. Ferrari，1522～1565)借以列出四次方程 $x^4+6x^2+36=60x$[③]，但已在刘益之后五百年。

---

① Al－Khowarizmi. Algebra. F. Rose 英文译本. London，1831：15～21

②③ D. J. Struik. A Source book in Mathematics 1200～1800. Harvard University Press，1969：62～72

三 数值解多项式方程

除了借助于求根公式之外，解方程的另一途径是数值解：对方程不断作减根运算，以获得所求根各数位上的数字。事实上，求根公式对多项式方程来说是有局限的——仅至四次为止，而且求根公式只在理论上正确，对于高次方程求根手续非常繁琐。从计算方法考虑，数值解方程自有其优点及其不可取代的实用意义。

从前面第一、二两章已揭示北宋时贾宪和刘益在数值解方程上已迈出了可贵的第一步。从估根、减根到扩(缩)根步骤井然有序。而且刘益在《议古根源》一书中所讨论的方程已出现负系数，以第18题说是四次方程，按照贾宪和刘益所指出的解方程步骤，按部就班，最终得到所求的根。

在外国，最早数值解方程的文献应数阿拉伯数学家阿尔·喀西《算术之钥》(1427年)。欧洲学者意大利鲁菲尼(P. Ruffini，1765～1822)，英国霍纳(W. G. Horner，1789～1837)也分别发表论文论数值解高次方程。他们的工作都远在贾宪、刘益类似成果之后。经南宋秦九韶的进一步研究，这种算法益加成熟，其重要历史意义将在本卷第五编第一章全面论述。

四 组合数学

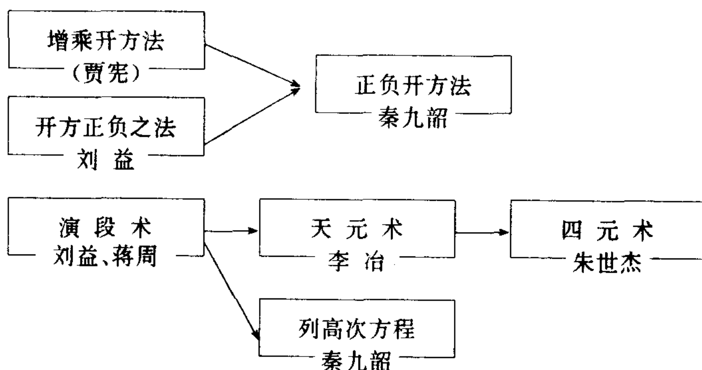
组合数学作为专门学科是在第二次大战时孕育形成的。我们在第三章所引沈括在《梦溪笔谈》所载朴素组合数学例证，在计数、构造、优化各方面都有涉及，特别是后者各例是运筹学决策佳作。常言道："人尽其才，物尽其用"，这就是说，在实际工作中对一切可行方案中筛选出其中最优的，作出多、快、好、省的决策。运筹学英文Operation research原义是作战研究。汉语运筹一词语出《史记·高祖本纪》："夫运筹帷幄(营帐)之中，决胜于千里之外，吾不如子房。"是说汉高祖刘邦自称军事决策能力不及

张良（子房）。所引数例已成为谈运筹学历史的常引文献，其实在《梦溪笔谈》卷22，谬误（谲诈附）中还有其他佳作。沈括组合数学学说先声夺人，说中国是组合数学特别是运筹学的摇篮或诞生地，并不为过。

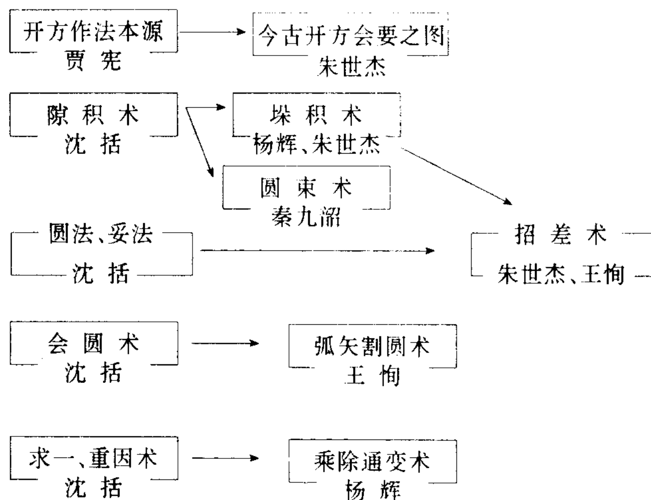
还须指出，北宋时期（960～1127）欧洲正处中世纪黑暗时代，学术沉沦。印度、阿拉伯在此期间数学发展也颇沉寂，足以称道的仅二则：980年时阿拉伯阿部尔·瓦发（Abul Wefa）制作了间隔10′的正弦表和正切表；1100年阿拉伯奥玛尔·海牙姆（Omar Khayyam）首创用圆锥曲线交点表示三次方程的根[①]，值此世界范围内数学发展低潮之际，中国奇葩齐放，弥足珍贵。

五　对南宋、金、元数学发展的影响

人们都称道秦九韶、杨辉、李冶、朱世杰是中国传统数学高峰时期四杰。事实上四杰所取得的成就是在北宋学者奠定的扎实基础上成长起来的。我们可以作出简明源流关系的表：



① 杜瑞芝等编．数学史辞典．济南：山东教育出版社，1991：622



可见秦、杨、李、朱四位的长足进步其来有自，其中细节将在后续卷、编、章节阐述，读者可揣摩体会，在此不多赘。

第二节　北宋数学研究在国外

北宋数学成就虽然很突出，应该彪炳史册，由于语言障碍，长期在数学史上默默无闻。本世纪前叶两部著名的数学通史，F. Cajori 和 D. E. Smith 的专著中俱无记载，20 世纪下半叶贾宪和沈括的工作渐为西方论著中报道和赞扬。

一　对贾宪工作的研究

李约瑟在《中国科学技术史》卷 3 中，把八国联军时流入不列颠剑桥大学图书馆的《永乐大典》卷 16344 插图作为证据，并指出："这是中国现存最古的 Pascal 三角形，这种三角形曾为贾宪(1100 年前后)所使用过。"在其巨著卷 3 数学编・二项式定理和 Pascal 三角形这一节里，对于东方和西方有关研究流程作出独到

的阐述：

“朱世杰说这个三角形是古法。这一事实说明，二项式定理最晚在12世纪初期就已为人们所知。仅有的另一个文献是1100年前后波斯(今伊朗)的奥玛海亚姆(Omar Khayyam)所说的一段话。他说，他能够用他发现的一种不依赖于几何图形的法则，求出各个数的四次、五次、六次以至更高次方根……奥玛海亚姆的工作是从印度的传统中得来的，而印度的传统本身似乎在更早的时候就受到中国开方术的影响。”

二 对沈括工作的研究

日本三上义夫(1875～1950)最先用英文介绍沈括的隙积术和会圆术[1]，并指出这一工作是从秦汉数学到南宋、金、元数学的桥梁。在《中国算学之特色·中国算学者与算学之进步》,[2]对沈括推崇备至：

中国之算学者，如沈括之多艺多能，殆不多觏……日本之算学者，实无堪与沈括相较之人物。中根元圭，医家出身，富于思考，精音乐、度量，以历术见知将军吉宗，然无沈括之经世才……若欲于他国求可敌比沈括之算学者，则德国之莱不尼兹(G. W. Leibniz)及法国革命时之卡尔诺(L. Carnot)。在某点上或可与沈括比较，然如一面远胜沈括，同时又多艺多能，则不能如沈括也。惟希腊柏拉图的挚友阿契泰斯(Archytas)其阅历最可与沈括相比。盖如沈括之人物，全世界算学史上多无之，惟中国产此人而已。”

---

① Y. Mikami. The Development Of Mathematics in China and Japan. Dresden, 1910：61～62

② 三上义夫. 中国数学的特色. 林科棠汉文译本. 北京：商务印书馆，1928：7～9

前苏联尤什凯维契(A. П. Юшкевич)院士在《数学史研究》第8辑，1955年写成长文“中国学者在数学领域中的成就”[1]，其中对沈括隙积术用公式介绍：

“我要特别指出11世纪中国学者沈括的一个问题：设有物件堆成n层的棱台，层层都是矩形，自上而下逐层的长宽各增加一个。求物件总数。”

若在最高一层有物件ab个，则问题就归结于下列数列的和

$$ab,\ (a+1)(b+1),\ \cdots,\ (a+(n-1)(b+(n-1))。$$

沈括按下面法则求和

$$S=\frac{n}{6}(a(2b+B)+A(2B+b)+(B-b)),$$

其中，$A=a+n-1$，$B=b+n-1$。

在美国，鲍德(D. Bodde)早在1942年写了一本《中国对西方的贡献》(China's Gifts to the West)，其中提到沈括的工作。

在意大利，汉学家瓦萨(G. Vacca)在本世纪早期1915年在《东方研究》(Rivista di Studi Orientali)发表“中国笔记”(Note Cinesi)五篇，其中有一篇专论棋局都数。

在英国，李约瑟是外国学者中研究《梦溪笔谈》最最深刻的。在他的巨著《中国科学技术史》中卷1总论概括《梦溪笔谈》评述，其余各卷分别安插有关内容。在对全书609个条目作认真分析后，他断言科学内容占五分之三。又作结论说：“沈括可说是中国整部科学史中最卓越的人物，沈括是中国科学史的坐标轴。”李约瑟把《梦溪笔谈》全部条目归为人事资料、自然科学、和人文科学三大类。数学作为自然科学的第二个子目，含11条。在《中国科学技术史》卷3数学中阐述其中二条——棋局都数及会圆术。

无可讳言，由于语言，环境条件的截然相异，李约瑟巨著中

---

① 赵孟养译．中国学者在数学领域中的成就．数学进展，1956(2)

对中国文化技术某些细节的理解毕竟还是有隔阂的。例如对《梦溪笔谈》弩机一条的阐述就不合适[1]。

“望山”是瞄准用表尺，并不是动作。“侧为小矩”是指望山上的刻度。“以目注镞，以望山之度拟之，准而高下”是指在瞄准时既要考虑三点成直线的几何条件，还要考虑重力场的物理条件，箭矢才能中的。李氏却英译为：On looking at the whole breadth of a mountain, the distance on the instrument was long, on looking at a small part of the mountain－side, the distance on the instrument was short.（用它来观测山的整个宽度时，弩机上的距离很长；而当你用它来观测山腰的一小部分时，弩机上的距离就很短。）又如“正用算家勾股法也”，李氏竟译为“发弩人把箭架在不同的点，并用眼对准箭镞的两端。他就可以在此弩机上测出山的度数，从而计算出山的高度。就同数学家所用相似直角三角形计算法一样。”在发弩时是如此紧迫：千钧一发，争分夺秒，发现情况，立刻出击，哪来充裕时间移动弩机的位置做二次观测的间接测量？

我们举出上述瑕疵，是供今后李氏巨著再版时修订参考。瑕不掩瑜，杰作系统阐扬华夏文明，史无前例。

令李约瑟感到遗憾和惊讶的是从未有任何一种《梦溪笔谈》的西方文字译本。

日文的《梦溪笔谈》全译本是以京都大学人文科学研究所所长薮内清为首，组织二十余人，经 15 年工作才脱稿的，天文史学者桥本敬造参加工作。日文译本列入《东洋文库》系列，分三册出版，1978 年起陆续发行，1981 年出齐。

① 沈康身. 弩机功能试释. 杭州大学学报，1978(4)

第五章 数 学 教 育

第一节 数学教育概况

中国的国家数学教育，起于隋，盛于唐，已如本书第四卷第四编所述，其余波至五代犹存。赵匡胤建立宋王朝之后，并没有较快恢复数学教育。过了一百二十多年才开始筹备这件事，但仍是办办停停，直到1126年北宋灭亡，也就自然彻底停办了。虽然如此，可是北宋的数学教育还很值得研究。

宋代数学教育之设置，大约从元丰六年(1081年)开始决定，据载“国朝(宋朝)国子监掌国子、太学、武学、律学、算学五学之政。于元丰六年奉旨施行。”[①] 第二年(1082年)正月吏部再次从另一角度提出了算学问题：“请于四选补算学博士缺，从之。”但直到当年十二月才“诏通算学就试，上等除博士，中下等为学谕。”[②] 立算学的日期有记载说是十二月七日。[③]“算学博士”是教师，所谓“立算学”就是成立像隋唐那样的算学科(那时叫明算科)，首先准备了教师。

但是，这件事的筹备并不顺利，首先是没有教学房舍，虽然已选定了一块地方：“准朝旨踏逐到武学东大街北，其地堪修算学，迄今工部下所属检计修造。”可是直到元祐元年(1086年)六月还

① [宋] 孙逢吉. 职官分纪卷二十一，四库全书珍本初集本. 1988年，中华书局影印本中无“律学”和“于元丰六年奉旨施行。”

② [宋] 王应麟. 玉海卷一一二；[宋] 李焘. 续资治通鉴长编卷三五〇。

③ [宋] 李焘. 续资治通鉴长编卷三八一小注。

“未曾兴工”；其次是没有考取到合格的教师：“其试选学官，未有应格”。国子监更指出：“切虑将来建学之后，养士设科，徒有烦费，实于国事无补”，建议停办，于是“诏罢修建”[①]。

过了八九年，到崇宁三年(1104年)又开始兴办算学，并准备招生等事宜：“算学：崇宁三年始建，生员以二百一十人为额，许命官及庶人为之。其业以《九章》、《周髀》及假设疑数为算问，仍兼《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张丘建》、《夏侯(阳)》算法并历算、三式、天文书为本科。本科外，人占一小经，愿占大经者听。公私试、三舍法略如大学。上舍三等推恩，以通仕、登仕、将仕郎为次。”[②] 这里规定了招生额数、教科书、考试方法和毕业后的出路。

实际上也只办一年多，到崇宁五年(1106年)正月，罢算学，令附于国子监。十一月，薛昂请求复算学，得到批准[③]。

大观三年(1109年)礼部太常寺“请以文宣王(孔子)为先师，兖、邹、荆三国公配享，十哲从祀。自昔著名算数者，画像两庑。请加五等爵，随所封以定其服。”由当时的中书舍人拟了一个从上古到五代的天文算学家名单，并定公、侯、伯、子、男五等爵位，其中著名天文数学家有：

公：周大夫商高郁夷公；

侯：(无)；

伯：汉耿寿昌安定伯、张衡西鄂伯，[刘] 宋何承天昌卢伯，[后] 周王朴东平伯；

子：汉刘洪蒙阴子，[刘] 宋祖冲之范阳子，隋刘焯昌亭子，唐王孝通介休子、李淳风昌乐子、边冈成安子；

---

① [宋] 李焘．续资治通鉴长编卷一三二。

② 宋史卷一五七选举志三。

③ 李俨．中算史论丛第四集．北京：科学出版社，1955：257～258

男：汉落下闳阆中男，[曹]魏刘徽淄乡男，晋张丘建信成男，夏侯阳平陆男，后周［北周］甄鸾无极男[①]。

就列位学者数学成就来说所封爵位高下虽不一定合适，但所列名单还是相当的。“寻诏以黄帝为先师”[②]，就算定案了。大约尚未动笔造像，礼部员外郎吴时表示反对，他说“书画之学，教养生徒，使知以孔子为师，此道德之所以一也。若每学建立殿宇，则配食从祀，难于其人，请春秋释奠，止令书画博士，量率职事生员，陪预执事，庶使知所宗师。医学亦准此。”“诏皆从之”[③]。给著名算学家“画像两庑”之事也便就此作罢。

大观四年(1110年)三月，“诏算学生并入太史局，学官及人吏等并罢”[④]。就是撤消了独立的算学科，把学生拨到研究天文的机构太史局，实际上是由天文官代为培养，而把原有的算学教师和其他工作人员解散。

这种做法，有些学生、教师并不甘心，三年后的政和二年(1112年)前算学内舍算学生武仲宣曾“三上封章，乞留算学”，第二年三月又由大司成(即国子祭酒)刘嗣明据此上奏，请求复置算学。并说“本监(国子监)申伏覩旧算学见今空闲，舍屋具存，别无官司拘占相度，欲乞依旧为算学”，接着又提出请求按以前所制国子监算学条令，“乞下诸路提举学事司行下诸州、县等”，都得到批准[⑤]。

这次恢复算学时间较长，持续存在到宣和二年(1120年)六

---

① 宋史卷一〇五礼志八。

② 宋史卷一〇五礼志八。

③ 宋史卷一〇五礼志八。

④ 宋会要卷一三二(转引自李俨.中算史论丛第四集，北京：科学出版社，1955，263～266)。

⑤ 宋会要卷一三二(转引自李俨.中算史论丛第四集，北京：科学出版社，1955，263～266)。

月，七月罢医算学[①]。关于罢算学的原因，是这样：宣和二年七月二十一日诏："算学元丰中虽有司之请，未尝兴建，又所议置官，不过传授二员。今张官置吏，考选而仕使之，大略与两学同。既失先帝本旨，赐茅之后，不复责以所学，何取于教养？可并罢官吏。"[②]

这时离北宋灭亡只有六七年，国家的算学教育工作也就自然随之完全停止。

纵观北宋的数学教育，从元丰七年起到宣和二年止，前后时断时续 37 年，起落无常。如上所述，最后废黜的主要原因是效果不好，实际上再深究一下，可知根源是办学目标不明确，以下我们将看到：毕业生可得低级小官吏，和算学无关，也就是说学而无用。因此，无论上至最高统治者皇帝，下至官吏庶民对这种教育显然都不会有多大兴趣，尽管不断有人提倡，还是办不下去。

第二节　数学教育的重大事项

北宋的数学教育，尽管效果不佳，可是却做了几件十分有价值的事，现分述于后。

一　制订《算学令》

北宋算学令最初制订于元丰七年，崇宁三年"遂将元丰算学条制修成敕令"[③]。实际是到崇宁六年(1107 年)十一月才真正修改完成。这份文件保存到现在，全文如下：

---

① 宋会要卷一三二(转引自李俨.中算史论丛第四集，北京：科学出版社，1955，267)。

② 宋会要卷一三二(转引自李俨.中算史论丛第四集，北京：科学出版社，1955，267)。

③ 宋会要卷一六四职官四。

崇宁国子监算学令：

诸学生习《九章》、《周髀》义及算问(谓假设疑数)[1]，兼通《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张丘建》、《夏侯阳》算法并历算、三式、天文书。

诸试以通粗并计两粗当一通算义，算例以所对优长，通及三分以上为合格；历算即算前一季五星昏晓宿度或日月交食，仍算定时刻早晚及所食分数；三式即射覆及预占三日阴阳风雨；天文即预定一月或一季分野、灾祥。并以经备草，合问为通。

崇宁国子监算学格：

官属

博士四员(内二员分讲《九章》、《周髀》;二员分习历算、三式、天文)；

学正(举行学规)一员。

职事人

学录(佐学正纠不如规者)一人；

学谕(以所习业传谕诸生)一人；

司计(掌饮食支用)一人；

直学(掌文籍及谨学生出入)二人；

司书(掌书籍)一人；

斋长(纠斋中不如规者)，斋谕(掌佐斋长道谕诸生)，斋各一人。

学生

上舍三十人；

内舍八十人；

外舍一百五十人。

---

① 圆括号内的文字为双行小字夹注，下同。

补试(命官公试同)

《九章》义三道；

算题二道。

私试(孟月)

补上内舍(第一场)

《九章》、《周髀》义三道；

算题二道。

私试［仲月］

补上内舍(第二场)

历算一道。

私试(季月)

补上内舍(第三场)

三式或天文一道。

崇宁国子监算学对修中书省格：

秋试奏到算学升补上舍等第推恩下项：

上舍上等通仕郎；

上舍中等登仕郎；

上舍下等将仕郎[①]。

政和三年，又把这个文件略加修改，“下诸路提举学事司行下诸州县等”。

文件的内容虽然很简单，但是比较全面，可以说包括了各个方面：教师(博士)和办公人员；教科书与教学内容；考试内容与方法；对上舍毕业生分等录用等。教学内容分三大类：数学义和算；天文历法；占卜。

① 南宋刊本《数术记遗》后附“算学源流”内。

二 出版教材

算学令明确提到《九章算经》、《周髀算经》、《海岛算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《张丘建算经》和《夏侯阳算经》等七种唐代用过的算经。教科书需要许多复本，在唐代未记载是怎样解决这个问题的，估计是抄写。可是到了宋代，印刷术非常发达，雕版印刷已相当普遍，因此元丰七年出版了我国首批雕版印刷的线装算书。

元丰七年刊印了几种算书，历史文献记载并不一致，经李俨研究除上面提到的七种外，还有《缉古算经》等是可考的[1]。在每部书的末尾都有负责刊印的官员名单(不是雕版工匠)，格式一样，如：

"秘书省

某某算经一部□□共□册

元丰七年九月 日校定降受宣德郎秘书省校书郎臣叶祖洽上进

校定承议郎行秘书省校书郎臣王仲修

校定朝奉郎行秘书省校书郎臣钱长卿

奉议郎守秘书丞臣韩宗古

朝请郎试秘书少监臣孙觉

降受朝散郎试秘书监臣赵彦若。"

原署名形式是每人上下一行，共八行，基本上是末一字对齐。见书影(图 2.5.1)

又据王国维研究影宋本《夏侯阳算经》后有司马光(1019～1086)等九人进呈时的署衔，题"元丰七年九月二十八日进呈奉御宝批宜依已校定镂板……正义大夫守尚书左仆射兼门下侍郎上柱

[1] 李俨. 中算史论丛第四集. 北京：科学出版社，1995. 376

秘書省
孫子筭經一部上中下共三冊
元豐七年九月　日校定降授宣德郎秘書省校書郎臣葉祖洽上進
校定承議郎行秘書省校書郎臣王仲脩
校定朝奉郎行秘書省校書郎臣錢長卿
奉議郎守秘書丞臣韓宗古
朝請郎試秘書少監臣孫覺
降授朝散郎試秘書監臣趙彥若

图 2.5.1　书影(据南宋仿元丰本)

国河内郡开国公食邑四千一百户食实封壹仟伍百户臣司马光”[①]。这些人的地位相当高。司马光去世时“赠太师、温国公，襚以一品礼服，赙银绢七千。”[②] 由此可见，当时对刊印算经之事重视到了何等程度！

这次由国家刊印算经，其贡献之大实无法估量。正是由于这次刊印，有较多的复本，使得《九章算术》等中国传统数学的代表作才能保存到今天，在清代似还有人见到元丰刊本算经。可以

① 王国维．五代两宋监本考卷中．

② 宋史卷三三六司马光传。

这样设想：如果没有元丰年刊印算经之举，现在的研究者只能像对《缀术》那样对《九章算术》望名兴叹了。难道这种贡献比写一部高水平算经的贡献小吗？

元丰年刊印算经，在当时可能未起到应起的作用。

前面提到的薛昂和武仲宣是两位重要人物。据载崇宁五年(1106年)根据薛昂的请求使停办几个月的算学科，到年底得到恢复。第二年十一月都省札子"今将元丰算学条例，重加删润，修成敕令，并对修看详一部。以崇宁国子监算学敕令格式为名，乞赐实行，从之。"[1] 这里所说的"重加删润"，应在同年底进行。是谁负责删润工作的？很可能就是薛昂，他是元丰八年(1085年)进士，十年间，他升到给事中，中书舍人，兼大司成[2]。大司成即国子祭酒，是管理朝廷整个教育的高级官员。他请求恢复算学科时的官衔为大司成，既然对算学这样热心，删润工作由他担任最合适。因此在没有其他资料能确切证明另有他人的情况下，我们暂定删润者就是薛昂。

武仲宣是迄今为止惟一留下姓名的北宋算学生，而且是内舍算学生，可能是因为他学习成绩好，即"上舍上等"，得通仕郎衔。当时各科博士大概为八品左右，通仕郎肯定低些。可是武仲宣对数学应有一定研究，他"自大观初复兴算学，后来注释考证见行算经一百八十九卷"，因此于(政和)"六年四月十九日诏通仕郎武仲宣……特与循一资。"[3]

武仲宣是怎样对"见行算经"进行"注释考证"的呢？而且数量那么大？历史上未留下任何线索，他是否在元丰七年的刊本

---

① 宋会要卷一三二(转引自李俨.中算史论丛第四集.北京：科学出版社，1955，257)。

② 宋史卷三五二薛昂传。

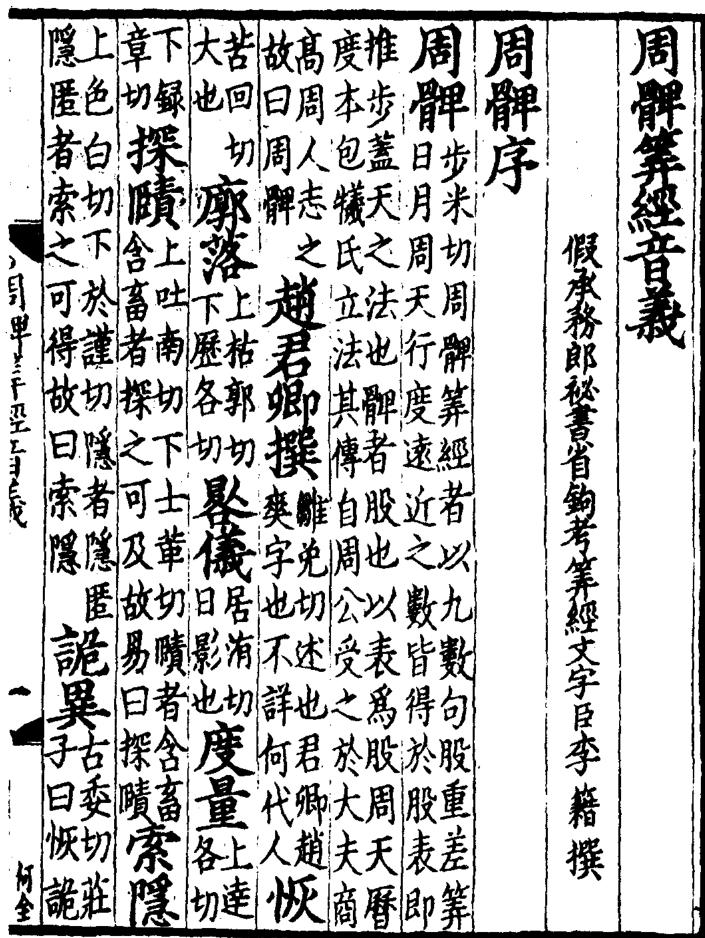
③ 李俨. 中算史论丛第四集. 北京：科学出版社，1955. 266

上加了什么文字或另外还有单独的注释考证文字附于189卷算经之后？也都没有一点痕迹。现在只好姑置不论。

还有一个人在这里似乎应当提一下，那就是李籍。他没有前二人那么幸运，因为前二人都有一些传记资料流传下来，而李籍则一点也没有，可是他却有二本不大的书《九章算经音义》和《周髀算经音义》(图2.5.2)保存至今。两书均有一字不差的署名“假承务郎秘书省钩考算经文字臣李籍撰”，是有关李籍的惟一资料。根据他的衔和两书的性质来判断，似与薛昂或武仲宣之一有关。也许再早一点到元丰年。李籍可能是当时的文字学专家，他给《九章算经》与《周髀算经》中的名词术语注音(反切)和简要的解释，对古代文献也较熟悉。他的“钩考算经文字”工作，以理而论应是在一种重视算学的年代，且他的署名是那样郑重，不是个人行为，而是受官府委托、不是由皇帝下达的诏谕，故直书“撰”，否则应是“奉敕撰”。假如把李籍定在崇宁年间，受薛昂委托对两部算经作音义，则是最合理的[①]。

李籍的音义不是一般普通著作，而应是给学算学的学生准备的辅导材料。没有音义，算经中的某些字的读音，学生可能读错，如“衰分”的“衰”，注音为“楚宜切”，今读如cuī，楚危切，略有不同。等等。这是一方面，更重要的是李籍对数学用词的解释：“音”、“义”相当，并举。数学史家评论《九章算术》注释者，厚于刘徽、祖氏父子、李淳风、杨辉、李潢，每都忽略李籍的贡献。其实，他对于“义”的工作有许多独到的见解，有些是前无古人之举。例如在《九章算经》经文中多处出现“副置”。何谓副置？令人费解。李籍解释说：“副、别也，置、设也。别设算、算位有所分也。”是其他类书从未有过如此通达的阐述。以《九章算术·

① 据四库全书文渊阁本。



周髀筭經音義

假承務郎秘書省鉤考筭經文字臣李籍撰

周髀序

周髀 步米切周髀筭經者以九數句股重差筭日月周天行度遠近之數皆得於股表即推步蓋天之法也髀者股也以表爲股周天曆度本包犧氏立法其傳自周公受之於大夫商高周人志之故曰周髀 趙君卿撰 雖免切述也君卿趙奭字也不詳何代人 恢 苦回切大也 廓落 上枯郭切下歷各切 晷儀 居洧切日影也 度量 上達各切下録章切 探賾 上吐南切下士革切賾者含畜含畜者探之可及故易曰探賾 索隱 上色白切下於謹切隱者隱匿隱匿者索之可得故曰索隱 詭異 古委切莊子曰恢詭

周髀筭經音義　何全

图 2.5.2 （南宋刊本《周髀算经》书影）

李籍音义》为例，我们选录其要者如下：[①]

① 笔者准备另撰专文，提出立论之理由，此处因书的形式所限，只能给出结果。

刘徽序文

探赜　赜者，含蓄，含蓄者、探之可及，故《易》曰：探赜。

索隐　隐匿者，索之可得，故《易》曰：索隐。

方田章

除之　去也，去之使其少。

觿　所以解结［的工具］，诗曰：童子佩觿。

课分　欲知其相多，……较其相多，故曰课分。

密率　（辩明李淳风密率非祖冲之密率）　冲之……密率：圆径一百一十三、圆周三百五十五，约率：圆径七、周二十二。”

粟米章

御米　精于糳也，王膳之米也。

小䴭、大䴭　麦屑也。细曰小䴭，粗曰大䴭。

衰分章

北乡算　算者，计口出钱。汉律：人出一算、一算百二十钱，贾人与奴婢倍算。

少广章

少广　广少纵多，截纵之多，益广之少，故曰少广。

半　凡言半者，以二为分母，言太半、少半者，以三为分母。

商功章

商功　商，度也，以度其功佣，故曰商功。

程粟　（辩明程粟的要害是相当率，非各当率）程粟一斛积二千七百寸，米一斛积一千六百二十寸，菽、荅、麻、麦一斛、积二千四百三十寸。此据精粗为率，使价齐而不等其器之积寸也。

均输章

发，耕、耰种　（明确三种不同农事）

发，伐也，诗曰：骏发尔私。

耕，犁也，诗曰：亦服尔耕。

耰种，复种也，孟子曰：播种而耰之。

盈不足章

醇酒 厚酒也

行酒 市酒也

方程章

方程 方者，左右也；程者、课率也。左右课率，总统群物，故曰方程。

恢演 恢，大也，演、广也。

北宋刊刻算经的风气还影响到南宋。我们略述概况。南宋建国后，起初政局十分不稳，皇帝赵构(1107～1187)尚且东跑西颠，哪里顾得上数学教育，连更重要的学科都不能恢复。直到绍兴五年(1153年)，南宋才算在临安(今杭州市)稳定下来。但一直到南宋于公元1279年灭亡，也从未提起恢复数学教育之事。从绍兴九年(1139年)起到二十一年(1151年)止虽曾多次下诏镂刻原国子监善本书，而且决心很大："虽重有所费，亦不惜也。"① 但未提到重刊算经。在这期间，有一叫荣棨的说他曾刊过《九章算经》，留下一篇序文，摘录于下：

"……是以国家尝设科取士，选《九章》以为算经之首，盖犹儒之六经，医家之《难》、《素》，兵家之《孙子》欤。后之学者，有倚其门墙，瞻其步趋，或得一二者，以能自成一家之书，显名于世矣。……

奈何自靖康以来，罕有旧本，间有存者，狃于末习，不循本意。或隐问答以欺众，或添歌象以炫己，乖万世益人之心，为一时射利之具。以至真术淹废，伪本滋兴，学者泥于见闻，依依然入于迷望，可胜记邪？居仁由义之事，每不平之。愚向获善本，不敢私藏，而今而后，圣人之法，暗而复明，仆而复起，学之者得读其全经，悟之者必达微旨矣。不亦善乎？谨命工镂板，庶广其

① [宋] 王应麟. 玉海卷一二〇。

传，四方君子，得以鉴焉。时圣宋绍兴十八年戊辰岁八月旦丙戌日，寓临安府汴阳学算荣棨序。”

这篇序虽然不长，但却透露出一些有价值的信息：首先是在北南宋混乱之际，原来北宋元丰年刊印的《九章算经》等监本算经已很难找到；其次是社会上大量出现以“射利”为目的水平低劣的数学书到处泛滥；再次是在这些书中，他特别提到“添歌象”的一类，看来在数学书中加歌词诗句是南宋初期的普遍现象，不是到100年后的杨辉时代才如此，最后是荣棨手中有一“善本”，无疑应是元丰年监本《九章算经》。

荣棨说“谨命工镂板，庶广其传”，这件事似应是他作序的绍兴十八年(1148)。可是从未有关于这种版本《九章算经》的记载，更未见到实物。难道他仅有刊书的打算，而实际未刊？如果未刊书，那么序文是如何流传下的呢？是个很大的谜团。

荣棨其人“寓临安府汴阳学算”，说明他不是临安府人，而是汴阳人寓居临安府，汴阳又在哪里？尚待研究。“学算”不像是官名，或是指他是学习数学的？也不好理解。

又过了60多年，确实有人刊印算经，就是鲍澣之。先是他于庆元庚申(1200年)在临安与天文学家杨忠辅讨论历法问题时，“因从其家得古本《九章》，乃汴都之故书，今秘阁所定著亦从此本写以送官者也。”[①]大约是由于受到此事的鼓舞，使他锐意搜求，从临安七宝山三茅宁寿观道藏中得到《数术记遗》“即就录之，以补算经之缺。”[②] 嘉定(1208～1224)时他到福建汀州做地方官，把这些书带到汀州，并于嘉定五、六年(1212、1213年)全部按元丰刊印版式重刻重印出版。程大位说：“宋元丰七年刊十书入秘书省，又刻于汀州学校”，即有《黄帝九章》、《周髀算经》、《五经算法》、

---

① ［宋］鲍澣之.《九章算经》后序。

② ［宋］鲍澣之.《数术记遗》后记。

《海岛算法》、《孙子算法》、《张丘建算法》、《五曹算法》、《缉古算法》、《夏侯阳算法》、《算术拾遗》[①]，书名多不准确，估计他都没见到原书。所谓“又刻于汀州学校”者，即指鲍浣之在汀州所刻之算经。

鲍浣之当时到底刊印了多少种算经，是否即元丰七年那几种外加《数术记遗》？估计应是这样。这批书刻工精细，版式考究，实为难得的善本。特别重要的是保留了元丰监本的式样和进呈官员的署名，使人们能了解北宋刊印算经的情况，其价值同样极大。前面曾经指出过：元丰刊印算经之重大贡献，可是遗憾的是那批算经连一部都未流传下来，幸有鲍浣之重刊才能使今人间接见到元丰监本算经之面貌。因此对鲍浣之的贡献也不能低估。

鲍浣之重刻算经问世之后，又饱经沧桑，在多次战乱中，散佚迨尽，到清代只有孤本 8 种在私人藏书家手中，它们是《九章算经》、《周髀算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《张丘建算经》、《夏侯阳算经》和《缉古算经》，由毛扆（1640～?）收藏。《数术记遗》则辗转到了李盛铎处。目前只有 5 部半：《九章算经》（前五卷）、《周髀算经》、《张丘建算经》和《孙子算经》，藏于上海图书馆；《五曹算经》和《数术记遗》，藏于北京大学图书馆。1981 年把这些算经照原样影印，汇编为《宋刻算经六种》，由文物出版社出版。

宋代由民间出版的数学书相当多，仅程大位所举之书就有 20 多种[②]，实际上超过 50 种[③]。这里不赘[④]。由此可知，南宋出现秦九韶那样的大数学家绝不是一朵孤立的鲜花，而是有深厚的数学社会根基，是众花中之佼佼者。

---

① ［明］程大位．算法统宗·算经源流。

② ［明］程大位．算法统宗·算经源流．

③ 李迪·中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984，149～152

④ 详见本《大系》副卷第二卷。

三 册封畴人

当时中书舍人拟定名单，定公、侯、伯、子、男五等爵位册封知名天文算学家。上文已列举其中算学家16人。很可能当时是按照籍贯、居住或活动地点命名进爵。我们对照成书于北宋初的《百家姓》郡望(望族郡属)与各人爵名并不一致，这说明宋时离汉、唐尚近，当时资料显然真实性甚于今日……下表为姓氏、郡名、爵名对照(表2.5.1)是推测五代以前数学家籍贯、或生活地点的难得素材，例如：

落下闳 《百家姓》未收“落下”这一姓。东汉《风俗通义》记，汉代有落下闳，说他是巴郡人。本姓黄，以其隐居地名洛下，因以为姓[①]，而中书舍人封他为阆中男，按阆中在今四川省北部阆中县境。据此我们对落下闳的籍贯有进一步认识。

刘徽 有人据以考订刘徽可能是山东省邹平县人，理由是：淄乡不是刘姓郡望，也不是刘徽生前封号，因此只能是其籍贯或其活动地区。又根据《汉书》、《元丰九域志》……等史典。淄乡在今山东省邹平县境。[②]

刘洪、刘焯、李淳风、张衡、祖冲之等人其他史料所记与封爵名相符，而与《百家姓》郡望有出入。其他人的籍贯，如再有别的文献为证，就可以循以揣测，因为爵名大都是地名：平陆夏侯阳、无极甄鸾、介休王孝通等。

表2.5.1 册封畴人郡名爵名比较

姓	算学家	《百家姓》郡名	自报或史称籍贯	册封爵名
边	边 冈	陈 留		成安子

① 汪宗区. 中国姓氏辞典. 北京：北京出版社，1993

② 郭书春. 刘徽祖籍及其思想. 刘徽学术思想研讨国际会议，北京，1991

续表

姓	算学家	《百家姓》郡名	自报或史称籍贯	册封爵名
耿	耿寿昌	(无耿姓)		安定伯
何	何承天	卢　江	东海	昌卢伯
落下	落下闳	(无此姓)		阆中男
李	李淳风	陇　西	曾封昌乐县男	昌乐子
刘	刘　徽	彭　城		淄乡男
	刘　洪		泰山蒙阴	蒙阴子
	刘　焯		信都昌亭	昌亭子
商	商　高	汝　南		郁夷公
夏侯	夏侯阳	谯　国		平陆男
张	张　衡	清　河	南阳西鄂	西鄂伯
	张丘建			信成男
王	王孝通	太原		介休子
	王　朴			东平伯
甄	甄　鸾	中　山		无极男
祖	祖冲之	范　阳	河北范阳	范阳子

第　三　编

南宋时代　秦九韶(上)

南宋时代(1127～1279)数学界两颗靓丽的明星——秦九韶和杨辉的传世佳作将从第三编起叙说。由于秦氏著录特别丰硕，以下分三编介绍：本编述秦九韶与《数书九章》。

第一章　秦九韶身世

第一节　秦九韶简传

秦九韶字道古(约1202～1261)，杰出的数学家。在《宋史》里无传，但根据零星史料，其生卒、仕宦、行踪、学术活动等大致可以查考。

秦九韶专著《数书九章》18卷，每卷开始都署名：鲁郡秦九韶，他是齐鲁人士，可无疑义[1]。

---

[1] 严敦杰在专著“秦九韶年谱初稿”以秦父在四川安岳做官，断为蜀普州安岳人。但又说：“秦的始姓有在鲁，鲁又有秦氏，居于秦邑。今濮州范县(山东省)北有秦亭，是其地。以邑为氏，用鲁郡为秦，犹如用天水为赵，琅琊为王等相同。”按郡名《百家姓》赵姓郡名确是天水，但秦姓则隶太原。郡名中有鲁字者：“鲁国”孔、濮、车、公西、邴五姓，“东鲁”者端木，有二姓。无以“鲁郡”为郡名的姓。(上海古籍出版社，1988年版)可见秦氏署鲁郡，并不是以邑为氏。

父亲秦季槱与浙江籍文学家、思想家陈亮(1143～1194)同榜进士，曾任四川巴州太守。1219年四川北部一带反政府武装攻占巴州等地，秦季槱弃城，带着全家去南宋偏安京师临安(今浙江杭州)，并先后出任工部郎中、秘书少监等官职。1225年任四川潼川府知府，重返四川。1226年正月十二日他带着儿子九韶到涪州(今四川省涪陵)与涪州太守李瑀等同去观看著名旅游胜地和水文设施——白鹤梁石鱼(本卷附录一)，并兴致勃勃刻石题名，其中有"季槱之子九韶道古，瑀之子泽民志可同来游石鱼"等语(图3.1.1)[①]，这是秦九韶首次在历史上留下的石刻的永恒不谢的姓名。

《数书九章》秦九韶自序说，"早岁侍亲中都(京都、临安)，因得访太史"，当是季槱举家到京城问事，此后就随父回到四川。1233年前后，成都漕(官名)李刘著《梅亭四六标准》中写道"回秦县尉九韶谢差校正启"等字样，可证当时九韶曾任某县县尉。

1236年蒙古皇子奎腾率汪世显等攻入四川，嘉陵江流域各地都受到兵灾。《数书九章》自序记，"际时狄患，历岁遥塞，不自意全于矢石间，尝险罹忧，荏苒十祀。"如从《数书九章》成书年回溯十年，正是元兵入川之时，秦氏于久经兵乱之后不得不离乡背井，往东南避难。

秦氏离开四川东行时曾任蕲州(今湖北省蕲春)及和州(今安徽省和县)官员。周密《癸辛杂识》说他"既出东南，多交豪富，住家湖州西门外，建堂于苕溪之上，极其宏敞"。

在湖州期间，秦氏度过了他学术生涯中最重要的历程，他任"通直郎淳祐四年八月到任，十一月丁母优解官离任"[②]，这就是

① 杨齐．秦九韶涪州观石鱼小考．1987年国际会议论文，北京：北京师范大学，1987

② 《景定建康志》卷24，官守志，通判厅。



图 3.1.1

说，他在 1244 年，在建康府(今江苏省南京市)做官，不久因母亲去世，按规定解职。此后三年间在湖州著书立说。名著《数书九章》就是在居家守孝时写成的。周密说：“或以历学荐于朝，得对。有奏稿及所述《数学大略》。”周密又说秦宅所在地在湖州西门外，

"地名曾上"今考"曾上"系"会上"之误[①]。秦氏同代人湖州安吉陈振孙(嘉兴知府),著《直斋书录解题》,收录秦氏此新作,并赞赏"博学多能,尤邃历法。凡近世诸历皆传于秦,所言得失,亦悉著其语云。"由于陈的推介,尚是手稿的《数学大略》渐为人知,因此后来为明人收入《永乐大典》。秦氏另一同代人湖州新市吴潜,在湖州上学,后考中状元,还二度入相。曾上奏"当预蓄人才,以备患"。吴潜在湖州也因"丁母忧"居家,与秦氏过从甚密,会上地基就是吴潜所赠。此后秦氏仕途升迁,很可能都得到吴潜提举。

1254年九韶又到建康,任沿江制置司参议,不久又去职家居。1258年任琼州守,1260年到梅州(今广东省梅县)赴任,卒于任所(1261年)。

以上是秦九韶一生简历。

他"性极机巧,星象、音律、算术以至营造等事无不精究";还尝从李梅亭学骈俪诗词。"游戏、球、马、弓、剑,莫不能知。"[②]可见他从自然科学到社会科学,从技术到文学、游戏、武术无不通晓。从《数书九章》一书内容看,与周密所记相符。该书内容虽以数学为主线,而命题应用范围至为广泛:天文历法、水利水文、建筑、测绘、农耕、军事、商业贸易、货币金融等方方面面都有涉及。而且全书不但在数量上取胜,重要的还在质量上拔尖。从历史发展前后比较,可以说秦氏九章可与《九章算术》媲美;从世界范围广度比较,秦氏九章不愧为数学名著。

第二节　秦九韶学术思想

秦氏《数书九章》分18卷,约27万字,是我国重要数学经

① 韩祥临实地调查:会字繁体写法人字头,与曾字头缠误。

② 周密《癸辛杂识》续集下。

典，有划时代意义的创作。大厦之成，其来有自。秦氏倜傥宏论，成林之路值得我们追迹。从上述简历和其他文献来看，他的学术思想来源有二：

其一，他父亲长期从政，他自己也出任多处地方行政官吏。在行政管理工作中，广泛地接触工程技术、农田水利、海运交通、钱粮利税、商品交易、军事后勤等工作，为他著作《数书九章》采集素材提供了十分有利的条件。

其二，《数书九章·序》："尝从隐君子受数学"，可见秦氏之学并非无师自通，而是前人知识的积累和发展。已有学者[①]考证隐君子很可能是宋代道学家陈元靓。秦氏向老师叨教含今称数学在内的各种学问，逐渐形成专才。另一方面在《序》中又说："早岁侍亲中都，因得访习于太史"。太史指国家天文历法官员。这是说当他随父亲抵达当时国家首都后，他有进一步进修的机会，学习造历知识，为所创造的大衍总数术提供必不可少的基础。

秦氏学术思想反映在《数书九章》全书，其要者有三。

一 仰观俯察，以拟于用

在《数书九章·序》中，秦氏分析数学一度成为绝学的原因，是因为古代数学能服务于实践，才能产生如汉代的张苍、耿寿昌，使"法传于后"，而"后世学者自高，鄙之不讲，此学殆绝"。秦氏自己就"尝设为问答，以拟于用，积多而惜其弃，因取八十一题，厘为九类"。《数书九章》就按之分类：天时、地理、经济、赋役、营造、水利、冶炼、酿造……。有社会现象，也有自然现象，正说明秦氏对数学应用广泛性的良好认识。下面引录某些典型例题，以反映秦氏数学应为社会实践服务的学术思想。

---

① 李迪．秦九韶传略．秦九韶与《数书九章》．北京：北京师范大学出版社，1987：28～29

积年

在元代《授时历》之前，作为求历法时间原点的上元积年是历代经国大事，只是历法计算是国家机密，密不外传。秦氏在自序中说："独大衍法不载《九章》，未有能推之者。历家演法颇用之"。又说："历家虽用，用而不知"。他在临安既有机会就学于国家历法机关，就"小试经世，姑推所为"，以专心研究所得，终至绝学能传于后世。查《宋史·律历志》记："开禧历上元甲子至开禧三年丁卯，岁积七百八十四万八千一百八十三年"；而《数书九章》卷3第3题"治历演纪"以21页篇幅，按大衍、演纪术等方法认真计算，秦氏的结果与《宋史》记录完全符合，这是他理论为实践服务，反过来实践也丰富了理论学术思想的真实写照，像南北朝时祖暅球积术、秦氏同龄人杨辉所保存的增乘方法一样，三足鼎立。中国数学发展史上的三颗宝石得以永传后代。阮元《畴人传·秦九韶》论云：

"自元郭守敬授时术截用当时为元，迄今五百年来，畴官术士，无复有知演纪之法者，独《数书九章》犹存其术，嗜古之士得以考见古人推演积年日法之故，盖犹告朔之饩羊[①]矣。"

降水

秦氏书载有关于测雨、验雪题4道，这是我国，也是世界气象学史上降水计算的最早记录。由于当时量雨器截面上下直径不一，需经折算为表面口径为上底面的水柱体，就需要立体几何换算知识。南宋偏安江南，人口增加，而耕地有限；围圩造田已成为当务之急，降水量的准确设施十分必要。秦氏书卷4第2题提出中肯主张：

"今州郡都有天池盆，以测雨水，但知以盆中之水为得雨之数，不知器形不同，则受雨多少亦异，未可以所测便为平地得雨之数。"

---

① 典故见《论语·八佾》。

农田

《数书九章》卷 5 第 2 题：

“问沙田一段，有三斜，其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里，欲知为田几何？”

从事造田活动，先应求其地积，然而沙田地域如此广阔，边长易量，边长的高，即使用现代测量手段也难测定。因此《九章算术》半底正从(高)相乘的公式失效。秦氏别立蹊径，为数学新添篇章，创造三斜求积之术。

水利

秦氏书卷 6 第 1 题(漂田推积)，第 3 题(围田先计)等是当时围圩造田真实记录。《宋史・河渠六》说太湖区域围田：

“政和(1111～1118)中太平州(今安徽当涂)围丹阳湖田，……，建康府围石臼湖田，规模宏大，宽广都达五六十里，有田九百五十余顷。”

在“围田先计”题中所记围田，其水工建筑物如堤梗、闸门，其规模1 866顷，都能真实反映当时实况。其中所说田梗边坡横距 3、纵 10 是合理的设计。又卷 13 第 4 题(计浚河渠)河长 48 里、上流深 8 尺，下游深 1 丈 8 尺，其河道坡降(16－8)÷(48×1500)＝1∶90 000，这也是很合理的设计。

统计

同书卷 12 第 5 题：

“有米一千五百三十四石，米内夹谷。取米一捻：二百五十四粒中有谷二十八颗，又已知每勺有米三百颗，问：其米、谷各多少？”

原题答数是内米1 364.897 6石，谷169.102 3石。从本题说明秦氏已具有随机抽取样本以估计总体的统计设想。

二 数理精微，探隐索源

秦氏为数学勤奋工作，写成含81个算题的专著。各题内容、解法各有特色，题后又附详细演算草文，这在我国古代数学书中是开创之作。在理论探索上，他力图有所发明，冥思苦想，在书中不止一次地溢于言表："乃肆意其间，旁诹方能，探索杳渺，粗若有得焉。"他悟得前人"所谓方程，正是大衍术，今人少用。……初无定法可传，甚是惑误后学，易失古人之术意"。他深知"数理精微，不易识破"，但他"穷年致志，感于梦寐。幸而得之，谨不敢隐。"秦氏在数学探索中所取得的成果在书中有的虽只举其特例，如线性方程解法，高次方程数值解法，由于有详细草文，后人可以依法模仿，不难习得一般规律。有的用文字表示解题法则，虽言简，但意赅，等效于今日用字母表达的公式，足以按部就班，算出答案。如三斜求积法则，等同于希腊海伦(Heron)公式。而大衍总数术行文紧凑，却井然有序。人们应该体会到先哲能使用的数学工具很简陋，凭借古汉语要在"今人少知"情况下做到有"定法可传"，不惑后学，又不失古人之术意，其难度可想而知。秦氏对此却作出出色成绩，只用了855字把复杂的数学现象总结完整，能够经受现代数学检验而无可指责；能够超前好几百年于外国第一流数学家同类成果，正可以说明秦氏对数学知识的深邃修养和深思熟虑。另一方面他在命题、解题中反映了综合运用各种数学知识的能力，例如计立方营一题，冶几何、数列、代数于一炉，是前无古人之作。

三 立术具草，以图发之

秦氏在传授数学方面也卓著功勋。在《数书九章》中他多次塑造各种模型或以浅显事例以引出数学问题，然后立出法则，从详计算，必要时还绘制针对性图样，图样之多、之精，也是过去

从来之最。现举一些突出例子，以介绍秦氏这一方面的学术思想。

大衍类是全书最精采的课题之一，也是最难学的课题。他在章之首列出大衍总数术之后，在卷 1、卷 2、卷 3 列出十个算题，不厌其详、反复运算这一法则，分别解题。如果单纯从为生产、生活实践标准来衡量，这些算题大多数是数学游戏，何裨国计民生？实际上，秦氏如此安排，有着寓教于乐的深意。他企图从分工建堤、七库存钱、大小三斛、信使行程、砖块砌地、三贼窃米等题，为卷 1 第 2 题（古历会积），卷 3 第 3 题（治历演纪）计算上元积年服务，从 3 个同余式到 8 个同余式的同余组，从自然数模、正数模、负数模、分数模、小数模、两两互素模、不两两互素摸，从大衍术到演纪术，反复练习，以达到熟练运用大衍总数术。从照顾初学者学习数学效果看，秦氏对教材安排如此细致、周到，用心良苦，无疑在数学教学上能收到积极效果。

我国是代数学发展最早的国家，二次至四次方程的物理、几何模型最早在我国产生。古代塑造模型列出方程并非轻而易举的事。秦氏在卷 5 第 1 题（尖田求积）为使方程具有整系数，他对无理数系数连续两次作有理化变换，获得四次方程。又在卷 8 第 2 题（遥度圆城）用相似三角形性质定理获得数字系数十次方程，使中国数学走上新的台阶。从传世的数学文献比较，在代数领域内秦氏的代数恒等变换技能和技巧，设未知数为某某，再据题意建立方程（方程组）的能力，和在北宋数学家已有基础上求这些方程数值解的能力——三者都达到最好水平。有可能秦氏从北方学者风闻已有立天元一的新鲜、先进数学方法，但知之不详。所以在其大衍求一术中对于解一次同余式 $ax\equiv1(\mathrm{mod}\ b)$ 中对计数函数 $j_n=q_nj_{n-1}+j_{n-2}$，$j_0=0$，而 j_1 恒等于 1（不论 q_1 是什么数），他把这个常数误用为“立天元一”。而在建立多项式方程时，方程虽已顺利列出，却始终未用“天元”这个词，因此造成错觉：南方学者，包括秦九韶在内不懂天元术，“《数书九章》中所有的高次方程不

可能是由天元术推导出来的。”我们认为这是误解。建立方程的方法唐已有之，阮元在《畴人传·王孝通》说得好，“孝通《缉古》实后来立天元术之所本也”。日本学者三上义夫在其《中国数学之特色》中说：“唐王孝通之三次方程已用与天元术相同之方法，故所谓天元术，其形式上虽新，而在传统上则谓为承继古式，亦无不可也。”① 这是可以接受的。本卷将在第四编第三章适定方程以足够多的范例进一步陈述秦氏上述三种非凡的代数学基本功力，他与北方代数学家工作之差仅是形式，形异实同也。

在算术、几何领域内，秦氏也有众多创新之处。

① 三上义夫. 中国算学之特色. 上海：商务印书馆，1929：67

第二章　《数书九章》版本及其流传

第一节　《数书九章》简介

秦氏在其《数书九章·序》中述说写书缘起很是详细：

“周教六艺，数实成之。学士大夫所从来尚矣。其用本太虚生一[①]，而周流无穷，大则可以通神明，顺性命；小则可以经世务，类万物。讵容以浅近窥哉？若昔推策[②]以迎日，定律而知气[③]。髀矩浚川，土圭度晷，天地之大，囿焉而不能外，况其间总总者乎？爰自河图洛书，闿发[④]秘奥，八卦九畴，错综精微，极而至于大衍、皇极之用，而人事之变无不该，鬼神之情莫能隐矣！……汉去古未远，有张苍、……耿寿昌、张衡、刘洪之伦，或明天道，而法传于后；或计功策[⑤]，而效验于时。后世学者自高，鄙不之讲，此学殆绝。惟治历畴人，能为乘除，而弗通于开方衍变。若官府会事[⑥]，则府史一二系之，算家位置，素所不识。上之人亦委而听焉。持算者惟若人，则鄙之也宜矣。……今数术之书，尚三十余家。天象历度，谓之缀术。……皆曰内算，言其秘也。《九章》所载……系于方圆者为叀术[⑦]，皆曰外算，对内而言也，其用相通，

① 太虚，即气，见③。

② 策即算筹。

③ 气，中国传统哲学用语，指构成世界万物的本源。

④ 闿发即开发。

⑤ 功策指计算功时。

⑥ 会事即今会计。

⑦ 叀术指测量。

不可歧二。独大衍法不载《九章》，未有能推之者，历家演法颇用之，以为方程者误也。

且天下之事多矣。古之人先事而计，计定而行。仰观俯察，无所不用其谨，是以不愆于成，载籍章章可复也。……九韶愚昧，不闲[①]于艺。然早岁侍亲中都，因得访习于太史；又尝从隐君子受数学。际时狄患，历岁遥塞[②]，不自意全于矢石间。尝险罹忧，荏苒十祀[③]。心槁气落，信知夫物莫不有数也。乃肆意其间，旁诹[④]方能[⑤]，探索杳渺，粗若有得焉。所谓通神明，顺性命，固肤末于见；若其小者，窃尝设为问答，以拟于用。积多而惜其弃，因取八十一问，厘为九类，立术具草，间以图发之。恐或可备博学多识君子之余观[⑥]，曲艺可遂也，愿进之于道。倘曰艺成而下，是惟畴人府史流也。乌足尽天下之用，亦无瞢[⑦]焉。时淳祐七年九月鲁郡秦九韶叙。”

参考译文：周代设置六艺教育，数学是其中一项，为士大夫阶层自来所重视和崇向。大千世界的本源是太虚，而其应用则千变万化，层出无穷。大的可以通神明，顺性命；小的则可以策划事务，模拟物态。人们怎样可以以浅近看待它呢？先前用筹算制订历法，定出法则以明世界本源。矩尺可以测河深，圭表可以量日影。天地之大尚且不能置于数学之外，何况林林总总，其中所总各种事物？自从河图洛书泄露了天机秘奥，八卦九畴启发宇宙根本哲理，高深的应用直到周易大衍皇极经世的编订，人世间事

---

① 不闲，技艺生疏。

② 历年坎坷。

③ 祀，义：年。

④ 诹，义：咨询。

⑤ 方能，访问能人。

⑥ 余观指茶余酒后赏析。

⑦ 瞢，目不明。

各种变化无所不包。就是连鬼神之情都不能隐匿。……汉代去上古还不远。张苍……耿寿昌、张衡、刘洪等哲人，他们或通天文历法，有理论法则传世，或以筹运算，在当代取得效益。后世学者自视甚高，鄙夷前人成就，不予宣扬，此学几乎失传。仅是治历畴人能言乘除，却不通开方；至于官府会计只知加减，因此算家的地位和作用素所暧昧。当权者又听之任之。执算者就是如许人士，数学被人鄙视，是可想而知了。……现在数术之学有三十余家，天象计算称为缀术。……之所以称为内算，以示秘不外传。而《九章算术》所载与方圆图形有关的测量术称为外算，是相对于内算而言。二者可以相通，并无歧义。只是大衍术为《九章算术》所未载，无人过问、推算，而对天算家制历很有用处。有人以为这就是方程，则是谬误了。人间事千头万绪。古人先行考虑策划，再确定计划，才能施于行动。仰见俯察，小心谨慎，无不用其极，所以功成业立，无失误可言。典籍已言之凿凿。……九韶愚昧，才疏学寡，青少年时代到临安侍奉双亲，因此有机会访问并就学于国家天文台。此外我还从隐君子学习数学。时当外敌入侵，经年路途阻塞，历经坎坷。不知不觉在战火中度过，备尝艰辛，已转瞬十年了。我心灰意懒，深信万物在冥冥中无不有数。于是就专心致志钻研，走访学者、能人，深入探索，粗有所得。对于通神明、顺性明的见解虽然还很肤浅，而对于其较次要而具体部分，我曾以问答体裁记下来以便于应用。年深月久，积累渐丰，怕一旦丢失实在可惜，就取其八十一题，分为九类，还作了解法及其演算过程，有时又用插图说明。这样或许就有可能作为博学多才朋友们的参考、茶余酒后的赏析材料。我对于技艺研习的素志，于此也可以有遂夙愿了。但是我还希望把它提高到理论的高度。如果仍然有人认为：技艺学成后，还只是畴人、府吏等下之辈，又怎能为天下万事万物服务呢？我也并不因此而引为内疚。

淳祐七年九月鲁郡秦九韶序。

在序文中秦氏写书的原因和目的的阐述是明确的。当南宋之时数学研究已进入低谷，数学几成绝学，即使从事数学的人员也仅知四则运算，理论已被忽略。秦氏自述在兵荒马乱之际，以亲身实际体验，专就与数学有关材料勤于笔录，又分类整理。从序文中可知秦氏作为有心人，不以收集一般数学知识为满足。在当时少有人知，易于与方程缠误的大衍术等理论，也被组织到他的专著中。他以问题所应用的范围分类。全书分九类，即九章，每类九题；每类有颂词，词简意赅，以述本类算题主要内容、与国计民生的关系、及其解法思路，下面摘引部分，并作注释，又附参考译文。

一 大 衍 类

一次同余式组问题，凡九题：

卷 1 蓍卦发微 古历会积 推计土功 推库额钱

卷 2 分粜推原 程行计地 程行相及 积尺寻源
余米推数

颂词：圣有大衍，微寓于《易》，奇余取策，群数皆捐。衍而究之，探隐知原[①] ……历家虽用，用而不知。小试经世，姑推所为。

参考译文：圣人作大衍，寓意于《周易》，取余数为已知数，舍去模的倍数。用大衍求一术解出原数……历算家知道计算，却不知其所以然。我小试牛刀，服务于世人，姑且推导所见。

---

① 指在同余式 $ax \equiv b \pmod c$ 中取 b_1，使 $0<b_1<c<b$，b 虽大于 c，而 $ax \equiv b \pmod c$ 可用 $ax \equiv b_1 \pmod c$ 表达，其中 $c \mid b-b_1$。在 b_1 至 b 之间的数都被舍去（奇余取策，群数皆捐），从余数 b_1，按大衍求一术（衍而究之）求出 x（探隐知原）。

二　天　时　类

有关天文历法和气象等问题，凡九题：

卷 3　推气治历　治历推闰　治历演纪　缀术推星

卷 4　揆日究微　天池测雨　圆罂测雨　峻积验雪

　　　竹器验雪

颂词：七精[①] 回穹，人事之纪，追缀而求。宵星昼晷，历久则疏，性智能革。不寻天道，模袭何益？三农[②] 务穑[③]，厥施自天。雨膏[④] 雪零[⑤]，司牧[⑥] 闵焉，尺寸验之。……

参考译文：七星在太空回旋，运行不息；人世间事也正是如此，为追溯他们的规律，夜间可以观星象，白天可以测晷影。历法日久渐生误差，有识之士给予调整，如果不实测天象，向壁虚构，与事何补？农家耕耘，有赖水文气象。天降雨雪，官员眷念，容以器皿，量其尺寸。

三　田　域　类

讨论田亩面积的计算，凡九题：

卷 5　尖田求积　三斜求积　斜荡求积　计地容民

　　　蕉田求积　均分梯田

卷 6　漂田推积　环田三积　围田先计

---

① 七精，指七星：日，月，水，火，木，金，土。

② 三农《周官·天官·太宰》："三农生九谷。"郑注，"三农：平地、山、泽也。"指平地、山区、水泽地区劳动的农民。

③ 稼穑《诗·魏风·伐檀》："不稼不穑。"种植为稼，收获为穑。

④ 膏《诗·曹风·下泉》："阴雨膏之。"滋润之意。

⑤ 零《诗·鄘风·定方之中》："灵雨既零。"零通淋。

⑥ 司牧，地方官，《左传》襄公十四年："天生民而立之君，使司牧之"。

颂词：代远庶蕃，垦菑[1]日广。步度庀[2]赋，版图是掌。方圆异状，斜窊[3]殊形。叀术[4]精微，孰究厥真。差之毫厘，谬乃千百。公私共弊，盍[5]谨其籍。

参考译文：历史绵延，人口日蕃，垦殖幅圆渐广，量度田亩，修造田赋，首要掌握版图，土地形状各异，斜正、隆洼不一样。测量技术，内容深奥，务必专心钻研，取其精华。差之毫厘，失以千里。于公于私，俱是大错。税册户籍何不谨慎行事？

四　测　望　类

有关间接测量问题，凡九题：

卷 7　望山高远　临台测水　陡岸测水

卷 8　表望方城　遥度圆城　望敌圆营　望敌远近

　　　古池推元　表望浮图

颂词：莫高非山，莫浚非川。神禹奠之，积矩攸传。智创巧述，重差……求之……崇深广远，度则靡容。……寇垒仇墉。欲知其数，先望以表。因差施术，坐悉微渺。

参考译文：不高何以成山？不深何以称川？大禹王测定山川，矩尺所以得传后世。创见妙作，用重差术求解。高深广远，何能直接丈量。敌方营房堡垒有关数据是兵家所必取。先望以表，因差施术，所求者不爽毫发，坐等可知。

五　赋　役　类

讨论田赋、纳税计算等问题，凡九题：

---

① 菑：初耕地，《尔雅·释地》中有“田一岁曰菑。”

② 庀赋：整治赋税。

③ 窊：低洼田地。

④ 叀术：勾股比例，今称测量术。

⑤ 盍：义为“何不？”

卷 9　复邑修赋

卷 10　围田租亩　筑樫均劳　宽减屯租　户田均宽

　　　均科绵税　户税移割　移运均劳　均定劝分

颂词：邦国之赋……取之有度，未免力役，先商厥功。以衰[1]以率，劳逸乃同。汉犹近古，税租以算[2]。调均钱谷，河菑[3]之扞[4]。惟仁隐民，犹己溺饥。赋役不均，宁得勿思？

参考译文：国家收税，取之有度，劳役不免，功量先计。用比例分配才能均匀劳逸。汉代距今还不远，以人口数比例取税，调整粮税合理负担。抗洪防旱，为官者尤其要为民着想，体谅民情犹如自己受饥受溺。赋税徭役分派不均，能置之不顾吗？

六　钱　谷　类

征购粮食和营造仓库问题，凡九题：

卷 11　折解轻赍　算回运费　课籴贵贱

卷 12　囤积量容　积仓知数　推知籴数　分定纲解

　　　累收库本　米谷粒分

颂词：物等敛赋，式时[5]府庾[6]。粒粟寸丝，褐夫红女。商征边籴，后世多端……我闻理财，如智治水：澄源浚流，维其深矣。彼昧弗察，惨急烦刑。去理益远，吁嗟不仁。

参考译文：征取粮税要看物品等级，谷类入库要看时令。一粒粟一寸丝，都是褐夫、红女辛勤劳动的成果。纳粮、收税，后世弊端丛生。我听说智者治水，清源疏流，工作至为周到。那些

---

① 衰分，比例分配，参见本《大系》第二卷，衰分术。

② 算，汉代纳税标准，每户成年人数为算。

③ 菑，这里作天灾解。

④ 扞通捍。

⑤ 式时：敬时，遵时。

⑥ 府，指聚物；庾，指露天堆积；府庾，指堆积货物的仓库或场地。

愚昧之辈就看不到这一点，只知敲榨欺压百姓，去理愈来愈远。为官不仁，可叹。可叹。

七 营 建 类

讨论土木建筑施工中建材、建筑物的计算问题，凡九题：

卷 13 计定城筑 楼橹功料 计造石坝 计浚河渠

卷 14 计作清台 堂皇程筑 砌砖计积 竹围芦束

积木计余

颂词：斯城斯池，乃栋乃宇。宅生寄命，以保以聚。鸿功雉制，竹个木章，非究非度，财蠹力伤。围蔡而栽，如子西素[①]，匠计灵台，俾汉文惧[②]，惟武图功，惟俭昭德。

参考译文：城池啊！房舍啊！城市、房屋建筑，人们赖以生活，借以保障生活、存贮财富。城堞作用很大，竹、木营建计算不合章法，就会劳民伤财。楚昭王围困蔡国，在离城一里筑泥版墙，是按子西的建议。汉代匠人设计天文台，费用昂贵，汉文帝为此担忧。用武为了喜功，节俭才能积德。

八 军 旅 类

讨论军营布置和军需供应问题，凡九题：

卷 15 计立方营 方变锐陈 计布圆阵

卷 16 圆营敷布 望知敌众 均敷徭役

---

① 《左传》哀公元年："楚子围蔡，报柏举也。里而栽。广丈，高倍。夫屯昼夜九日，如子西之素。"孔颖达疏："筑墙之板，谓之栽，栽者、竖木以约板也。"所以围蔡以栽，是说竖木筑围垒，离蔡城一里，费了九个昼夜，如子西所设计。

② 《汉书·文帝纪·赞》："孝文皇帝即位二十三年，宫室、苑囿、车骑、服御无所增益。有不便辄弛以利民。尝欲作露台。召匠计之，值百金。上曰："百金、中人十家之产。吾奉先帝宫室，常恐羞之，何以台为？"灵台即露台，颂词意：汉文尚俭，即使化百金，也俭朴不愿营造。

先计军程　军器功程　计造军衣

颂词：天生五材[1]，兵去未可。不教而战，维上之过。堂堂之阵，鹅鹳为行[2]。……夜算军书，先计攸重。我闻在昔，轻则寡谋。殄民以幸，亦孔之忧。

参考译文：自然界产生的五材，惟独兵器不可舍弃。没有操练就去打仗，这是上级的过失，赫赫军阵，应以鹅鹳行列为样板。夜读兵书，首要是讲究谋略。就我所知，以往轻敌就会失策，企图侥幸就会害民，令人忧伤。

九　市　物　类

讨论商品交换和钱币生息等问题，凡九题：

卷 17　推求物价　均货推本　互易推本　菽粟互易

卷 18　推计互易　炼金计值　推求本息　推求典本

　　　　僦值推原

颂词：日中而市，万民所资。贾贸滞鬻[3]，利析锱铢[4]。滞财役贫，封君低首。逐末兼并，非国之厚。

参考译文：日中而市，百姓生计所依靠。商人贸易，一分一厘都会斤斤计较。富有者以役代赈为封疆大吏所点头欢迎，舍本逐末，并吞他人资产，不是国策所许。

以上引述《数书九章》九类 18 卷 81 算题及其颂词，初步看到秦氏书大概内容。秦氏精于天算、数学学识超人。在其颂词中所引典故非常广泛、寓意深刻，可见他又兼通文史，真是难能可贵。各类颂词不但概括本类主旨，而且联系国计民生、吏治风纪，

① 五材《周官·考工记》，“以饬工材”郑玄注：“此五材，金、木、水、火、土”，金、喻兵器。

② 鹅鹳、军阵名。

③ 滞，义：积累、积蓄。鬻，义：卖。

④ 锱，六锱为一铢，二十四铢为一两。

颇富哲理，确为不可多得的数学文献。

本节仅就秦氏分类法对《数书九章》作一简介。如以近现代数学分类法归类，情况就大不一样。秦氏题解法大抵综合运用数量和图形知识，代数、数论、几何工具并陈。为节约篇幅，我们将在以后各编、章、节重新分类，分别介绍。

第二节 《数书九章》评说

自从《周髀算经》成书以来，我国数学专著都立论谨严，极少差错。以《九章算术》这样重要的经典，几乎没有差错。此为秦汉五百年间集体创作，有此水平，尤其难能可贵。[①]《数书九章》系秦氏独立完成，所言算题论数量、论质量在中世纪同类作品中允称第一流，但是其中有不少错误：题目出错、计算失误、误文夺字何止百处，已有专文指出[②]，如果进一步深究，远不止此。除了七百多年来传本抄写、刊印之误外，当是秦氏责任，是为美中不足之处。

为了简介秦氏学术思想，我们曾就仰观俯察，以拟于用，数理精微，探隐索源；立术具草、以图发之三方面表彰他的杰出成绩，但是这三方面，在书中，又有背道而驰的另一面，这在我国今传古算书中也是罕见的。

---

① 本《大系》第二卷，pp. 126～130，《九章算术》评说.

② 沈康身. 宜稼堂本《数书九章》正误. 秦九韶与数书九章，北京：北京师范大学出版社，1987：59～74

一 形合实离

书中不少算题形似，结合实际，事实并不如此。

例如卷 8 第 3 题(望敌圆营)：

“问敌临河为圆营，不知大小，自河南岸至某地七里，于其地立两表，相去二步，其西表与敌营南北相直。人退西表一十二步，遥望东表，适与敌营圆边三合……欲知其营周及径各几何?”答数：营周 6 里 102 $\frac{6}{7}$ 步。

又如同卷第 4 题(望敌远近)：

“问：敌军处北山下，原不知相去远近。乃于平地立一表，高四尺。人退表九百步，遥望山原，适与表端三合，人目高四尺八寸，欲知敌军相去几何?”答数：12 $\frac{1}{2}$ 里。

以测量学理论评估：上举第 3 题，以相距 2 步，退行 12 步，这样小的差距，借助于相似三角形性质定理测远处直径 2 里左右圆营，精度到步的分数，这是不可能的。上举第 4 题以人目高与表高差 8 寸，经过平距 900 步(约合 1.5 公里)凭肉眼测远距 12.5 里也只是纸上谈兵。误差将达到不能允许的地步。为写数学教科书编题，确实首先应满足为阐述和应用数学理论的需要，但是不能远离或甚至脱离现实生活。当然这是对南宋时代数学家的过高要求。

二 工作态度

于此，三个问题应当提出：

其一，三国魏刘徽治学精髓之一是言必有据，遗憾的是在秦氏书中没有继承这一优良传统。以卷 5 第 2 题(三斜求积)来说，秦氏所拟公式为我国数学史填补了重要空白。我们认为如此周到而

繁复的公式决不是出于凭空想象，而是经过认真推导。[1]把推导过程写进书册，原本是举手之劳，不意他却没有这样做。有术无证，授人以柄。公式西来说至今犹甚嚣尘上，可能秦氏过于侧重数术之传以实为体，在实用、理论二者面前，实用优先，而把理论轻视到摒弃的地步。再如大衍总数术为我中华数学文化中最重要硕果之一，可惜在秦氏书中只论怎样算，却没有论述为什么这样算。

其二，从刘徽、王孝通开始，数学著作很难找到差错。王孝通上《辑古算经》表说："如有排其一字，臣欲谢以千金。"足为代表。秦氏书错误过多，例如卷1第2题(古历会积)算题本身矛盾无解，卷2第3题(程行计地)也有类似现象。在具体计算中错误更多，例如卷9第1题(复邑修赋)在252条答数中算错的竟达146处。在某种意义上说《数书九章》错误百出，并不过分。当然，说这些，并不掩盖名著光辉的一面，对后世著书立说者则是一个值得警惕的教训。

其三，秦氏成稿以前，我国数学成果已很丰硕。此书定稿，上距嘉定六年(1213)翻刊《算经十书》仅三十余年。秦氏身在中都，又居地方官多年，理应读到这部经典。然而前人许多精到创作，并未引起他的重视。例如对圆周率一般都取3，卷6第2题(环田三积)取$\sqrt{10}$，而卷16第2题(望知敌众)却取$\frac{22}{7}$，令人费解。在卷5第1题(尖田求积)归结为缺奇次项四次方程后，迳用数值解。对王孝通《缉古算经》第20题解双二次方程的简捷方法："开方除之所得，又开方除之"置若罔闻[2]。再说大衍总数术是孙子物不知数题的延续和发展，同龄人浙江临海杨辉书中提及孙子，并为引伸了四题，而居同省秦氏却不着一字。否则可以承前启后，前后

① 事实上从同卷第3题(斜荡求积)术文及草文中可以追迹此公式推导所自。

② 即使为阐述和作为例子正负开方，在全题适当地方也应提到双二次方程的另一种解法。

呼应，对后人学习上将起到积极作用。另如刘徽《海岛算经》九题中，测高、测深、测远等论述已很全面。在测望类所拟九题用《海岛》方法已足以解决。比如卷 7 第 2 题(临台测水)、卷 8 第 1 题(表望方城)、第 6 题(表望浮图)依次可按《海岛》第 4，3，1 题得解。[1] 而秦氏所拟方案，操作复杂，计算繁琐。这也是可引以为戒的教训。利用前人已有成果，在此基础上有所创新，才能起到事半功倍的效益。

三　设题作答问题

如果从传授数学循循善诱，由浅入深，从易而难等方面启迪后学的工作考虑，秦九韶有不如杨辉的地方。在其学术思想中，前已指出他在这方面的长处，但在秦氏书中又有不能忽略的缺点。例如设题过于牵强附会，使读者陷于一片迷惘之中。大衍求一术本身已很抽象，大衍类卷 1 第 1 题却列入蓍卦发微，题文深奥，玄之又玄。要搞懂题意解法甚至比领会大衍总数术更为困难。作为《数书九章》首题，将拒读者于千里之外，这样处理，很不得当。又如卷 8 第 6 题(表望浮图)要读者理解塔刹铁钉分布，很不简单，因而削弱了设题以明勾股测量本身的目的要求。此外古人还不明确所得数据精度要求应该恰如其分。例如像造城墙这样的大工程，用砖块数量精确到块数已非必要。卷 12 第 5 题(累收库本)，还本钱数精确到小数点后 11 位(共含 20 个)有效数字，同样是浪费笔墨。再如卷 12 第 6 题(米谷粒分)中凭一次抽样，在 1834 石含谷的米中计算总体含米数，精确到粒数也是徒劳的。

自从秦氏书被发现、被研读后，来自读者的批评与赞叹并存。当年修四库全书，馆臣首先敏锐地发现一批误导。对大衍总数术

---

[1] 钱宝琮，等. 秦九韶《数书九章》研究. 宋元数学史论文集，北京：科学出版社，1966：95～98

中“以借数损有、以益其无为正用”之说，指出：“定数一者即无用数。必虚为借数，未免徒滋烦扰。”对卷4第1题(揆日究微)作按语云：“各节气长皆当时实测所定，本不待求。今所设求法乃故为溟涬[①]，使人不可解也”。对于过多误算、错字，清顾广圻说：[②]“其题问与术草不相应，或术与草乖苍，且算数有误者，则当日书成未经亲自复勘耳。”我们应怎样看待这些纰漏？钱宝琮氏的观点是中肯的：“我们研究《数书九章》必须去粗取精，去伪存真，然后可以表彰秦九韶的伟大成就。”[③]

第三节 《数书九章》的流传及其版本[④]

一 手抄本

《数书九章·序》颂词之前、正文之末记：“时淳祐七年九月鲁郡秦九韶叙”。可见书成于南宋第五代皇帝理宗赵昀淳祐七年(1247年)。书成后，并未刊版发行。原稿几乎流失，书名也不确切。今仅存文献二则。其一，陈振孙《直斋书录解题·象纬类》：“《数术大略》九卷、鲁郡秦九韶撰”。其二，周密《癸辛杂识》续集卷下：“秦九韶字道古，……或以历学荐于朝，得对。有奏稿及所述《数学大略》。”二则所记书名只一字差异。

以后一个半世纪，其中历经元灭宋，明建国，秦氏书无人问津，杳无踪影……直至明永乐朝，永乐元年到六年(1403～1408)

---

① 溟涬，义：模糊不清。

② 顾广圻代夏文焘作“数书九章序”，《思适斋文集》。

③ 钱宝琮．秦九韶《数书九章》研究．宋元数学史论文集，北京：科学出版社，1966：64

④ 李迪．《数书九章》流传考．秦九韶与数书九章，北京：北京师范大学出版社，1987：43～58

解缙主编《永乐大典》，22 877卷，分订1 195册。当时正本之外，另录有副本一套[1]。其中"事韵"类卷16 329～16 364为算法。秦氏书被摘录分散在其中各卷，当时记书名为《数学九章》十八卷。

永乐十九年(1421 年)随着政府北迁，南京有一批书运到北京。书藏于礼部，无完整书目。后来杨士奇奉命将这批书"移贮于文渊阁。"并"逐一打点清切，编置字号，写定一本，总名曰《文渊阁书目》，正统六年(1441 年)编完。在这批书中，含完整《数学九章》一部三册。

又经过一百多年，文渊阁藏本被人录抄，此即王应遴万历年抄本，万历四十四年(1616 年)赵琦美有记说："数书十卷[2]，系赞九章。序东鲁秦九韶所作，……此书原阁抄本，会稽王云来(应遴)录得。予借录一过。册元止名《数书》，九章二字，乃王添入。"从此可见今称《数书九章》书名的由来。当时虽在民间有了抄本，但只是凤毛麟角，孤芳自赏，在学术研究上起不到什么作用。赵本后为清张敦仁收藏。

又经过一百年，清代乾嘉学派兴起。包括数学在内的研究气氛蔚然成风。《数学九章》从此辗转传抄，互相问难，探讨切磋，对本书研究颇有长进。当时朝廷派员在全国范围征集图书，于乾隆三十八年(1773 年)起开始设立四库全书馆编纂《四库全书》，到五十二年(1787 年)完成，共3 503种，36 078册。先后共抄七部，分藏北京、承德、杭州、沈阳等七地。其母本藏北京文渊阁，称文渊阁本。《四库全书》原始材料除取自民间外，另一重要来源，就近从宫廷所藏明编《永乐大典》副本抄录。皖南学者戴震当时任四库辑校，他就从《永乐大典》辑出《数学九章》十八卷。(图版一)《四库全书总目提要》说："是书分为九类：一曰大衍，以奇零求总数为九类之纲；

[1] 副本在清兵入关后仍藏宫廷，正本下落不明，至今是谜。

[2] 李迪认为，十卷可能是十八卷之误。

二曰天时，以步气朔，晷影及五星伏见；三曰田域，以推方圆幂积；四曰测望，以推高深广远；五曰赋役，以均租税力役；六曰钱谷，以轻重出入；七曰营建，以度土功；八曰军旅，以定行阵；九曰市易，以治交易。虽以九章为名，而与古九章目迥别。盖以古法设其术，九韶则别其用耳。”又说：“今即《永乐大典》所载，于其误者正之，疏者辨之；颠倒者次第之，各加按语于下，庶得失不掩，俾算家有所稽考焉”。

在宜稼堂刊本（1842 年）之前四十年间，据抄本研究《数学九章》的知名人士有：

戴震的学生孔广森，据文献记：“少曾师事休宁戴震，因得尽传其学。及官翰林，与窥中秘，得见……秦九韶《数学九章》……，由是精研九数，学益大进”。

孙星衍“充中秘详校官，并获睹翰林院所存《永乐大典》。”其藏书目录中有《数学九章》十八卷，应是自《永乐大典》抄本。

周中孚读过从文渊阁本《数书九章》抄本。

李潢藏有《数学九章》，张敦仁借抄一部，曾说：“余宦游江右，上交学使李云门先生，借录所藏秦、李诸书，乃得窥寻立天元一、求一之妙。及来吴门，有元和诸生李尚之锐笃好斯言。因与日夕讨论，研究秘奥。官曹多暇，辄依秦氏所说，略加修饰而衍之，得书一卷曰《求一算术》。以篇帙稍繁，分为上中下三卷，以究其原。”

秦思复（敦夫）家藏有《数学九章》，曾邀顾广圻（千里）校算，顾说：“敦夫太史校其家道古数书开雕，嘱文焘为之复算。”

李锐、焦循、汪莱、骆腾凤、沈钦裴等都据抄本《数学九章》研究，并发表心得、论著。[①]

① 详见第五编第二章。

二 木刻本和石印本

《数学九章》从《永乐大典》分韵目“肢解”状态下被辑录出来，又完整成整体，辑入《四库全书》之后，抄本一再传录，引起学术界很大兴趣。历经大约半个世纪酝酿，经校订后的木刻本才问世。这是一件很了不起的大事，对于秦氏书的广泛流传是必不可少之举。对国内学者的钻研是一福音，对国外学者也有极大影响。西方学者能了解我国13世纪时在数学上有如此辉煌成就，第一枝报春花是英人伟烈亚力(A. Wylie 1815～1887)给栽种的。这是伟烈在来华第五年(1852年)于上海攻读此木刻本后的读书报告。木刊本得以顺利的在上海出版，是主持人郁松年、江阴宋景昌(李潢再传弟子、沈钦裴及门弟子)以及毛岳生三人的功勋。其刊刻经过，郁松年在《数书九章札记·序》中(1842年)说得很翔实：“余既刻《清容剡源》二集，益思得宋元人秘笈。毛君生甫(岳生)为予言：秦道古《数书九章》思精学博，若大衍求一，正负开方两术尤为阐自古不传之秘。第其书转相抄录，讹脱滋多。元和(苏州)沈广文(钦裴)曾得明人赵琦美抄本于阳城张太守(张敦仁)家，订讹补脱，历有年所，以老病未卒业，其弟子宋君景昌，能传其学。余因嘱毛君索其原本，会广文病甚，不可得，得其副于武进李太史(李兆洛)家。毛君又出其家藏元和李茂才(锐)所校四库馆本，并嘱宋君为之雠校。嗣广文没，宋君又于其家搜得秦书刊误残稿数卷。于是以赵本为主，参以各本。其文字互异，又得两通者存其旧，其传写错落，无乖算术者随条改正；其术草纰缪，或误后学者采众说而折衷之。”一般说，木刻本尊重旧本、(赵本)基本承旧，只在《数书九章札记》四卷中，从头至尾对秦氏之作全面校勘，引述《四库》馆臣以来各家观点，并加注宋景昌本人意见，体裁同今人胡道静《梦溪笔谈校证》，很有参考价值和学术价值。

秦氏书于道光二十二年(1842年,丧权辱国《南京条约》签订之年。五年后伟烈来华,五年间能通读古汉语写的数学书,也是奇迹)出版，为了忠于旧本，书名也改为《数书九章》(《四库》本书名为《数学九章》分为九章)，列入郁松年编《宜稼堂丛书》。由于木刊本的流传，文人学士极易获得，因此从上世纪40年代开始，研究秦氏书的国内外学者和成果益为丰硕。另一方面有的学者据此木刻本作进一步校勘,代表作有无锡邹安鬯,他笃好天元一术。校读算书，每有心得，辄题于眉上。“尝以郁刻秦道古《数书九章》,谬讹错出,演算不易,故用力尤勤,而辨正为多。有沈、李、毛、宋诸家所未及者。窃拟编次其说，为《数书校议》一册”[1]。光绪二十四年(1898年)刘铎把邹校本《数书九章》收入《古今算学丛书》,此为木刊本发行后过半个世纪手工操作刊印的第二个版本——石印本。

三　现代印刷技术印本

辛亥革命后，现代印刷技术进入出版界。由于秦氏书学术价值高，国内外有很多学者相继悉心研究，已发表论著数以百计，《数书九章》原著及其校勘、译注、校证、导读迭有出版。

先是上海商务印书馆在30年代经王养吾、胡达聪校对、句读宜稼堂丛书本(含宋景昌札记)，以不同包装形式，出铅字活字本(同一内容)分别以《丛书集成初编》、《国学基本丛书》、《万有文库》(第一集)名义发行。校对和句读都很认真。此版本在国内外广泛流通。

80年代，台北商务印书馆发起，将台南图书馆藏《四库全书》母本——文渊阁本，全套缩小，原样复制精装合共1500册。秦氏九章列入第797册，在全世界发行。

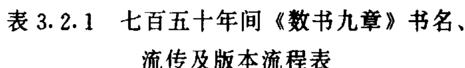
---

① 华世芳《近代畴人著述记》。

兰州王守义在1962年写成《数书九章新释》，李俨审校，李迪为序，于1992年在安徽科学技术出版社出版，印2 000部。90年代湖北教育出版社出版中国传统数学经典导读丛书，其中《数书九章导读》列入出版计划，陕西科学技术出版社出版中外古典数学名著，其中《数书九章校证》列入第七种，对新世纪《数书九章》的进一步钻研作了良好准备。

《数书九章》自1247年成书以来七个半世纪版本流程简图如表3.2.1。

表3.2.1 七百五十年间《数书九章》书名、流传及版本流程表



第三章 在《数书九章》所见南宋社会

《数书九章》序及其 9 章 18 卷凡 81 题，以南宋社会为背景命题，具有浓郁的时代气息。描述当时农事、工程、经济、军旅等方方面面实况。这与秦九韶甲子一生，富丽、浪漫[①] 一生密不可分：青少年时战火频仍，颠沛流离；成年后宦游遍历南中国，出川，巡江淮，晋京，直下琼崖。他广于交游，兼通文理，旁及文娱、武功。他善于观察周围事物，体会生活实际，勤于记录、思考、加工、组织，于是斐然成章。这在《数书九章·序》中他写得很真切："乃肆意其间……探索杳渺[②]，粗若有得焉……窃尝设为问答，以拟于用。积多而惜其弃，因取八十一题，厘为九章，立术具草，间以图发之。恐或可备博学多识君子之余观。"现在读《数书九章》除了领会其中数学成就外，还可以作为一部南宋时代社会史来读。反过来，要读懂《数书九章》也必须了解南宋社会有关细节。本世纪后半叶已有钱宝琮、李迪先后做了有关工作，发表了论文[③]。钱宝琮认为："有些题材表现出来的社会经济情况比《宋史·食货志》所记录的更为具体，更加翔实，可以作为研究南宋经济史的参考。"李迪认为："《数书九章》在某种程度上是一部经济数学专著。……这一特点，早有钱宝琮注意及此，笔者的这篇文章则作了进一步探讨，然而还有更深入研究的必要。"在两

---

① 浪漫，音译英语 romantic，义，富有诗意，充满幻想。此词我国自古有之，苏轼有诗："年来转觉此生浮，又作三吴浪漫游。"

② 杳渺：遥远，深远。

③ 见本卷分类文献目录。

位论述基础上我们再次作多方面探索和整理。

第一节　计　量

全书长度单位最大为里，下为丈、尺、寸。另在量地时用步，量布时用匹。其进制有别于秦汉、隋唐。

1 里＝180 丈；丈、尺、寸后有分、厘、毫、丝、忽等导出单位，都十进。

1 里＝360 步，1 步＝5 尺[①]，1 匹＝4 丈。

田亩面积单位同秦汉，但亩下设角。1 角＝$\frac{1}{4}$亩＝60 方步。方步下设分，一方步为十分。

容量单位同《孙子算经》，命名至撮止，无圭、粟。

衡单位斤下都十进：斤、两、钱、分（卷 10 第 5 题均科绵税）与隋唐前用五量有异，无石、钧、铢三种单位。

时间单位：年、月、日以下有刻、分、秒、小分、小秒（卷 3 第 4 题缀术推星）。其中：

1 日＝100 刻，以下均百进。

钱币单位，其基本单位为文。

1 贯＝1 000文。文下为分、厘、毫、丝、忽、微、沙、莽、轻、清、烟，均十进（卷 12 第 5 题累收库本）。

其中容量单位所值秦氏书中一再指出以文思院斛为国家标准量器。查《永乐大典》卷7512仓字韵（中华书局影印本）引《续宣城志》，有南宋嘉定九年（1216 年）至淳祐二年（1242 年）宁国府有关量器制造记事五千余字，其中有关文思院标准量器有二：其一

① 有时用 1 步＝5.8 尺（卷 1 第 3 题），有时 1 里＝300 步（卷 5 第 2 题）。

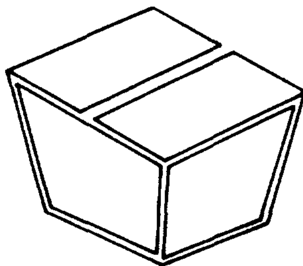
为斛：(圆柱形,图 3.3.1a)[1]

“嘉定诸仓斛内刊记：嘉定九年三月，宁国府照文思院降下铜式新置造斛，铁锢加漆。今后受纳，非此斛不得行用。江东提举、权府事李(押)”。“斛系众手杂造，外高则围径短，外低则围径长。审较之时，又加裁削，故斛微有不同。今措置，每斛［围径］各以尺为准。斛外自口至墙底高一尺二十七分，斛内自口至底面深一尺二十八分。”

其二为斗(方台形,图 3.3.1b)[2]



图 3.3.1a


图 3.3.1b

“嘉定九年三月，宁国府造文思斗，用此受纳。提举兼权府事李(押)。斗外自口至墙底三寸九分，斗内自口至底面深三寸六[3]分。明里口底九寸，明里底面方五寸六分。”

据此二文献，南宋时“斛”这一量器为圆柱形，并按宋尺 31 厘米折算，五斗斛应含

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\times1.28\pi\times(31)^2\approx29\ 949\text{立方厘米。}$$

1 斗应含5 989.4立方厘米。

南宋“斗”这一量器为方台形，1 斗应含

---

[1] 图系《永乐大典》复制。

[2] 图系《永乐大典》复制。

[3] 原为“三”字，与斛量出入过大，疑系“六”，抄写之误。

$$(0.9^2+0.56+0.9\times0.56)\times\frac{0.36}{3}\times(31)^2\approx5\,818.5\text{立方厘米。}$$

由于古时制造和度量技术不精，如果说南宋时国家标准每升值是600 立方厘米，出入不会过殊。

在上引《永乐大典》所说宁国府量器制造中，值得注意的另一桩事是：除了国家标准量器外，地方政府还自造大于文思院标准的大斛大斗，就在《续宣城志》中即发现在嘉定九年颁布国家标准前后几十年内，这种非法量器就有四种：

“宁国府循习旧例，受纳民户苗米，不用文思院斛斗……取斛斗较之，则本府现用受纳之斛比之文思斛加一斗四升八合；本府现用之斗比之文思斗加八升。”

“本府自来支遣军粮斛与文思斛不同。照得本府军粮斛比文思斛每石系加一斗二升。”

“收纳苗米加耗：一石取六斗五升文思斗……本仓今年受纳苗米，并用李提举每石加耗六斗五升立下斛样。造到斛十只……并有本府官押为照”。（图 3.3.1c 自《永乐大典》原图复制）

地方政府非法制造量器不限于宣城一地，而是宋代各地普遍现象。例如《宋史·吕大防传》：“大防知青城县……入以大斗，而出以公斗，获利三倍，民虽病，不敢诉。”

《宋会要》记有：“绍兴二十二年(1152年)右承议郎吴援言：“商贾细民私置斗秤，州县虽有著令，然私相转用，习以为常。至有百里之间，轻重多寡不同，……契勘民间田租，有以八十合、九十合为斗者，有以百五十合至百九十合为斗者。”



图 3.3.1c

《数书九章》有关问题中，正如实反映了南宋量器的紊乱。各地一石有大有

小，各地可以自造大斗大斛："课籴贵贱(卷 11 第 3 题)谈到平江(今苏州)每石折文思院斛[1] 130 升，而安吉(今浙江省湖州)、隆兴(今江西省南昌)、吉州(今江西省吉安)、潭州(今湖南省长沙)每石分别折文思院斛 110，115，120，118 升。其中平江、安吉，当时同属浙西路相距不过 300 里，商用市斛出入却悬殊如此。再如"囤积量容"题(卷 12 第 1 题)还讲到当时出租用斗，合$\frac{1}{3}\times(9.6^2+7^2+9.6\times7)\times4\times3.1^3\approx8\ 276$立方厘米，为文思院斛规定值的 1.38 倍，即大了 40%。这说明当时"大斗进、小斗出"损人利己实例。又秦题所说斛、斗形状与《续宣城志》正合。

在《数书九章》中提供我们南宋时白昼、黑夜起讫时刻弥觉珍贵。将在第四编第四章第二节范题分析"程行计地"(卷 2 第 2 题)中详及。

第二节　农　　事

全书内容很多涉及农事。这一方面是当时是农业社会，以农立国的必然，另一方面是秦氏主观上"以拟于用"——数学为农业服务的体现。这在他的序文颂词中一再流露着："三农务穑，厥施自天。""魁隗粒民，甄度四海。"……"河菑之扞，惟仁隐民。""赋役不均，宁得勿思?"……"粒粟寸丝，褐夫红女"……"惟俭昭德，兹焉取则。"作为数学家的秦九韶能从这些方面考虑数学为农业服务是很难能可贵的。

现就有关内容分天时、水文、水利、田域四段论述。

---

① 据《宋史·职官志》，文思院"掌金银、犀玉工巧及彩绘装钿之事。凡仪物、器仗、权量、舆服所以贡上方、给百司者，于是出焉。"可见文思院主管度量衡原器。又在《永乐大典》卷7 512仓字韵三一引《续宣城志》(中华书局影印本)找到文思院"斗"原器尺寸。详见第三章。

一 天 时

天时、地利、人和古称三才，是成事必要因素。不失农时，对农业生产来说尤为重要。《孟子·梁惠王上》说："不违农时，谷不可胜食。"《孟子·尽心上》说："百亩之田，勿夺其时。八口之家，可以无饥矣。"尔后政治家、思想家都有类似论述。而我国著名农学典籍，更具体地、定量地描述农时的重要性。例如二至与农事安排。综合如下表。[①]

表 3.3.1

时　间	农　事	文　献
冬至后五旬七日	于是始耕	《吕氏春秋·任地》
夏至后九十日	此时耕田，一而当五，名曰膏泽	《氾胜之书·耕田》
夏至前二十日	有雨，强土可种黍	《氾胜之书　种黍》
夏至后二十日	尚可种大豆	《氾胜之书·大豆》
夏至后七十日	可种宿麦	《氾胜之书·大小麦》
冬至后一百一十日	可种稻	《氾胜之书·种稻》
夏至先后各二日	可种黍	《四民月令·五月》

北魏贾思勰《齐民要术》，对各种作物下种时间与产量关系有进一步研究，如表 3.3.2 所示最佳时称"上"，其次称"中"，又次为"下"。

① 表 3.3.1、表 3.3.2 摘引自：曾雄生.《数书九章》与农学. 自然科学史研究，1996，3：207～218

表 3.3.2

作物	上时	中时	下时
水稻	三月	四月上旬	四月中旬
黍	三月上旬	四月上旬	五月上旬
大豆	二月中旬	三月上旬	四月上旬
小豆	夏至后十日	初伏	中伏
芝麻	夏至前十日	夏至	夏至后十日
大小麦	八月中戊前	下戊前	八月末九月初

从表可看出各个时段间距有的相差 1 月，有的十多天，有的只有 10 天之差。所以一本准确的历书对于农业生产起着非常重要的作用。冬至是岁首，其发生准确时刻是每部历法重点考虑和研究的。秦氏所设题卷 1 第 2 题(古历会积)保留了宋代历法官员探讨秦汉时四分历三种周期共公周期记录。而卷 3 第 3 题(治历演纪)保留了与《宋史·律历志》所记开禧历完全符合的积年年数，可贵的是正史只示结果，而秦氏书却原原本本地道及这个结果的第一手入算数据，建立同余式组解法全过程。卷 3 第 1 题(推气治历)从已知庆元四年(1198)冬至发生时刻在甲子后39.924 3日，绍定三年(1230)冬至发生时刻在甲子后32.941 2日，计算嘉泰四年(甲子，1204 年)岁余。什么是岁余？就是 360 日的尾数，也就是说借助于二次冬至发生时刻推算回归年长度。卷 3 第 2 题(治历推闰)从嘉泰四年冬至发生时刻在甲子后11.446 1日，十一月朔在甲子后1.775 5日计算闰骨、闰率。这无非是治历演纪题的准备工作，因此上引四题，真实反映出南宋历法官员对历法工作的一丝不苟，为农业制定历法最根本的问题——时间起算时刻，即时间原点的确定的认真负责态度。但这是指从星象观察和理论计算的一方面。从卷 4 第 1 题(揆日究微)我们还能看到南宋历法官员从晷影变化

反算阳城——当年北宋天文研究中心——节气发生时刻。此题是说：历代测量日影以唐大衍历为最精，而崇天历（北宋天圣二年甲子1024年启用）测得阳城冬至日影长12.715 0尺，夏至长1.477 9尺与大衍历所测相同。现行开禧历在临安测得冬至日影长10.822 5尺，夏至长0.91尺。要计算临安在夏至几日后的日影长与阳城夏至日的日影长度相等。答案是阳城夏至与临安大暑后五日影长相等，也就是两地物候气节来到时间差在一个月以上。显然这种计算对“不误农时”是非常重要的。

二　水　文

现代农业把“水”与土、肥、种……等同列为农业增产重要因素之一，各种水工建筑也以自然降水量作为设计的主要参数之一。我国自古以来农学专著记述水文与农业生产的关系的论述也十分丰富，例如《齐民要术·种谷》就说：“凡种谷，雨后为佳。遇小雨，宜接湿种，遇大雨，待秽生。”何谓小雨？何谓大雨？定量测定就需要量雨器皿。现代量雨器是口径、底径相同的圆柱形筒，积水深度就是平地降水量。秦氏书卷四第2～5题（天池测雨、圆罂测雨、峻积验雪、竹器验雪）既量雨又量雪。由于受雨（雪）容器不是等截面，秦氏作出准确计算，折成圆柱形（以口径为底径）。在“天池测雨”题一开始就说：“今州郡都有天池盆”。可见南宋时测雨量雨水文事业的普遍。在人类文化史上应是创举，而且同题答案“平地三寸”，是说一次降水后雨量约90毫米，这与江南年降水量约1 500毫米是真实的记录。欧洲今存最早气象记录是1331～1338年。[1]所以我国在13世纪使用的天池盆的科学记录也是世界之最。

---

[1] 英国牛津大学藏的手稿，见1912年第11版的大英百科全书（Encyclopeadia Britannica）第18卷，pp. 264～265.

南宋水文事业的发展和普及与其兴修水利是密不可分的。

三　水　利

两宋时代在扩大耕地，特别在与水争田方面，确实做了大量工作。北宋沈括说当时修筑万春圩："方是时，岁饥，百姓流冗。县官方议发粟，因重其庸以募穷民。旬日得丁万四千人……于是发原决薮，焚其菑翳，五日而野开。表堤行水，称材赋工，凡四十日而毕。……夹堤之脊，列植于桑，为桑若干万。圩中为田千二百七十顷。"① 及南宋，乾道九年(1173)有文献② 记道："宁国府惠民、化成旧圩四十余里，新增筑九里余。太平州黄池镇福定圩周回四十余里，延福等五十四圩周回一百五十余里，包围诸圩在内，芜湖县圩岸大小不等，周回总约二百九十余里。通当涂圩岸共约四百八十余里。"可见南宋继北宋之后造田活动继续在进行着。这是为了当时中央政府偏安江南，人多地少矛盾日益突出，扩大耕地成为当务之急。

在秦氏书中第五卷(田域)第九卷(赋役)第十一卷(钱谷)第十三卷(营建)都有有关问题涉及当时水利建设盛况，有的题还附精美插图。图 3.3.5 采自卷 6 第 3 题(围田先计)。我们整理如下：

开河筑坝、建埂(堤)圈圩：

问　　题	卷	题	摘　　要
计浚河渠	13	4	河长 48 里，"开通运河，就土筑堤"
计造石坝	13	3	坝长 30 丈，用夫 11 万 3 千余人
筑埂均劳	10	2	四县(7 720人)"共兴筑圩埂"长 36 里半

① 沈括. 长兴集·万春圩记，见四部丛刊本。

② 马端临. 文献通考·田赋六。

围田规模：

问　　题	卷	题	摘　　要
三斜求积	5	2	沙田成三角形，田积 315 顷
斜荡求积	5	3	荡田成四边形，田积 1 911 顷 60 亩
计地容民	5	4	沙洲成四边形，田积 203 顷 50 亩
围田先计	6	3	冬日水退“欲趁此时，围裹成田，田积 1 884顷 83 亩余

国家经济效益

问　　题	卷	题	摘　　要
复邑修赋	9	1	与海争田，“海坍复涨”共田达7 972顷 66 亩，重修税册
围田租亩	10	1	“兴复围田已成”计租米。共田3 021顷 51 亩余

四　　田　　域

秦氏在自序颂词中对第三田域所设九问阐明宗旨：“苍姬井之，仁政攸在……步度庀赋，版图是掌。方圆异状，斜窳殊形……差之毫厘，谬乃千百。公私共弊，盍谨其籍。”在其所设有关问题中我们可以了解南宋时代测定耕地面积和评定等级的实况。

在沿海傍江造田之后，首要措施是测量土地面积。秦氏书中一再提到沙田和荡田。什么是沙田？在秦氏稍后的农学专家王桢（13 世纪末～14 世纪）《农书》解释说：“沙田，南方江淮间沙汙之田也。或滨大江，或峙中洲。四周芦苇骈密，以护堤岸。其地常润泽，可保丰熟。”什么是荡田？荡，是指江河湖海沿岸原来长杂草之处，地势低下。在四周及其中间作水工建设后，就成为大片耕地，至今江南还有北草荡，皇天荡的名称。

由于南宋大面积造田，丈量土地频繁进行，这是合理播种、施

肥和估产、秋后交税(租)所必需。秦氏书中反映了南宋时代对面积度量的特点。其一，出现新的图形面积公式，如“三斜求积”，这是前所未有的。其二，用几何结合代数方法解决新的划分田地问题如“均分梯田”(卷5第6题)，这也是前所未有的。其三，对面积测量的精度提高了，亩和方步之间增添导出单位“角”(四分之一亩)，方步下又加设“分”(十分之一方步)，这也是过去未有的。

沙田、荡田大都是与水争田的成果，“不稳定”是它的特点之一。南宋时有文献记：“沙田者，乃江滨出没之地，水激于东，则沙涨于西；水激于西，则沙复涨于东。百姓随沙涨之东西而田焉。”在秦氏书中“漂田推积”(卷6第1题)正印证了这一事实：“问：三斜田，被水冲去一隅，而成四不等直田之状。”

希腊历史学家希罗多德(Herodotus，公元前5世纪)说：“埃及受尼罗河恩赐，这条河把南方的水一年一度地泛滥到沿河两岸之后，留下泛土。……每年涨水后，需要重新确定田地边界，才产生了几何学。”从某些意义讲，南宋大面积造田，同样促进了几何学的发展。

从秦氏所设问题，我们还能看到南宋时代评定税收、田租，不但考虑土地大小，还兼及土地质量，而且质量等级的评估可谓斤斤计较：上、中、下三等中又加密为上上、上中、上下等九级。占三万字篇幅的“复邑修赋”(卷9第1题)所载此邑有6乡，每乡土地各分三等、九级。共6×3×3＝54笔(内有七笔明确写无字)。各应纳米、绢，各按面积大小、等级加权分配，明细账有6×3×3×3＝162笔，其明细账当为真事实录，这是秦氏田域类颂词中结语：“公私共弊，盍谨其籍？”的体现。封建时代直至民国，官府税收，非常顶真。土地清册(籍)有专职人员管理，可谓代代相传，一脉相承。

第三节　营　造

南宋周密(1232～1298)《癸辛杂识·续集下》记秦九韶的营造活动时说："有地在湖州西门外，地名会上[①]。正当苕水所经，入城面，势浩荡。……建堂其上，极其宏敞。堂中一间横亘七丈，求海筏之奇材为前楣[②]。位置皆自出心匠。凡瓦脊、两翚[③]、搏风[④]，皆以砖为之。堂成七间，后为列屋。……其始谪梅，离家之日，大堂前大楣中断，人谓不祥。"于此可说明秦氏精心设计过极其宏敞的七开间住宅。按今存山西省五台县佛光寺金建文殊殿(1137年)面阔也是七间，明间、次间用减柱造复合梁，此梁跨度为10.12米(约合3.5丈)为《癸辛杂识》所记提供了实物旁证。秦氏选用进口上等木料，使明间额枋跨度长达7丈，是极大胆的构思。北宋李诫《营造法式》(1103～1106，下简称《法式》)卷26诸作料例中，模材是梁材中最大尺寸：长6丈至8丈，深2尺5寸至3尺5寸，宽2尺至2尺5寸。这种材料仅作库存，不用于实际工地。秦氏于1244年到浙江湖州营建住宅，1260年被贬谪广东梅州。如此大跨梁于建屋后16年"中断"，是很可能的。[⑤]在秦氏政治生涯中曾任和州守、琼州守、蕲州通判、建康(六朝都都于此)通判。他在处理本职工作中必须熟悉城建、农田、水利、军工和单个建筑等营造业务。在《数书九章》中除设专卷——第十三卷(营建)记载营造中的数学问题外，散见其他各卷也有不少描述。对照同时期

---

① 原著为曾上。

② 前楣即额枋，江南称柁梁，吴语柁为大，亦称大梁。

③ 翚，hui，两翚，指屋脊两旁鸱吻饰物。

④ 搏，指屋顶两山墙上的装饰，建筑界称"搏风"。

⑤ 江南多白蚁，杭州灵隐寺大雄宝殿在本世纪初建成后，受白蚁蛀蚀，其大梁在40年代中断。

有关专著及今存实物，不难发现他所论述的事例大率切中实情，而且不少是定量记录，正可以作为中国建筑历史文献的重要补充。

本节将分城池、水工建筑物、单个建筑物、建材和功限五段述说。

一 城 池

在封建社会，城池建设大都受《周官·考工记》影响，城以方整为主。周王城规模是“方九里、旁三门。”以后各朝名城迭出，汉唐两都：长安、洛阳即为著例。由于各种原因我国古城保存至今已极少见，城建专著素无问世，幸筑城之制在有关典籍中尚有零星记载。

北宋曾公亮《武经总要》(1044年，下简称《武经》)前集卷12守城篇有图、有说。略称：“三里之城万家守之足矣，作四门……城外凿壕，去大城约三十步。上施钓(吊)桥。壕之内岸筑羊马城，去大城约十步。凡城上皆有女墙。每十步及马面皆设敌棚、敌楼。”“筑城之法，每下阔一丈上收四尺。凡城高五丈、底阔五丈，上收二丈，尤坚固矣。”羊马城高可一丈以下，八尺以上。”“女墙高可五尺”“壕面各随其地为阔狭，大要在面阔、底狭，其深及泉，使箭炮难及，即住。”(图3.3.2a)

《法式》卷3论壕寨制度：“筑城之制，每高四十尺则厚加高一十尺。其上斜收减高之半，若高增一尺，则其下厚亦加一尺，其上斜收亦减高之半。”“城基开地，深五尺。其厚随城之厚。每城身长七尺五寸栽永定柱(长视高、径一尺至一尺二寸)、夜叉木(径同上、其长比上减四尺)各二条。每筑高五尺，横用纴木一条(长一丈至一丈二尺，径五寸至七寸)，每椽长三尺，用草蔓一条(长五尺，径一寸，重四两)。木橛子(头径寸，长一尺)。同书卷1总释引《周官·考工记》制度时又说：“城以盛民也。堞、城上女垣也。城上垣谓之睥睨，言于孔中睥睨非常也，……，亦曰女墙，言其卑小

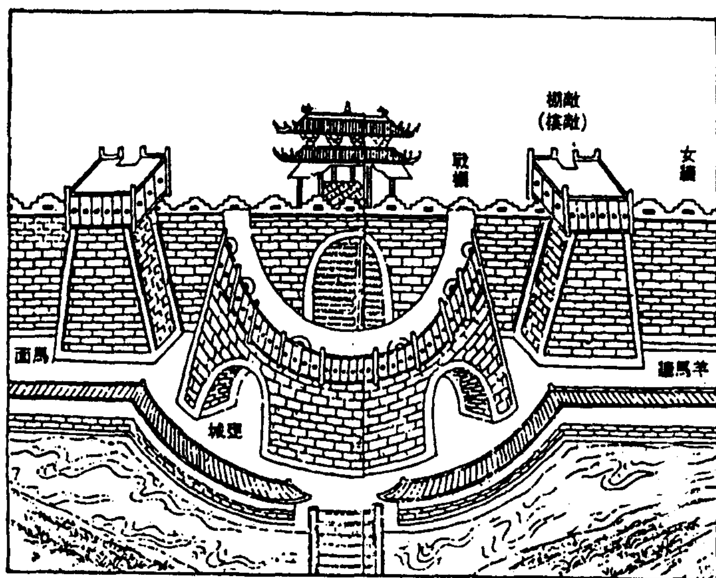


图 3.3.2a

比之于城，若女子之于丈夫也。”

《数书九章》卷 13 第 1 题（计定城筑）记宋时地方城池做法，根据题文、术文、演草及答案，宋城结构赫然可见，现在分段说明，并为补图。

一般布局

题文：“问淮郡筑一城，围长一千五百一十丈，外筑羊马墙，开濠。……，城身高三丈，面阔三丈，下阔七丈五尺。羊马墙高一丈，面阔一丈。开濠面阔三十丈，下阔二十五丈。……，取土用穿四、坚三为率。”

城围1 510丈，约合 10 里，每边 2 里半，与《武经》所说“三里（见方）之城，万家守之足矣”大致相符。

平面布置：大城、羊马墙、城濠等与《武经》所说一致。濠

面阔达三十丈，约合百米，与“箭炮难及即住”要求符合。

城身造法与《武经》所说大体能合，大城下阔 7.5 尺，应上收 7.5×4=30 尺，上阔应是 45 尺，当更为稳定。

羊马墙尺寸则与《武经》规定同。

开濠挖土按四比三折合为建大城及羊马墙所需坚土，二者出入平衡。[①]（图 3.3.2b）

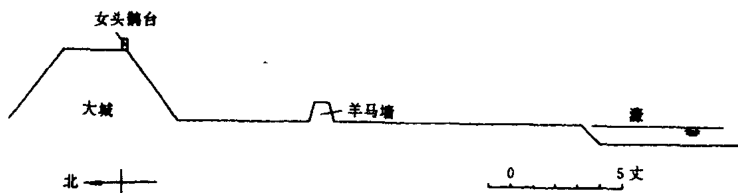


图 3.3.2b　淮郡城池剖面图

女墙造法

题文：“女头鹊台共高五尺五寸，共宽三尺六寸，共长一丈。鹊台长一丈、高五寸、阔五尺四寸。座子长一丈、高二尺二寸五分、宽三尺六寸。肩子高一尺二寸五分、宽三尺六寸、长八尺四寸。帽子高一尺五寸、宽三尺六寸、长六尺六寸。箭窗三眼各宽六寸、长七寸五分，外眼比内眼斜低三寸。”

女头鹊台即《武经》所说女墙，题文说共高 5.5 尺，与《武经》所记“高可五尺”一致。这也是《法式》所说堞、女垣。女墙的功能是“孔(箭眼)中睥睨[②]非常，用以攻敌。”题文说外眼比

---

① 《九章算术·商功》第 1 题术文：“穿地(挖土)四、为壤(壤土、耕作用松土)五、为坚(土)三”。开濠挖土截面为$\frac{300+250}{2}\times 8$(平方尺)，大城及羊马墙截面和按 4∶3 折成穿土为：$\left(\frac{30+75}{2}\times 30+\frac{10+5}{2}\times 10\right)\times 4\div 3$(平方尺)，二者都等于2 200(平方尺)。濠深尺寸见本题答数。

② 睥(bi)睨(ni)，义：斜视。

内眼斜低三寸，居高临下，能攻能守，设计合理。题文还给出女墙细部结构及尺寸，是难得的材料。（图 3.3.3a）

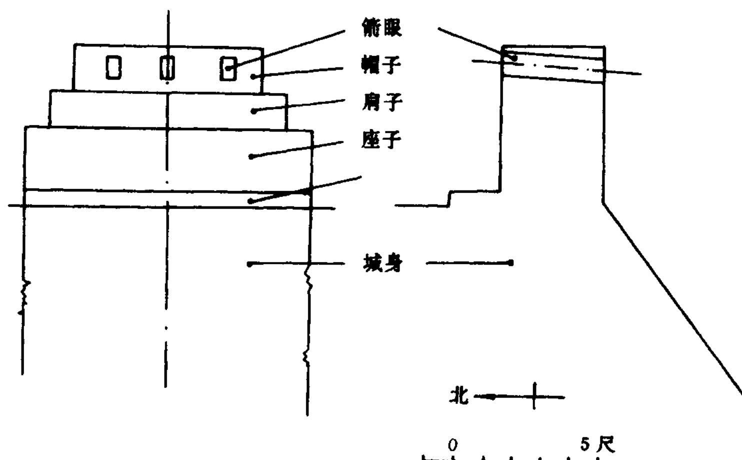


图 3.3.3a 淮郡城墙女头鹊台正面、剖面图

砖包、石基、木骨、土心城身造法

题文："周回石版，铺城脚三层。每片长五尺、阔二尺、厚五寸。""通身用砖包砌，下一丈九幅、中一丈七幅、上一丈五幅。砖每片长一尺二寸、阔六寸、厚二寸五分。""护险墙高三尺、阔一尺二寸。下脚高一尺五寸，铺砖三幅；上一尺五寸，铺砖二幅。""每长一丈，用木物料：永定柱二十条、长三丈五尺、径一尺。""爬头拽后木共八十条、长二丈、径七寸。""抟子木二百条、长一丈、径三寸。""纴橛二千个，每个长一尺、方一寸。""纴[①]索二千条，长一丈、径五分。"

题意城身每长一丈（高三丈）全用砖包，其做法是（图 3.3.3b）：

---

① 纴(ren)，义：交织。

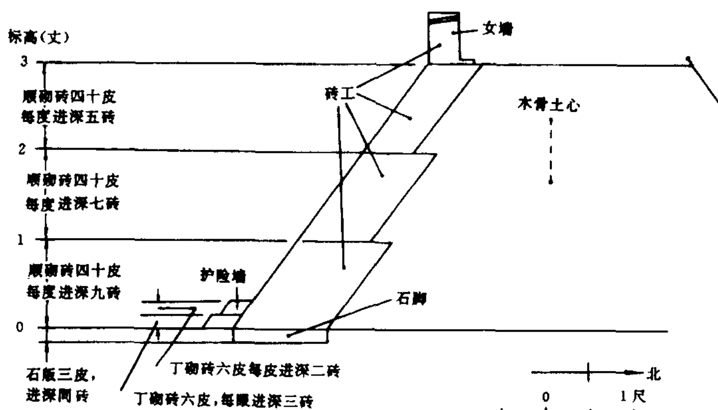


图 3.3.3b　淮郡城墙砖石用料图

从地面起高一丈范围内顺砌四十皮，进深九砖，共进深 0.6×9=5.4 尺；从高一丈起至二丈范围内，顺砌四十皮，进深七砖，共进深 0.6×7=4.2 尺；从高二丈起至顶也顺砌四十皮，进深五砖，共进深 0.6×5=3 尺。三者平均折算进深七砖，平均进深 4.2 尺，因此演草说城长一丈共用砖

$$10^2\times3\times7\div(1.2\times0.25)=7\ 000(\text{片})。$$

加固城身另做护险墙从地面起高一尺半范围内，丁砌六皮，进深三砖；高一尺半至三尺，丁砌六皮，进深二砖，平均进深二砖半，因此演草说城长一丈护险墙用砖数。

石基顺砌三层，进深同城身下层共进深，因此演草算得城长一丈共用石数。

为增强城身抗剪、抗弯应力，土心城墙加用木骨，从题文看淮郡所配木料是富裕的，城长一丈用：①永定柱 2 根、②爬头拽后木 8 根、③抟子木 20 根、④纴橛2 000个、⑤纴索2 000条。对照《法式》壕寨制度所用木料名称、尺寸大同小异，而用料较多。其具体结构虽已不可详考，大抵、①②二项为竖材，③④为横材，

再以筍卯、纤索连系，相互纽搭，纵横交错，形成有负荷功能的空间格网结构，以为城身强有力土心骨料，这是可以肯定的。

秦氏在题中所称淮城。如为淮阴，当时属金，秦氏隶宋，不能到达，淮城当为淮阳。据民国《淮阳县志》卷 4 记："明洪武驻跸于兹，命指挥贾齐等守焉。辛亥(1372，在秦后一百余年)指挥陈亨易城砖，袤七里有奇、高三丈。址广五丈五尺，顶广不及址十之三(按即顶广三丈八尺五寸)。……敌台三十九，堞计二千七百。……外环护城。"由此可见秦题淮城规模与之相仿佛，并非虚构，其来有自。

根据近年实测古城断垣资料来鉴定秦题，其数据也翔实可靠。例如河北省正定县古城墙系明清时真定府城旧物，是唐宋以来原土建城墙基础上发展起来的。今存城身较完整部分，上顶宽约九米五、六(约合三丈)。城墙外侧砖砌，从残迹部分看，原做法或用城砖，规格 0.46×0.23×0.1(单位米，约合 1.4×0.7×0.3 单位尺)或用小砖 0.33×0.17×0.06(单位米，约合 1×0.5×0.2 单位尺)。一般用城砖砌进深四砖，用小砖砌进深五、六砖不等。大体砖砌进深在 1.1 米或 1.2 米① (约合四尺)。城心夯筑素土，一般层厚 0.2 米上下。城脚砌青条石两层，层厚约 0.3 米(约合一尺)。四城门外还重点设防，类似秦题所说羊马墙而不通体连贯。②

二　水工建筑物

在上一章介绍秦氏书中颇多以水利为题的问答。本段选析三

---

① 南宋每尺合 0.309～0.329 米不等，这里作 0.32 尺折算。参见本《大系》第四卷附录。

② 实测资料见王璞子(故宫博物院)，明清真定府城，《中国古代建筑技术史》油印稿，1979。

题：

1. 计浚河渠

《缉古算经》第3至第5题讨论开河筑堤中的数学问题。《数书九章》卷13第4题(计浚河渠)开挖运河，就地筑堤，“面广六丈，底广四丈；上流深八尺，下流深一丈六尺，长四十八里。其堤下广二丈四尺、上广一丈八尺，长与河等。”如新开河河床为水平，则水面坡降为0.8÷(48×150)≈1：10 000，是很经济的水利设计。秦题所记水利工程较《缉古算经》所议开河一里二百七十六步规模要大多了。

坝是截水用水工建筑，《数书九章》卷13第3题(计造石坝)，全长30丈(合96米)，高4.2丈(合13.5米)。截面上底三丈、下底五丈(分别合9.6、16米)，用块石5×2×0.5(单位尺)十万零八百片。全石造。借此可见我国宋代水利建设一个侧面。

2. 陡岸测水

《数书九章》卷7第3题(陡岸测水)图3.3.4为原著书影，“行师(出征)遇水(河)，须计篾缆，搭造浮桥。”浮桥是水工建筑。我国最早文献记浮桥是《诗经·大雅》：“亲迎于渭，造舟为梁。”说的是周文王为娶亲在渭河上架设浮桥。距今已三千多年了。《张丘建算经》卷上第31题：“七百人造浮桥，九日成”规模也不小。浮桥主要组成部分有五：船只、缆(用以系船)、桩(用以系缆)、锚(用以固定船只)和埠头(浮船管理、及进出口)。只要具备上述设备，为达到两岸运输要求，有时“竟夕可成。”本题(陡岸测水)所作间接测量计算河宽是确定造桥最重要参数，以准备篾缆该有多长。《续资治通鉴·宋纪》记10世纪时宋太祖帅师十万进军江南，为建造长江上安徽省当涂采石矶浮桥时：“以小舫载綵绳其中，维南岸而疾櫂北岸，以度江之广狭，凡数十往返而得其丈尺之数”，可见要直接丈量，操作十分艰巨。本题改在陡岸做间接测望，计算河面宽23.46丈，以为造篾绳、定长度，是一大进步。秦氏同

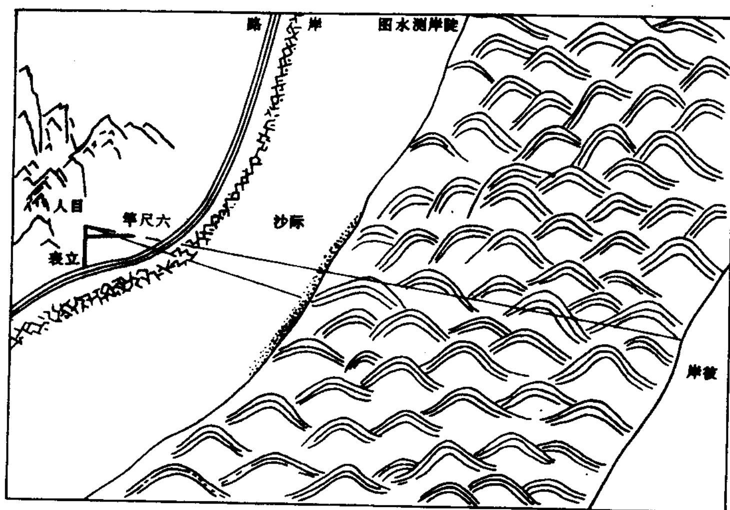


图 3.3.4

代人唐仲友于南宋淳熙七年(1780)到浙江省临海做官，次年在灵江上造中津桥，并撰写《中津桥记》说桥长“百十有五寻(8 尺为寻，合 92 丈)，为桥二十有五节，旁翼以柱，载以五十舟，舟置一碇(锚)……纽竹为缆，凡四十有二。……系缆以石狮十有一、石浮图二(作桩用)。”[①] 秦所命题水面视灵江为狭，而篾缆系舟，唐文亦有所述。

3. 围田先计

“问有草荡一所、广三里，纵一百八十里。夏日水深二尺五寸，与溪面等平。溪阔一十三丈，流长一百三十五里入湖。冬日水深一尺，欲趁此时围裹成田。(图见 3.3.5)

于荡中顺纵开大港一条，磬折通溪。顺广开小港二十四条，其深同。其小港阔比大港六分之一。大港深比大港面三分之一。大

① 民国《临海县志》卷 2，1935

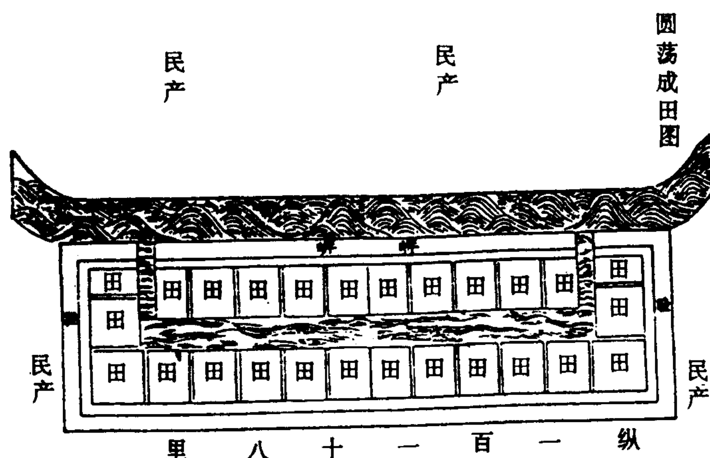


图 3.3.5

小港底各不及面一尺。

取土为埂，高一丈、上广六尺、下广一丈二尺。荡纵当溪，其岸高、广倍其埂数。

上下流各立斗门一所，须令田内止容水八寸，遏余水复溪入湖。

里法三百六十步，步法五尺，欲知田积，埂土积，大小港底面深阔、冬夏积水、田港容水、遏水、溪面泛高，各几何?”（卷6第3题）

围田或称圩田是江浙太湖地区农民重要治水造田经验之一。在秦九韶之前二百余年前，北宋范仲淹《答手诏条陈十事》（1043年）说：“江南旧有圩田，每一圩方数十里，如大城。中有河渠，外有门闸（按即斗门）。旱则开闸引江水之利，潦则闭闸拒江水之害，旱涝不及，为农美利。”

生活在秦九韶略后的元代著名农学家王祯《农书》记：“围田、筑土作围以绕田也。盖江淮之间地多薮泽，或濒水不时淹没、妨

于耕种。其有力之家、度视地形，筑土作堤，环而不断，内容顷亩千百，皆为稼地。……复有圩田，谓叠为圩岸，扞护外水与此相类，虽有水旱，皆可救御。凡一熟之余，不惟本境足食，又可赡及邻郡，实近古之上法，将来之永利。”

可见秦题所说围田、其水工建筑物(堤埂、斗门)、其规模都能反映当时确况。秦题所设数据如田积水八寸、田埂截面收分三比十也是合理的。但本题答数说夏日围田排水后使溪水泛高一尺三寸，显然是没有水力学根据的。

三　单个建筑物

秦氏可谓营造里手，在《数书九章》有关问题中所持建筑用语与《法式》很一致。如以做基础而论，在卷 14 第 2 题(堂皇程筑)中，夯实地基用杵手办法，对照《法式》卷 3 壕寨制度论筑基时说：“筑基之制每方一尺，用土二担。隔层用碎砖瓦及石札等，亦二担。每次布土厚五寸，先打六杵(二人相对每窝子内各打三杵)次打四杵、次打两杵、次打两杵，以上并各打平土头。然后碎用杵辗蹑令平。每布土厚五寸、筑实厚三寸，每布碎砖瓦及石札等厚三寸，筑实厚一寸五分。”从现存实物看，山西芮城县，元建筑永乐宫三座主要大殿(建成于 1262 年)于 1960 年迁移今址，当时曾对原址基础发掘，其做法与《法式》要求基本一致：“黄土和碎砖瓦渣隔层夯筑，层厚多数土层 9 厘米约合三寸，砖瓦层厚 5 厘米约合二寸。”[1]

以单个建筑物而论，在秦氏书中结合计算，除有文字阐述其内部结构而外，还有合理而精美、深合我国传统建筑习惯的插图。例如卷 7 第 2 题(临台测水)，其插图画着高台建筑(图 3.3.6)侧视图，在高三丈台基上建有单檐歇山殿堂，抟风板、垂鱼惹草

① 杜仙洲．永乐宫建筑．文物，1963，8

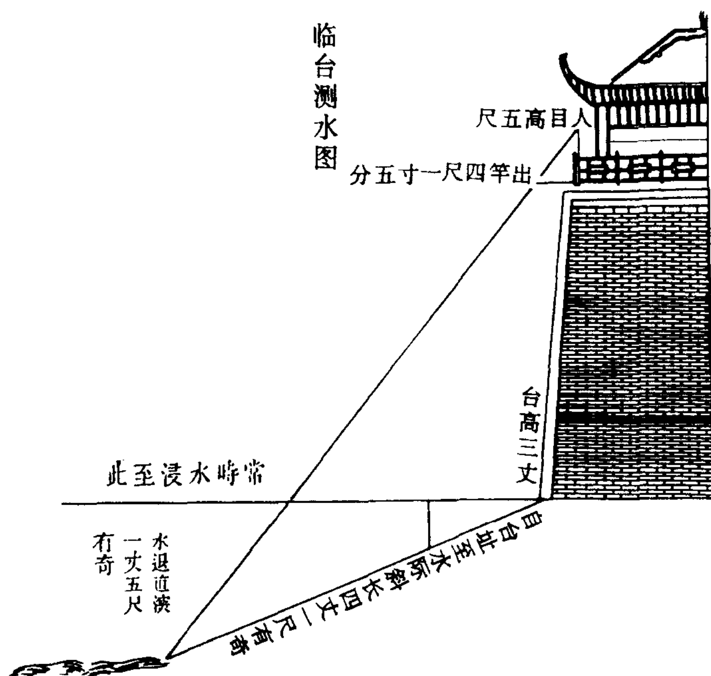


图 3.3.6

图案赫然可见。直棂窗、栏杆、望柱、寻杖、地栿俱全。在台基上还可见角柱、角石、压栏石。砖则为顺砌。题文说："台高三丈，其上址侧脚阔二尺。"按《法式》卷 15 砖作制度垒阶基一节说："楼台亭榭，每砖一层，上收二分。"砖厚二寸五分，高三丈计砖 120 块，共收二尺四寸，与题文所说侧脚数字大体符合。题文说："护下排沙石桩，去址一丈五尺"与《法式》卷 3 筑临水基所说："每岸长五尺，打桩一条"可以互相印证。

卷 12 第 2 题（积仓知数）、卷 14 第 2 题（砌砖计积）两题列举寺屋、堂屋、书院、后閤（阁）、亭子，并附间阔、进深尺寸，对照同时期文物也大致相符。

表 3.3.3

《数书九章》	宋尺		今存实址	折合宋尺		建造年代
	间阔	进深		间阔	进深	
寺屋	12～13	25～30	登封初祖庵	12	33	1100 年
堂屋	17	30	杭州吴宅载德堂	12.5	37	明
后阁	10～15	13	大同善化寺普贤阁	11	10	1143 年
亭子	14	14	曲阜孔庙碑亭	15	15	金

对于单个建筑物下面再选析二例。

1. 表望浮图

浮图为塔的别称，《数书九章》卷 8 第 6 题“表望浮图”为一测量题。本题插图为一七级六角(或八角)楼阁式塔。每级有栏杆平座、有出檐、攒尖顶，上有相轮，这是宋塔常见形式。从答案塔高 11.7 丈、相轮高 3 丈、塔身高 8.7 丈、塔心木(内 3 尺为剪截穿凿楯卯)9 丈[①]，可以画出剖视图。(图 3.3.7)以塔心木(从平地起)为主要承重构件的塔，我国现已无实物，本题提供了难得的文献资料。(图 3.3.8)为原著插图。对照插页，与湖州飞英塔很相似。(图版六)

江苏苏州市瑞光塔始建于吴(238～251)赤乌，后屡建屡毁。今塔主体结构系北宋宣和(1119～1125)时物。塔心砖柱，而于第五层顶部开始用木构架，施对角木梁，在木梁中心立塔心木。心柱周围用额枋等横材穿插形成格网架。今塔相轮久已失去，所存复钵离地 43.2 米，[②] 合宋尺 13.5 丈，较秦题七级塔高过半。(图 3.3.9)

① 经后人验算：相轮高应为 4.5 丈，塔心木高应为 7.5 丈。

② 苏州瑞光塔实测数据及图均采自：张步骞．瑞光塔．文物，1965，10：

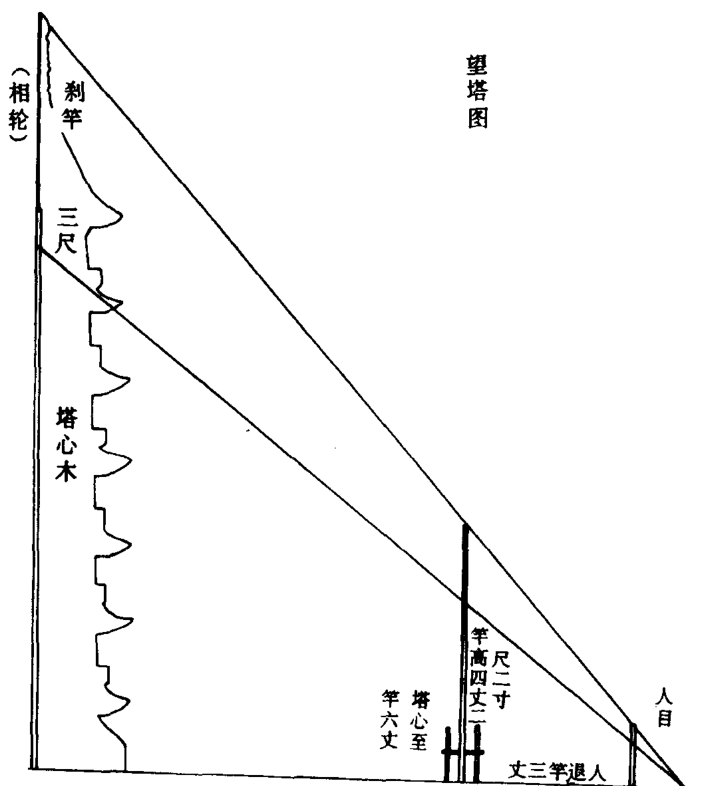


图 3.3.7

以塔心木为主要承重结构件的古塔，在日本现存实物较多。例如日本推古天皇十五年(607)所建仿华木构奈良法隆寺五重塔，平面正方形，每级有栏杆、平座、有出檐，一如秦题插图。四拈尖顶。此塔高 105.2 日尺[①]、相轮占塔高七之二，约 50 日尺，则塔心木约高 75 日尺，合宋 7.1 丈，与秦题所记塔尺寸近似。“礼失

① 1 日尺合 0.303 米。

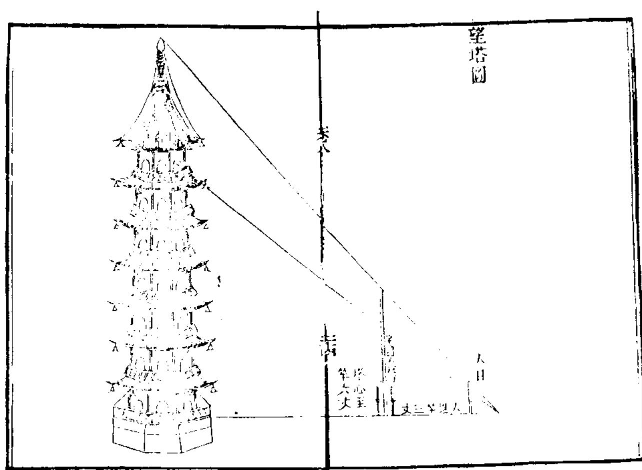


图 3.3.8

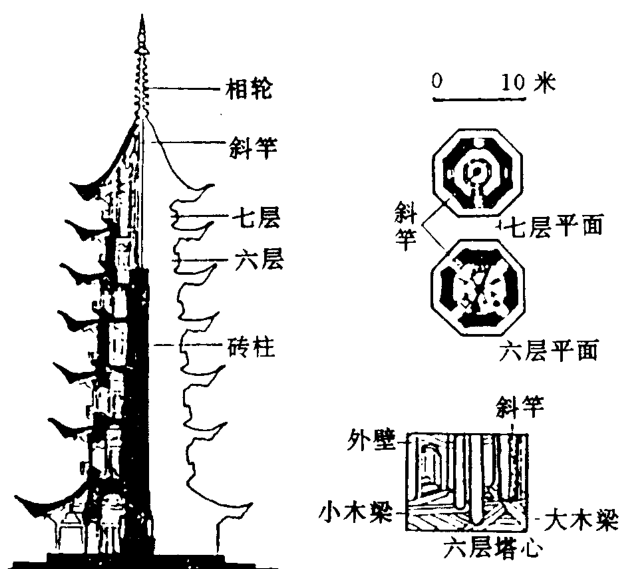


图 3.3.9

而求之野”，借此可知秦氏浮图是有实据的。

2. 计作清台

高台建筑在居住生活上可以防潮，可以临风、纳凉、赏景，又为天文观测、军事防御所必须。历史记载很早就有这种建筑形式。我国有烽火台，西亚两河流域有观星台、通天塔以及史称巴比伦空中花园均属之。从考古发掘和文献记载可知，我国远自夏、商、周三代以来高台建筑已盛行：有的利用天然地形、有的人工夯土成台、四周砌以砖石，台上营建宫室以应各种特殊需要。但迄今对这种建筑形式和结构甚少论述。

唐王孝通《缉古算经》(七世纪初)第2题记天文历法专用、太史所造仰观台，从题文及答案知此高台形状为一拟柱体。其大小尺寸是：“台高十八丈、上广七丈、下广九丈，上袤十丈、下袤十四丈。羡道高十八丈、上广三丈六尺、下广二丈四尺、道长十四丈。”规模恢宏。从题文看，此台靠南面、即东西向，前壁为竖直面，从地面到台顶，惟一通道——羡道，坡度陡峭达$\frac{18}{14}>1$。高台收分为$\frac{1}{9}$。(图3.3.10)

描绘北宋晚期宣和年间(1119～1125)汴京繁荣景象的张择端《清明上河图》上有城门系高台建筑。据此轴测图附近人物高底推算，此高台视《缉古算经》仰观台具体而微，顶系2×4，基部4×6，高3(单位丈)，从地面到台顶也有惟一通道，坡度也是斜率大于1，十分陡峭，高台收分约为$\frac{3}{10}$。

识者都认为秦题(计作清台)应有实物为蓝本，而且清台就是观象台，今称天文台。《秦九章》提到太史，太史是太史局的负责官员。天象观测是太史局的本职工作。文献记：“乾道五年(1169年)太史局官员程太昌等所供正月内太阴九道宿度，赴太史局测验上

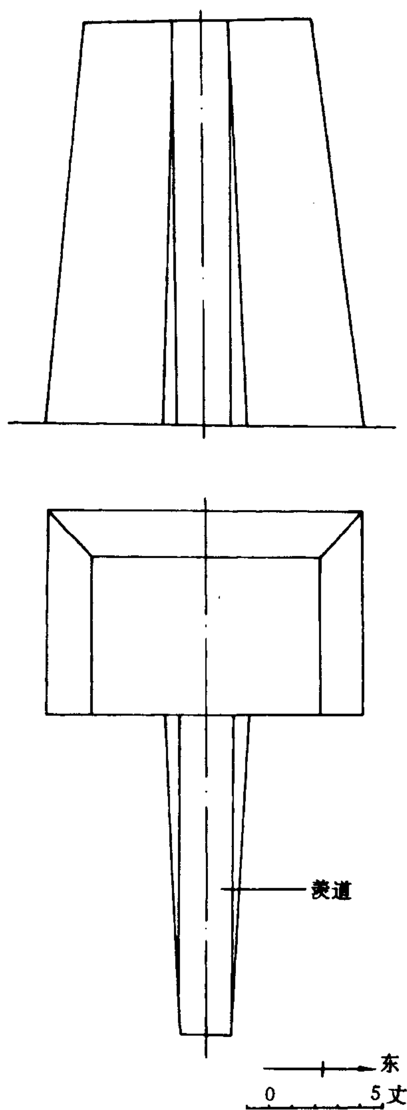


图 3.3.10

中旬完毕"[①]，文献又记："太史局在吴山"[②] 吴山即城隍山，今杭州市中心之南，左(钱塘)江右(西)湖，视野开阔，当是建立天文台理想之地，有"立马吴山第一峰"之誉。十年前杭州电视台发射塔就在吴山。今建城隍阁将是杭州园林的聚焦点。从秦题可以复原南宋观象台原貌，笔者于1986年即借以作图(图3.3.12)，四库全书文渊阁《数学九章》本插图系鸟瞰图(图3.3.11b)与一致。宜稼堂本插图不符题意(图3.3.11a)。

《数书九章》卷14第1题(计作清台)绘有高台建筑(图3.3.11a)，我们分土心台体、砖包石基、螺旋盘道三方面探讨。

土心台体

题文："正高一十二丈、上广五丈、袤七丈，下广一十五丈、袤一十七丈。其袤当东西、广当南北。"

此台规模与《缉古算经》所记仰观台相仿佛，而四面收分都取$\frac{5}{12}$，视《清明上河图》城门高台更臻稳定。

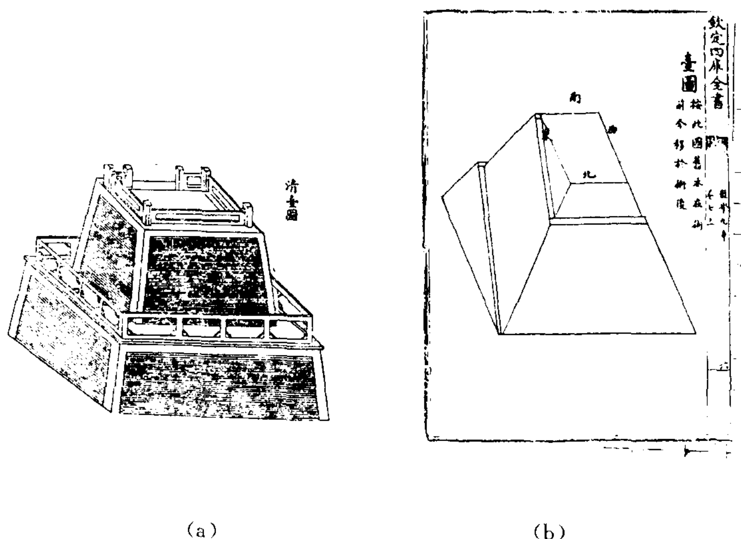
砖包、石基

题文："台下铺石脚七层，先用砖包台身。""石长五尺、阔二尺、厚五寸，砖长一尺二寸、阔六寸、厚二寸五分。"题文没有讲进深砌多少砖块，参照术文、演草及答案，宋景昌《札记》认为"台身外四面砌砖，多加六尺。"这就是说高台系土心，外包顺砌进深十砖，或丁砌进深五砖。即包砖后高台实际尺寸是上底6.2×8.2，下底16.2×18.2(单位丈)。这种做法与《法式》卷15垒阶基之制，"高四丈以上者用六砖相并"所要求是符合的。(图3.3.11为原著插图、图3.3.12为示意图)

---

① 《宋史·律历志》卷82。

② 周淙.《乾道临安志》。



（a）　　（b）

图 3.3.11

螺旋盘道

题文："次用砖叠砌转道，周围五带，并阔六尺。须令南北二平道，东西三峻道相间。始自台之艮隅，于东外道向南顺升。由巽隅以西左转，周回历北复东，再升东里道，至巽隅乃登台顶。其东里道艮隅与北平道两隅、及西道乾隅之高皆以强半。其西道坤隅与南道两隅、东外道巽隅之高皆以五分之二。峻道每级履高六寸。"

《缉古算经》用单跑羡道，斜率大于 1，借此上、下十八丈高台很不方便。本题采用周围螺旋盘道，在建筑设计上是一大进步。

沈括《梦溪笔谈》卷 18 技艺营舍之法，论阶级有峻、平、慢三等。本题则设峻道三、平道二。题意登台盘道从台基东北角（艮隅）起始为斜坡（AB、峻道称东外道），到东南角（巽隅）拐西为南平道（BC），至西南角（坤隅）拐北为斜坡（CD、称西峻道）迄西北角（乾隅），然后折向东为北平道（DE），迄东北角弯向南又为峻道

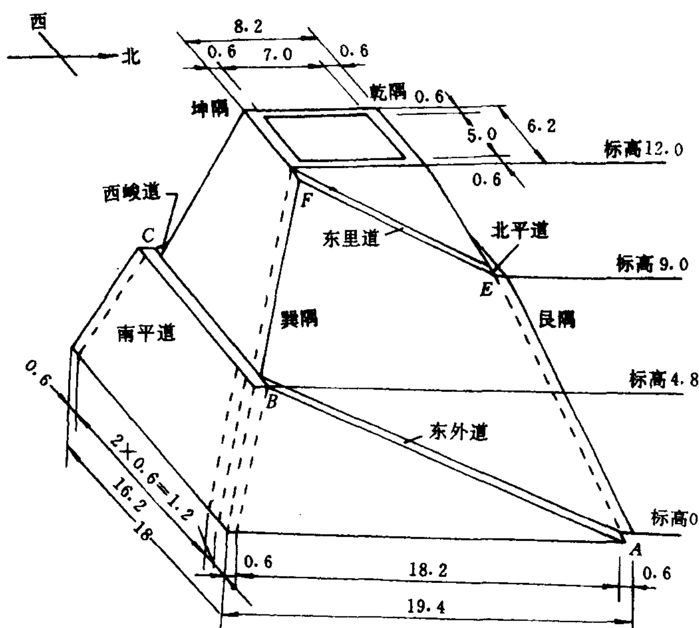


图 3.3.12

(*EF*、称东里道)，直达台顶，各转折点标高根据题意，*B*：$12\times\frac{2}{5}=4.8$(丈)，*E*：$12\times\frac{3}{4}=9.0$(丈)。盘道宽度六尺，行人登、降照面已绰乎有余。题文规定每级高(履高)六寸，合公制 16 厘米左右，与今用相同。

东外道其下砖壁为一三角形，西峻道、东里道下砖壁各构成一不规则四边形(图 3.3.12)，其有关数据可计算如下表：

表 3.3.4

道　　名	东外道	西峻道	东里道
升角	17.2°	19.2°	20.8°

续表

道　　名	东外道	西峻道	东里道
级数	80	70	50
道长(丈)	17.59	13.82	9.14
平距(丈)	0.220	0.197	0.183
道下砖壁面积(方丈)	48.88	97.04	154.70

每级平距，题文称踏纵，《法式》称广。《法式》卷15砖作制度说："踏道每一踏高四寸、广一尺"。本题每级既定高为六寸，各峻道之广分别算得为22、19.7、18.3寸。秦所用绝对尺寸偏大，而斜率$\frac{6}{22}$，$\frac{6}{19.7}$，$\frac{6}{18.3}$，均视《法式》所定$\frac{4}{10}$为平缓。

从现存实物看，螺旋盘道高台建筑以元初(1271年元朝始)所建河南登封县郜成镇观星台与本题所记高台最相类似。观星台台基16.88×16.7(单位平方米，合5.28×5.22平方丈)，台顶8.16×7.82(单位米，合2.55×2.44平方丈)，高10.49(单位米，合3.28丈)，除其北侧面因安放铜表陡直外，其余各侧面收分约$\frac{1}{4}$，比较秦氏题所设$\frac{5}{12}$陡削。观星台盘道左右对称，北峻道为双跑，东西峻道各一，南峻道又为双跑，峻道斜率均较秦题略陡(图3.3.13)。实物可征，愈见秦题非自虚构。[①]

四　　建　　材

古时建筑材料只是土、石、砖、木四种而已，金属材料仅用于少数铜件铁件。

---

① 郜成镇观星台实测数据及图均采自刘敦桢，周公庙，《中国营造汇刊》卷6第4期，1937年

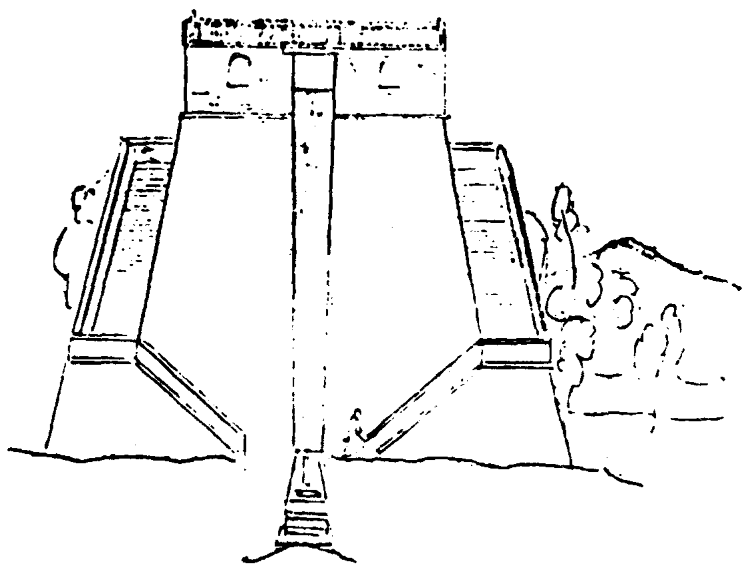


图 3.3.13a

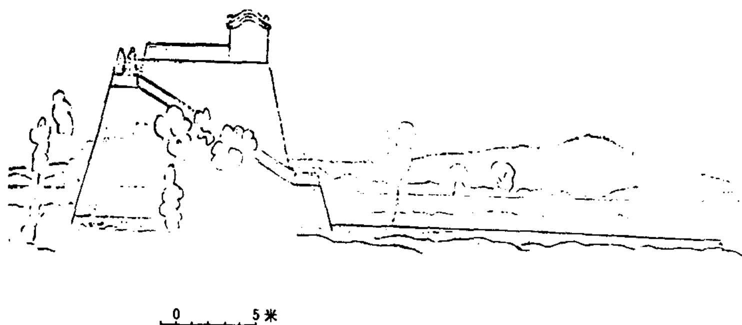


图 3.3.13b

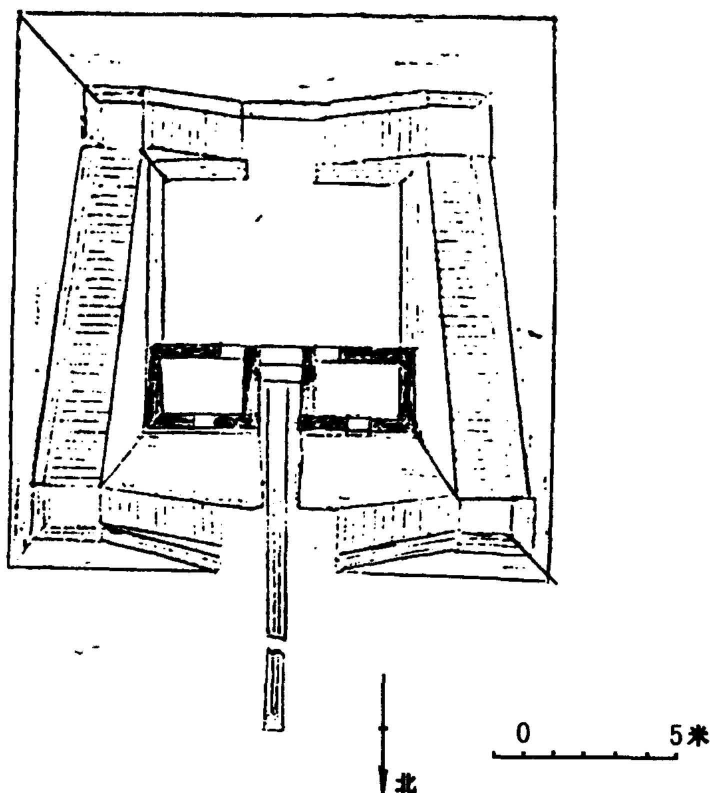


图 3.3.13c

土 《九章算术》商功章为“以御工程积实”而作，其中主要论述与军事、水利工程有关的挖土、填土土方计算。规定按体积穿(挖)土四、折合填土：壤土(疏松耕种用土)五、坚土四。我们已在本文第1节注中应用。

石 《法式》卷3石作制度所说土衬石尺寸是3×2×0.5(单位立方尺)，《数书九章》有关各题所用石料规格是5×2×0.5(单位立方尺)视《法式》尺度较大。

砖 《法式》卷15砖作制度所列块砖标准，对照《数书九章》有关各题用砖大致相符，列表如下：

表 3.3.5

种类（单位：立方尺）	《法式》规格（单位：立方尺）	《数书九章》	
		规　　格	所引题名
方砖	2×2×0.3 1.7×1.7×0.28 1.5×1.5×0.27 1.3×1.3×0.25 1.2×1.2×0.2	1.3×1.3 1.1×1.1	积尺寻源
条砖	1.3×0.65×0.2 1.2×0.6×0.2	1.2×0.6×0.25	积尺寻源、计定城筑、楼橹功料、计作清台
六门砖		1.0×0.5×0.2	积尺寻源

木 《数书九章》卷13、卷14营建类中提到建筑木材多种，如果我们就卷13第1题“计定城筑”与《法式》卷3壕寨制度城建用材作一比较如表3.3.6，二者所用名称、尺寸也大致符合。

表 3.3.6

计　定　城　筑		壕　寨　制　度	
材料名称	尺寸(单位尺)	材料名称	尺寸(单位尺)
永定柱	∅1.0 长 35	永定柱	∅1.0～1.2 长 30
爬头拽后木	∅0.7 长 20	夜文木	∅1.0～1.2 长 26
抟子木	∅0.3 长 10	纴　木	∅0.5～0.7 长 10～12
纴橛	∅0.1 长 1.0	木橛子	∅0.1 长 1.0

铁件 《数书九章》卷13第2题(楼橹功料)用钉，对照《法式》卷28诸作用钉，能一一对应，列表如下：

表 3.3.7

楼橹功料	诸作用钉
一尺钉	葱台头钉长一尺
八寸钉	猴头钉长八寸
五寸钉	圆盖钉长五寸
四寸钉	葱台长钉长四寸

五　功　限

在土木建筑施工中我国把一人一日工作量称为一功(I)。由于各种因素，一人一日工作量并非一成不变，我国自古以来合理地估测这种浮动规律。

季节

《九章算术》商功章按四季不同规定挖土工每日工作量：

春程人功　766 立方尺

夏程人功　871 立方尺

秋程人功　300 立方尺

冬程人功　444 立方尺

《孙子算经》、《缉古算经》都有类似规定。反映唐代政治、经济实况的《唐六典》也记道："凡役有轻重、功有短长，以四月、五月、六月、七月为长功，二月、三月、八月、九月为中功，以十月、十一月、十二月、正月为短功。中功以十分为率，长功增一分，短功减二分。"原因是："夏至日长有至六十刻者，冬至有止于四十刻者，若一等之功则枉算日刻甚多。"《法式》记功因袭《唐六典》。在《数书九章》有关算题中也按季节论功，如卷 13 第 4 题"计浚河渠"中说："秋程人功其积 60(立方)尺"。

运输

《九章算术》商功章第 21 题记负土往来七十步，由于其中有二十步上下棚除(脚手架)二步作五步计，踟蹰(徘徊不前，行走不

便)每十步加一步、载输之间(装御)作三十步计，因此七十步作平地运输一百四十步计算。

《数书九章》卷13第4题有与商功章第21题类似问题，而卷14第1题“计作清台”，从平地某处运输到台顶一百六十步，其中四十步要上、下脚手架折算为平地步数就比较复杂。题文说：“往来一百六十步，内四十步上下棚道、筑高至少半，其棚三当平道五，至中半、三当七，至太半、二当五。踟蹰之间、十加一，载输之间二十步”。其中上脚手架四十步折算率分四段：

表 3.3.8

段	起讫高程（单位尺）	升高(单位尺)	折算为平地运输(单位步)
1	$0\sim\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}$
2	$\frac{40}{3}\sim20$	$\frac{20}{3}$	$\frac{20}{3}\times\frac{5}{3}=\frac{100}{9}$
3	$20\sim\frac{80}{3}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{20}{3}\times\frac{7}{3}=\frac{140}{9}$
4	$\frac{80}{3}\sim40$	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{200}{6}$
			共$\frac{220}{3}$步

而包括上脚手架40步在内的160步，折算为平地运输，应是：

$$\left(120+\frac{220}{3}\right)\times(1+10\%)+20=232\frac{2}{3}(\text{步})$$

工种

《数书九章》有关问题所列不同工种，每功工作量与《法式》规定的比较，举例如下表：

表 3.3.9

工种	《数书九章》	《法式》
木	永定柱串凿，栽埋合一功	做柱一条（径1.1尺、长1丈5尺计一功）

续表

工种	《数书九章》	《法式》
土	担（运输）土 锹(挖)土 杵(夯)土　}功计 60 立方尺	诸殿阁廊基地开掘就土铺填打筑，60(立方)尺计一功
石	石匠每砌 9 片(2×5×0.5 单位尺)计一功	踏道石每段(3×2×0.6 单位尺)安砌工每段计一功
砖	每砌 700 片(1.2×0.6×0.25 单位尺)计一功	垒墙(1.2×0.6×0.2 单位尺)每 200 片计一功

可见两书计功标准是一致的。

第四节　经　济

宋室南渡后建国仅一个半世纪，迄 13 世纪中叶，即《数书九章》成书年代，政体动荡不安，在经济上引起币制混乱，物价飞涨，官府豪门趁机巧取豪夺，税收、取利名目繁多为秦题中常见。下面分币制、物价、税收、利息四方面进行分析。

一　币　制

宋室南渡以后，不但中原陕右为金人所据，长江以南江西、浙江、湖南也曾受蹂躏，逃难到南方来的流亡者把大批铜钱遗落在汴京，带不出来。江南的铸钱设备又受战争影响而荒废，而且原料：铜、铁、铅、锡供应也成问题。政府首要之举是恢复铸钱，但心有余而力不足，有文献记绍兴(1131～1162)初年每年只能铸十万缗(贯)，却花了二十万成本。后来又收敛民间铜器，每年(如绍

兴六年)所铸也不过四十万缗，再加上近邻国家铸钱技术落后[1]，靠中国铸钱作为流通货币。原来政府禁止铜钱出境，偷运一贯就问死罪，熙宁七年(1074)开禁后，于是“边关重车而出，海舶饱载而归。”当时沿边州军遇到铜钱出境，竟只论贯收税，这是造成钱荒的另一个重要原因。此外民间窖藏也不在少数，使现钱愈加欠缺。更有甚者，北方的金人有计划地吸收江南的铜钱，他们虽然自铸，数量不多，大部分用宋钱，还在汴京发行纸币，收兑宋钱。

上述钱荒现象在《数书九章》卷1第4题(推库额钱)的描写极为真切：“近缘现钱稀少，听各库照当处市陌”，所谓各地市陌，即当作百文的分别是6，7，8，9，10，11，12文，也就是说一贯仅有60，70，80，90，100，110，120文，可见钱荒之甚。

对于钱荒，南宋政府自然非常重视，曾采取措施如下：令恢复禁止现钱出境，用铁钱代替铜钱。但是利之所在，官私冒禁，比比皆是。而对这一国计民生重大矛盾，发行纸币就顺理成章地诞生了。

纸币是中国发明的：西汉有白鹿皮币，唐有飞币，但仅是一种尝试。北宋大中祥符二年(1009)，政府发行纸币，称为交子，以770文为贯，面额有一、五、十贯。南宋绍兴年间在杭州设立交子务，但发行的纸币改称会子。(图3.3.14)纸币上半为赏格：“敕伪造会子犯人处斩。赏钱一千贯，如不愿支赏，与补进义校尉……。”赏格之右为金额“大一千文省”(足钱770文)，左为编号。赏格之下为发行机关“行在会子库”[2]，再下为防伪图案，用土朱、靛青、棕墨三色套印。面额有100，200，500，一贯四种，乾道四年(1168)规定三年为一界，收回旧的，换新会子。在战争状态下，会

---

① 相当于南宋时日本镰仓成立军政府(1185)，组织一批商人从中国输入铜钱。日本民间通行宋钱，近代日本考古发掘的古钱，绝大多数是宋钱。上述材料摘自：彭信威. 中国货币史. 北京：人民出版社，1965：481～482

② 行在：古称皇帝暂住处所为行在。南宋为不忘首都在汴梁，称临安为行在。

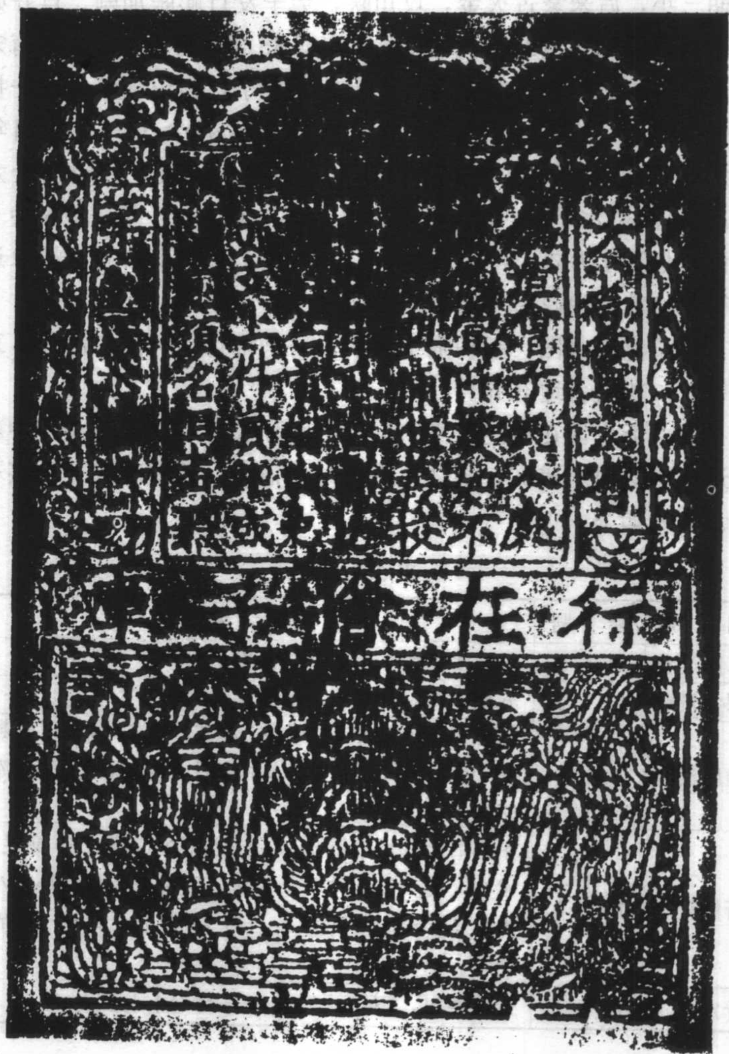


图 3.3.14

子的发行难免膨胀。淳熙三年(1176)规定第三界、第四界会子各

展期三年，后来蒙古灭金，攻川陕，会子发行膨胀加剧。自开始发行到绍定三年(1230)，发行额增加了65倍。当金亡时，即南宋端平元年(1234)发行第十六、十七两界会子，据记载新会子一贯值钱429文。端平二、三年准备造第十八界会子，嘉祐四年(1240)规定以十七界会子五贯抵十八界会子一贯，并收回十六界。① 至淳祐六年(1246)即秦氏写《数书九章》前一年，各界会子共计六亿五千万贯，淳祐八年(1248)规定十七、十八界会子永远通行，也就是说政府不再以硬币回收。

会子流通范围，起初限于两浙，后来推行到两淮、湖北、京西等区。所值各地有异。②

秦九韶生活在特定的南宋混乱币制环境中，在他的命题中就把这些现象组织成文，生动地透露时代信息，切中时弊，真实不虚。列表如下：

表 3.3.10

问　　题	卷	题	摘　　要
筇回运费	11	2	每石水脚钱1贯200文，用十七界会子开支
课籴贵贱	11	3	五地付米款“其钱十七界官会。”
推库额钱	1	4	把息钱26 950文折合旧会、术文、草文，就是以陌数的十倍作为一贯所值。如甲库旧会值120文，而已库旧会仅值60文。
折解轻赍	11	1	甲郡旧会每贯值钱54文足，乙郡每贯值钱59文足，术文又说：“以五约旧会为新会”，可见新会就是十八界会子，每贯值不过二、三百文，而旧会就是十七界会子。
计定城筑	13	1	造城费用：“新会，二十万三百七十七贯文。

① 《续文献通考·钱币一》卷7。

② 均据彭信威《中国货币史》pp. 481～501。

与会子同样起到纸币作用的，在南宋还流通度牒。自来僧、道免税，政府开给僧道的身份证明称为度牒。在宋代，一纸度牒却作为有价证券。彭信威据《燕翼贻谋录》说："北宋初年，每张值130贯、元丰六年(1083)增值到300贯。南渡后重新发行，起初每张值60贯，后来涨到100贯，淳熙初(1174年后)又涨到300贯。以后扶摇直上，每张自500，700到800贯。

秦题多次提到度牒及其每张所值，当是两宋货币史很有价值的文献[①]。即立表如下：

表 3.3.11

问　　题	卷	题	摘　　要
均货推本	17	2	"丁度牒，每道一千五百贯文"。
互易推本	17	3	"出度牒……每三道易盐一十三袋"。如果按均货推本题，每袋盐值250贯折算，度牒每道当值1 083$\frac{1}{3}$贯文。

可见到13世纪中叶度牒的身价更高了。

此外从卷17第2题中还发现南宋还有另一种纸币——盐钞。题文说："盐'四袋钞'一十道""盐'三袋钞'八道。"即盐钞面额有3袋的和4袋的两种。而每袋值也很高，达250贯，约与5两白银或半两黄金等价，这是产盐地领盐的凭证。与度牒一样已得到信用，甚至还可以成为到海外经商的资本。由钱荒现象还出现所谓"省陌"，源于东汉。唐代也有之。唐末兵乱，以85文为一百，后汉又减3钱，宋初纳税有用80文为一百。各州也不一律，有以48文为一百。秦题省陌到6文为一陌，为文献所仅见。北宋太平兴国二年(977)诏定以77文为陌。[②]一时成为两宋制度，直至

① 彭信威《中国货币史》未记淳熙以后度牒每道所值。

② 彭信威《中国货币史》pp. 471～480。

南宋之末，秦氏著书时仍行用，所以在“推库额钱”题中说，诸库日息原纳足钱26贯950文，展省35贯文，就是指把26 950文变换为法定省陌：26 950÷77%＝35 000文。

二　物　价

在彭信威的著作《中国货币史》中可以查到两宋主要物品的物价，其中摘抄最接近于1247年的记载如下表[①]

表 3.3.12

物　品	米(公石)	绢(匹)	金(两)	银(两)
物价(文)	11 594	4 000	40 000	3 460
时间	1241～1250	1 220	1 200	1 236

金、银相对比价：13.33(1126年)，13.04(1134年)

米

卷11第3题(课籴贵贱)记载五个米价，按文思院斛8斗3升为一石，石价(文)

23 164，22 071，21 507，20 679，19 885

取其平均值21 461.2

卷12第3题(推知籴数)说石价25贯。

如以前者平均值，又取文思院斛升值600立方毫米计算，则当时每公石(100×1 000毫米)应值43 094.8文。与彭著相差很多，有可能秦著石值不是足钱。如按十七界新会取250文为一贯，(卷11第1题)则与彭著结果很吻合。

绢

卷11第1题记载足钱二价：2贯和2贯420文，较彭著1220年值，跌价近一倍。

① 彭信威《中国货币史》pp：441～501。

金、银

卷 17 第 2 题记载金每两 480 贯、银 50 贯与彭著所记出入很大，但在时间上分别推后 27、11 年。在兵荒马乱时节引起如此波动，是完全有可能的。二者比价为 9.6<13.33。

三　税　收

秦氏书所设问题，牵涉税收，主要是农业税。南宋政府为支付开支，特别是军队给养，取于农民的税有“苗”、“税”、“和买”三种。绍兴元年(1190)秘书监杨万里指出江南赋税沉重情况，他说：“民输于官谓之苗，旧以一斛输一斛，今以二斛输一斛矣。输绢于官谓之税，旧以正绢为税绢，今正绢外有和买矣。旧和买官给其值，或以钱，或以盐，今皆无之。又以绢估值而倍折其钱矣。旧税亩一钱输免役一钱，今岁增其额，不知所止矣。既一倍其粟，数倍其帛，又数倍其钱……不知几倍……于汉、唐之制乎。此犹东南之赋可知也，至于蜀赋之额外无名者，不可得而知也。”过了四、五十年后租税益重。秦九韶的同代人吴潜说：“今自江南二浙、江东西、湖南、福建诸郡，一石之苗有量至二石五六者，有至二石三四者，少亦不下二石一二。”① 杨万里已给南宋时三种农业税作出很恰当的定义。当时三项赋税不分土地肥瘠按土地田亩多少比例分配，这显然是不合理的。而当时豪强地霸还有隐匿田亩，逃税漏税。政府虽有“经界”(丈量土地)计划，为势豪所阻，也未能实行。朱熹于绍熙元年(1190)在漳州做知县时，深知“经界”不行之害，向政府具奏，请示在漳州、泉州率先“经界”。他不仅要求“打量田亩步，算计精确，”按田亩比例分配农业税，还进一步以土地质量高下，加权分配。他说：“为今之计：莫若将现

① 转引自李迪，《数书九章》与南宋社会经济，这里所说“一斛输一斛”，“一石之苗有量至二石五六者”是指下种一斛(一石)纳税一斛(二石五六)。

在田土打量步亩，一概均产，每田一亩，随九等高下定计产钱几文，而总合一州诸色税租钱米之数，却以产钱为母，别定等则，一例均敷。每户一文，纳米若干，钱若干，去州县远处递减令轻。”①这与秦氏《数书九章·序》赋役章颂词：“惟仁隐民，犹己溺饥、赋役不均，宁得勿思？”精神前后延绵一致。秦氏所设与农业税有关问题尤其深深渲染时代色彩，现列表简说：

表 3.3.13

问 题	卷	题	摘 要
复邑修赋	9	1	邑共六乡，已给年纳苗、税(绢)、和买数。六乡按土地质量，离邑远近比例分配任务。每乡田分九等。按土地大小及质量比例分派本乡任务。
宽减屯租	10	3	去年税率“官种一石纳税五石，私种一石纳税三石。”已给今年官私种总数，计算减税后应纳税数。
均科绵税	10	5	产绵户11 033户。分为五个等级，每级有不同户数。已给国家任务，计算每户应纳绵数。
户税移割	10	6	甲、乙、丙各有田。甲把田分租于乙、丙。已给甲应纳苗(石、斗)和买(绢丈、尺)数、计算乙、丙纳税数。

四 利 息

宋室南迁后，以首都临安来说，城郭辽阔，户口繁盛。市内拥有作坊、团行、质库、银钞引铺、酒楼、茶坊等等。自大街至坊巷，大小铺席连门俱是，无虚空之屋。② 质库即典当有十余处。银纱引铺即钱庄有几百家。买卖、赊欠、借贷、典当等商业活动就产生利息现象，现选录数题简说。

① 朱熹．条奏经界状．《朱子大全》卷19。

② 吴自牧．《梦梁录》卷13。

表 3.3.14

问 题	卷	题	摘 要
累收库本	12	5	整存零取，月息 6.5%。本金 50 万贯，第一月末取本利 10 万贯，以后每月末都支取 10 万贯，七月后取完。其特点之一是利率特高，之二是这种储蓄品种，古今罕见。
推求本息	18	3	分段计息，借款万贯以上，利率 1%，千贯以上(至不足万贯)2.5%，百贯(至不足千贯)3%
推求典本	18	4	典当一物，经 464 日物赎回，化本息 160 贯 832 文。月利率 22%，问当时当多少钱？(120 贯)足见当时高利贷惊人。

五 海外贸易[①]

在唐代以前我国对外贸易，主要是从西北河西走廊经丝绸之路，直通终端罗马。到宋代由于我国东南地区农业、手工业的发展与造船技术的进步，[②]又由于北方交通先后受辽、金所阻，海上贸易之盛由是超越前代。两宋政府为增加财政收入，并收购进口物资满足皇家需要，对海外贸易十分重视，多方奖励。早在宋太祖开宝四年(971)就设置市舶司于广州，不久陆续在杭州、明州(宁波)、泉州设立。为招致外商来华贸易，宋太宗于雍熙四年(987)又特“遣内侍八人赍敕书、金帛，分四纲，各往海南诸蕃国，

① 据徐规，宋代两浙的海外贸易，杭州大学学报 pp. 137～146. 1997 第 1～2 期。

② 沈括《梦溪笔谈・权智》(补卷 2)。“国初，两浙献龙舟，长二十余丈。上为宫室层楼。设御榻，以备游幸。”唐代以前外国人来华多坐他们自造海船，到宋代多坐中国制造船只。说见周去非《岭外代答・航海外夷》。这是因为中国造船技术超越外国。在沈括《梦溪笔谈・权智》又提到在宋仁宗嘉祐(1056～1063)时有一艘东夷(日本)商船因桅杆被大风所折断，飘流到我国苏州昆山县海滨、昆山知县派人“为其治桅，桅旧植船木上，不可动。工人为之造转轴。教其起倒之法。”这是一例，说明我国造船技术已达当时国际最先进水平，桅杆可以灵活起倒。

勾招进奉，博买香(香料)、药(药材)、犀(犀角)、牙(象牙)、真珠、龙脑。及南宋，朝廷更加热中于此，宋高宗说："市舶之利，颇助国用，宜循旧法，以招徕远人，阜通货贿。"

由于政府大力提倡，亚非各国有五十多个国家与中国通商：其中重要的有日本、高丽以及南洋群岛，亚洲南部、西南部、非洲东海岸及中部地区。为适应日趋繁盛的海上贸易，南宋时除密州(今山东胶县)已归入金朝版图外；在广州、杭州、明州、泉州、秀州(今上海松江)、温州、江阴等地设立市舶司或市舶务。当时的市舶机构类似近代海关，而其权力更大。我国商船出海必须向它申请，具保，才能启行。外洋商船到达必须向市舶机构报告，派员上船检查后，一般征收货物税十分之一，称为"抽解"。又规定某些货物为"禁榷物"，设榷货务为专卖机关。其他货物也收买一部分，称为"博买"。抽解、博买来的货物一律交中央政府。剩余部分与搬运困难的货物，由市舶机构或外商在当地发卖。

海外贸易增加政府财政收入，所以明清之际学者顾炎武《天下郡国利弊书》在"海外入贡互市"中说："(宋室)南渡后经费困乏，一切倚办海舶。"

《数书九章》有两题取材海外贸易，现简析如下：

表 3.3.15

问　题	卷	题	摘　要
推求物价	17	1	"问榷货务三次"，榷货务为市舶司专卖机关。"支物沈香、玳瑁、乳香"，原产地都在南洋"支物准钱各一百四十七万贯文"是很大一笔买卖。
均货推本	17	2	"问有海舶赴务抽毕"，赴"务"指到榷货务报关。"抽毕"指"抽解"(纳税)完毕。"沈香、胡椒、象牙"都是进口物资。"四人合本博到"、"博"字与"博买"有关。

第五节　军　旅

秦氏书设军旅专章，收集有关问题，此外散见其他各章，反映当时外敌入侵、朝野奋起御侮情况，极为真切，我们分段记述。

一　军　阵

曾公亮《武经总要》有专章记载部队操练及宿营时军阵排列方法及制度。例如在《前集》卷 6 中论方营说："诸军逢平原广泽，无险可恃，即作方营。"其他各种军阵阵容制度森严，进退有序，从形式到内容与秦氏书中所记圆阵、方阵大不一样。但秦氏能从军阵实事抽象为数学问题，以丰富其专著的数学内涵，其心情是可以理解的。在秦氏书中以军阵入题有：

方营(计立方营)

三角形阵(方变锐阵)

圆阵(计布圆阵,圆营敷布,望敌远近)共五问。

二　城　防

唐代城市强调繁荣经济，居民生活安逸。长安城设东西市、里坊制度即为明证。入宋，特别是靖康之变，政府南迁之后，强化城市防御功能成为当务之急。火炮已进入战场，当时陈规《守城录》就指出："凡攻守之城，害物最重，其势可畏者，莫甚于炮。无城垣的城，实难抗敌。"黄干《勉斋集》历数开禧后金兵南犯时，枣阳、随州、信阳、荆门都因无城垣，很快就陷金人手中，而德安、襄阳因有城可守，拒敌城外。如开禧二年(1206)金兵十万攻德安，以大炮飞击凡十五昼夜，城内仅七千兵员，因有城可守，金兵围城 108 天，仍无法攻破，只得悻悻退去。同年金兵二十万攻襄阳、宋将堵塞城门，于羊马墙外加筑鹿角等防御工事，并另开

城濠隔离。双方大战十二次，襄阳坚守90天，金兵撤围北退[①]。宋廷鉴于开禧此两役，相继在各地筑城。

古时夯土筑墙，《诗经·大雅·绵》："其绳则直，缩版以载，筑之登登，百堵皆兴。"描绘建墙实况。古代城墙也是夯土。只在城门及城四隅用砖加固。砖城始于唐代，例如长安大明宫、洛阳皇城都是实例。入宋以后，辽金元外族使用火炮攻城，土城无能为守，出现砖包土心城墙，但也是次第改善的。宋室南渡江南时，作为首都的临安，还只是夯土为墙，南宋理学家黄干论砖城说："向来商议包砌，自上至下各用砖厚两寸，除女墙外，城高二丈。自上而下，砖约百片。每片杀入八分，自下而上共杀八尺。四重之砖又皆横直相交，谓之丁搭。言其一横一直如丁字然。多用石灰浇灌。既干之后，合为一片，牢不可破。……合请同官士友并照原包砌法，以为无穷之利。"[②]造砖包城墙，需投入大量人力、物力，史不绝书。现选择11个代表性城市列表说明：[③]

表 3.3.16

城　名	新（增、修）建年代	城周	城濠	防御设备	建材	花功（人、日）
临安（杭州）	绍兴二十八年（1158）扩展皇城	9里	宽十多丈	敌楼、瓮（甕）城	夯土外包筑砖石	
建康（南京）	淳熙四年（1177）修砌城面	25里44步	长4 765丈，宽30丈，深1.5丈	鹊台、女头、瓮城、城与濠间有4丈1尺厚羊马墙		

① 王致远. 开禧德安守城录. p. 25，瑞安孙氏刊本。

② 黄干. 勉斋集. 卷28. p. 18～19，四库全书本。

③ 材料主要采自黄宽重：南宋军政与文献探索，pp. 141～162，台北新文丰出版公司，1990。

续表

城　名	新(增、修)建年代	城周	城濠	防御设备	建材	花功(人、日)
广州	端平、嘉熙(1234～1240)修葺外城	3 306丈	长1 600丈	楼橹、炮台、女头、羊马墙、敌楼	版筑、烧砖、修砌	
成都	绍兴三十年(1160)	4 600丈		女墙、楼橹、羊马墙	长砖砌之	
襄阳	乾道七年(1171)	9里341步	长410步，宽8尺，深6尺	炮台，瓮城，女头、鹊台、护险墙、羊马墙	用砖包砌	
扬州	嘉定九年(1216)修建完成	20里150步	长3 541丈，面宽16丈，底宽8丈，深1丈6尺	楼橹、女墙、钓楼、瓮城	土夹墙易以砖	115万
静江(桂林)	景定元年至咸淳元年(1260～1265)	566丈	长503丈	楼橹、女墙、护险墙	砖石包砌，内填土，用砖2 063万块	700万
邕州(南宁)	淳祐八、九年(1248～1249)修葺之	9里30步	广1丈5尺深1丈	女头、马面、敌楼、羊马墙	砖砌城面，用砖500万块	
洪州(南昌)	绍兴七年(1137)创新截筑城身	长712丈	长712丈，宽6丈，深1丈6尺	护险墙、女头、马面、敌楼、炮台、吊桥	表、里并用石砌，用砖120万块	

续表

城　名	新(增、修)建年代	城周	城濠	防御设备	建材	花功(人、日)
真州(仪征)	嘉定二年(1209)	1 600丈	宽15丈	女墙、炮台、楼橹	砖砌	
兴化	绍定三、四年(1230～1231)	1 298丈,高1丈8尺		表、里以石,复以砖。用砖67万块		
安庆	景定二年(1261)	13里	1 435丈	羊马墙1 262丈	砖包砌用砖400万块	

对照秦氏所设卷13第1题“计定城筑”，论规模、论防御设施、论建材、结构乃至投入人力、财力，犹如宋城之一，而非虚构。

三　军　器

在宋辽、宋金、宋夏长期对峙的局面下，国家战备工业相应迅速发展。北宋时军器监是专管生产武器的机构，它所属有五十一个“作”，工匠计七、八千人。分别制造各种武器如弓矢、干戈、甲胄、刀剑、枪炮等战守设备。宋室南渡后，这些“作”也迁往临安，改名“御前军器所。”既是武器管理机构，又是规模巨大的武器手工作坊。平时有固定的工匠二千余人，勤杂兵五百余人，多时工匠达五千余人。这些工匠大都从两浙、福建招募而来，每年要制造各种军用物资三百万件。军器制成后，先要“进便殿，俟阅而颁其式样于诸路”仿制，以保证质量。

上引材料摘引自《宋史·职官志》，而《数书九章》卷16第5题(军器功程)所说制造及工匠规模提供了五十一个作的细部：

弓作、刀作、箭作实况。问题说：“造弓刀各一万副，箭一百万只……作院现管弓作二百二十五人，刀作五百四十人，箭作二百七十六人。”各作人员有多有少，五十一个作合计5 000～8 000人是很真实的记载。秦题还指出功限，每人工作指标。反映工匠技术好、作院管理严格和当时后方支援前线、热火朝天的精神状态。

四　　行　　程

古代行军主要是步行，骑兵以马代步。

传通信息也有靠步行或以马代步，前者称为“步递”后者称为“马递”。宋朝建国后又设立速度特别快的“急脚递”，每日行速可达400里，或称“急足”。北宋文学家欧阳修与焦殿丞书：“急足辱书，深所浣慰”即为一例。北宋末年金兵不断南下，边关形势紧急，为把皇帝命令迅速下达前钱，朝廷又设置比“急脚递”更为快速的“金字牌急脚递”，每日行速500里，简称“金牌”。金字牌是一块红漆木牌，用金黄色颜料代墨，在木牌上书写下达的命令，这是皇帝专用的诏书。负责传送金牌的骑兵，像今日接力赛跑一样，逐站相传，不分昼夜，快马加鞭，限时限刻，不准有片刻停留。当年岳家军在郾城大破金兀术“拐子马”，“铁塔兵”，全胜追击，正当直捣黄龙“待重头收拾旧山河，朝天阙”之际，奸相秦桧挑唆宋高宗，一天内连发十二道金牌命令岳飞收兵。这段遗恨千古的历史中所说金牌正是“金字牌急脚递”。

《宋史·岳飞传》也说：“［秦桧］言，飞孤军不可久留，乞令班师。一日举十二金字牌。飞愤惋泣下，东向再拜曰：‘十年之功，废于一旦’。”《汉语大词典》解释：“宋代凡传递敕书及军事上紧急命令，皆用金字牌。”

《数书九章》所设问题中有三处讲到行程问题，真实描述了南宋军民“靖康耻犹未雪，臣子恨何时灭。”敌忾同仇的某些侧影。

卷16第4题(先计军程)“一军三将，将十队，队七十五人。”

全军2 250人，阵容壮大。题说“每日六十里”，作为常规步行速度，还是适当的。在没有汽车的年代，日行60公里属于急行军。

卷2第3题(程行相及)“急足三名，甲日行三百里，乙日行二百五十里，丙日行二百里。……往他处下文字”三人当都是急脚递。本题印证了当时快递业务。

卷2第2题(程行计地)“军师获捷，当早点差急足三名，往都下节节走报。……甲日行三百里，乙日行二百四十里，丙日行一百八十里”三人也都是急脚递等级。题问以“军师获捷”为主题，又答数说“自军前至都三千三百里。”“节、节走报”，副词“节、节”犹今接力赛跑。如从郾城附近到临安计算距离，3 300里也是很近似的估计。

第 四 编

南宋时代　秦九韶(中)

本编述秦九韶的数学成就，分四章。

第一章　算　术

我们曾在本《大系》第二卷把用算术解法的一次方程问题归入代数学介绍。因为《九章算术》成书时代代数意识还薄弱，代数与算术分工还不明确，经过人们一千多年不断探索，在南宋时代，数学问题的建立方程和解方程能力已经成熟，在《数书九章》中尤为明显。对这类问题——不借助于建立方程，在非负有理数范围内用四则运算的解法归入本章。社会的进步、变化和发展使算术问题内容益加充实和广泛，在提法上更加复杂、曲折，计算技术也取得长足改善，以下分七节说明。

第一节　记数——中国数码字

阿拉伯数字在我国流行之前，民间通行记数数码、直至本世纪上半叶在商界、中医药界还在广泛使用。这种数码字最早文献，可于今存10世纪敦煌卷子《立成算法》见之。及后，北宋司马光(1019～1086)《潜虚》已用像形筹算记数法记数，其中4字作×，

10字用汉字十，在《数书九章》草文图式中都用当时已规范化的数码记数，显然是很珍贵的记录。

一 记 数 法

数码字

像形筹算并按《孙子算经》规定：“一纵十横，百立千僵，……”① 但其中空档，即零，改用圈○字，4字用×记，遇个、百、万位上出现5就记为$\overline{\bigcirc}$，十、千位上出现5就记为$\overset{|}{\bigcirc}$，遇个、百、万位上出现9，记为$\overline{\times}$，十、千位上则记为$\overset{|}{\times}$，理由是显然的。

整数

与阿拉伯记数十进位值制一致，如56 964记为$\overline{\bigcirc}\perp\overline{\times}\perp\times$，遇到正负相混时，数首注明符号如＋172，－154，分别记为正|$\perp$‖，负|$\overset{|}{\bigcirc}$×

分数

$28\frac{7}{31}$记为　　＝$\overline{|||}$
子$\overline{||}$
母≡|

小数

在个位下注明单位，单位(及)左为整数部分，右为小数部分，例如127.42尺记为|＝$\underset{尺}{\overline{||}}$×‖

二 各 种 算 法

在众多的图式中提供了筹算各种算法的排列位置和运算过程，将在各章节范题分析中作为插图，附其有关书影：

① 参见本《大系》第四卷有关章节。

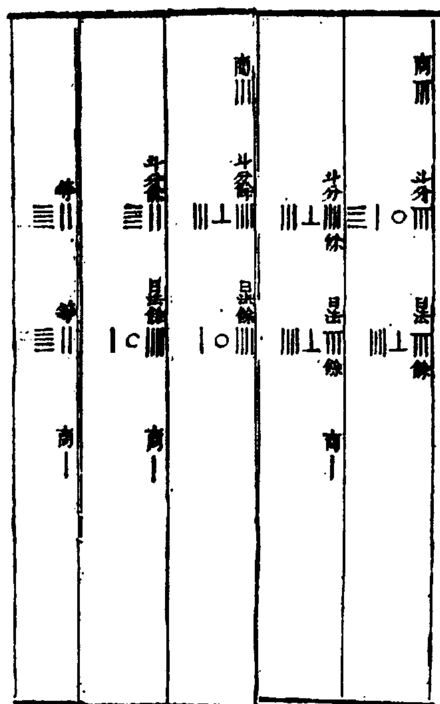


图 4.1.1

更相减损术(图 4.1.1)卷 3 第 3 题(治历演纪)：(3108，468)＝52。

分配分例(图 4.1.8)

复比例(图 4.1.2)

连比例(图 4.1.3)

双假设法(图 4.1.4)

大衍求一术(图 4.4.8)

大衍总数术(图 4.4.1b)

方程术(图 4.3.19，4.3.20)

正负开方术(图 4.3.12)

第二节　折　　扣

折扣是古今算术教科书常见课题，是应用题的开头课。由于南宋社会动荡不安，物价因时间、地点出入、涨落，币制也出现前所未有的混乱。在《数书九章》命题中就有明显反映，下面选析三题。

1. 米谷粒分

问：开仓受纳，有甲户米一千五百三十四石到廊，验得米内夹谷。乃于样内取米一捻[1]，数计二百五十四粒，内有谷二十八颗，凡粒米率，每勺三百，今欲知米内杂谷多少？以折米数科[2]责及粒各几何？

（答数：米1 364石8斗9升7合6$\frac{48}{127}$勺，含谷169石1斗2合3$\frac{79}{127}$勺，折米84石5斗5升1合1$\frac{103}{127}$勺，米有4 348 346 456粒，卷12第6题）

题文大意：粮站开仓收谷，有人送来米1 534石，经检验，米内杂谷，抽样取米一把：254粒内有谷28粒，已知1勺有300粒，问：米内共杂谷多少？折米多少？

解法：术文相当于说

米内含谷，打$\frac{254-28}{254}$折，计算实有米

$$\frac{1\ 534\times(254-28)}{254}=1364\text{石}8\text{斗}9\text{升}7\text{合}6\frac{48}{127}\text{勺},$$

米内含谷打$\frac{28}{254}$折，计算实含谷

---

① 捻，义：握，把。

② 科同课，义：比较。

$$\frac{1\ 534\times 28}{254}=169\text{ 石 }1\text{ 斗 }2\text{ 合 }3\frac{79}{127}\text{勺},$$

这些谷折为米，再打$\frac{3}{5}$折[①]

$$\frac{1\ 534\times 28\times 3}{254\times 5}=84\text{ 石 }5\text{ 斗 }5\text{ 升 }1\text{ 合 }1\frac{103}{127}\text{勺。}$$

本题是我国最早统计学抽样检查记录，解法中还对米折成粒数，虽然缺少实际意义，但所算得的答数有十位有效数字，特别是草文中对余数$\frac{88}{127}$粒，说“弃之”。严格说个位数字应是 7 字。

2. 课籴贵贱

问：差人五路和籴，据甲浙西平江府石价三十五贯文，一百三十五合[②]。至镇江水脚钱每石九百文。安吉州石价二十九贯五百文，一百一十合。至镇江水脚钱每石一贯二百文。江西隆兴府石价二十八贯一百文一百一十五合。脚钱，每石一贯七百文，吉州石价二十五贯八百五十文，一百二十合。至建康水脚钱每石二贯九百文。湖广潭州石价二十七贯三百文，一百一十八合，至鄂州水脚钱，每石二贯一百文。其钱并十七界官会[③]，其米并用文思院斛交量细数。欲皆以官斛计石钱，相比贵贱几何？文思院斛每斗八十三合。

(答数：折合文思院斛，每石价：安吉州23 164$\frac{6}{11}$文，平江州22 071$\frac{23}{27}$文，隆兴府21 507$\frac{19}{23}$文，潭州20 679$\frac{39}{59}$文，吉州19 885$\frac{5}{12}$文。卷 11 第 3 题)

题文大意：委托人员到五处买米，各地米价、运费、量米容

---

① 按《九章算术·粟米》谷的出米率。

② 指每斗含 135 合＝13.5 升。

③ 官会指用政府发行的纸币(会子)付款，且明确指用十七界官会，详见第三编第三章第四节·币制。

器折合官斛(文思院斛)都不一样(数据见解法表)。比较五处所买米的贵贱情况：

解法：本题是另一种形式的折扣问题。例如以浙西平江府所籴的米，加上水脚钱(运费)，应考虑折成文思院斛每石价，其中平江每斛含文思院$\frac{135}{83}$斛，因此平江籴的米折合$(35+0.9)\div\frac{135}{83}$贯。

解法 原著术文及草文可整理，如表 4.1.1。

表 4.1.1

产地	今称	石(含合)	价(贯)	运费(贯)	共价(贯)	折成文思院石价(文)
平江	苏州	135	35.0	0.9	35.9	$35\ 900\times\frac{83}{135}=22\ 071\ \frac{23}{27}$
安吉	湖州	110	29.5	1.2	30.7	$30\ 700\times\frac{83}{110}=23\ 164\ \frac{6}{11}$
隆兴	南昌	115	28.1	1.7	29.8	$29\ 800\times\frac{83}{115}=21\ 507\ \frac{19}{23}$
潭州	长沙	118	27.3	2.1	29.4	$29\ 400\times\frac{83}{118}=20\ 679\ \frac{39}{59}$
吉州	吉安	120	25.85	2.9	28.75	$28\ 750\times\frac{83}{120}=19\ 985\ \frac{5}{12}$

3. 折解轻赍[①]

问：有甲乙丙丁四郡各合起上供银、绢：甲郡银三千二百两，每两二贯二百文足；绢六万四千匹，每匹二贯文足；去京一千里，每担一里佣钱六文足；其时旧会每贯五十四文足。

乙郡银二千七百两，每两二贯三百文足；绢四万九千二百匹，每匹二贯四百二十文足；去京九百八十里，每担一里佣钱四文二

① 赍(ji)义：以物送人，转义：交税。

分；旧会价五十九文足。

丙郡银四千两，每两新会九贯三百文；绢七万三千六百匹，每匹新会一十贯三百文；去京二千里，每担一里佣银八十文旧会。

丁郡银二千六百两，每两五十一贯文旧会；绢三万二千三十五匹，每匹五十八贯文旧会；去京一千五百里，每担一里佣钱一百文旧会。

诸郡每五百两、绢每六十匹为担，欲并折新会。新会比旧会，一比五。求：每郡折解、佣金各新会几何？[①]

（答数：甲郡应解新会500 148贯 148 文，外加佣钱23 845贯925 $\frac{25}{27}$文；乙郡424 657贯 627 文，佣钱11 516贯 428 $\frac{28}{59}$文；丙郡795 280贯，佣钱39 509贯 333 $\frac{1}{3}$文；丁郡398 126贯，佣钱16 173贯 500 文，卷 11 第 1 题）

题文大意：本题用三种币值单位[②]

①足文，每贯足1 000文②纸币(旧会)，每贯值多少，因地而异③纸币(新会)每贯值是当地旧会值的五倍。

四郡应负担国税有三种：

①现金(白银)②纺织品(绢)③佣金(指运费，每银 500 两或绢 60 匹折成一担，因去京师路程远近定每担价，实物税折成纸币后，运费仍如数交纳。)

本题各郡应交现金、绢计币值单位不一。去京师远近不一，旧会每贯所值不一，我们列表如下：

① 为便于说明，本题已增删原著部分细节。

② 在本世纪 30 年代民国时也有类似情况，银圆一元、(大洋)银元辅币(小洋)、纸币一元、辅币所值铜元数不一样，因地而异，而且早晚市价也不一。

表 4.1.2　四郡负担国税表

郡名	银		币值单位	绢		币值单位	去京里	佣金文	币值单位	旧会每贯值
	两	每两值文		匹	每匹值文					
甲	3 200	2 贯 200 文	足文	64 000	2 贯	足文	1 000	6	足文	54 文
乙	2 700	2 贯 300 文	足文	49 200	2 贯 420 文	足文	980	4.2	足文	59 文
丙	4 000	9 贯 300 文	旧会	73 600	10 贯 300 文	新会	2 000	80	旧会	
丁	2 600	51 贯	旧会	32 035	58 贯	旧会	1 500	100	旧会	

解法：

从上表就易于求出答数。原著术文及草文相当于说：

甲郡应纳新会(文)：

银折合：$2\ 200\times3\ 200\div(54\times5)$，

绢折合：$2\ 000\times64\ 000\div(54\times5)$，

佣金：$\left(\dfrac{3\ 200}{500}+\dfrac{64\ 000}{60}\right)\times1\ 000\times6\div(54\times5)$

是上面三数之和，类似地求乙郡。而丙郡应纳新会(文)。

银折合：$9\ 300\times4\ 000$，

绢折合：$10\ 300\times73\ 600$，

佣金：$\left(\dfrac{4\ 000}{500}+\dfrac{73\ 600}{60}\right)\times2\ 000\times(80\div5)$三者总和。

丁郡则应纳新会(文)

银折合：$(51\ 000\div5)\times2\ 600$，绢折合$(58\ 000\div5)\times32\ 035$，佣金：$\left(\dfrac{2\ 600}{500}+\dfrac{32\ 035}{60}\right)\times1\ 500\times(100\div5)$三者总和。

可见秦氏所设计的题，一再折扣，曲折、复杂能反映当时实况，但是题给条件却很周到，无多余也无欠缺之处，最后可以得

到明确的答数。

四库馆臣校书至此，赞赏说：

“此题贯数分三项：其一足数，每千文一贯，其一旧会数，如甲以五十四文为一贯，其一新会数，为旧会数之五倍，四郡或言足数，或言旧会数、新会数……略微分析，而术草之意大概可见矣。”

第三节　百　分　法

由于生产、经济、交际、商业的发达，借贷、折扣、赢亏的比率也从一般分数、十分而加密到百分、千分。《九章算术·盈不足》第20题“持钱之蜀，贾、利十三[1]”《张丘建算经》卷中第17题：“贾利五之二。”而秦氏书中就有百分率、千分率的记录，这体现社会的进步，百分法问题常见的有三种：从本金、利率求利息，从利息、利率反算本金，从本会、利息求利率，秦氏书还有反求存期之类问题，不限于存放钱钞，还牵涉到典当、冶金成色等经济活动，选析三题。

1. 炼金计值

问：库有三色金，共五千两，内八分金一千二百五十两，两价四百贯文，七分五厘金一千六百两，两价三百七十五贯文，八分五厘金二千一百五十两，两价四百二十五贯文，并欲炼为足色。每两工、食、药、炭钱三贯文，耗金九百七十二两五钱，欲知色分及两价各几何？

(答数：成色100%，每两值503贯724 $\frac{212}{537}$文。卷18第2题)

---

① 意即获利是本金30%。

参考译文：库里存放三种金条，共重5 000两，其中八成金1 250两，每两价 400 贯文，七成半金1 600两，每两价 375 贯文，八成半金2 150两，每两价 425 贯文，要求一起炼为纯金。提纯中工料费每两 3 贯文，又共耗去金属 972.5 两。问：余下的金属含纯金多少？每两纯金每两价多少？

术文说：

“以方田及粟米求之。置共数(5 000两)，以耗(972.5 两)减之，余为法(除数)、以三色分数各乘两数(1 250×80%，1 600×75%，2 150×85%)，并之，为色分实(成色的被除数)。”

“以三色价数，各乘两数为寄(把乘积记在一边)，以工药价乘共金，并价寄，共为价实。二实皆如法而一，即各得。”

解法分二步骤

(i)提纯后，耗去金属(非金杂质)972.5 两，求提纯后金属的成色，这就是术文第一段所说，所求成色为

$$\frac{1\ 250\times 80\%+1\ 600\times 75\%+2\ 150\times 85\%}{5\ 000-972.5}=100\%。$$

(ii)提纯后的金属(纯金)每两价，当是成本除以重量

$$\frac{400\times 1\ 250+375\times 1\ 600+425\times 2\ 150+3\times 5\ 000}{5\ 000-972.5}$$

$=503$ 贯 $724\,\frac{212}{537}$文。

本题是今日百分法第三种问题。

2. 推求典本

问：典库今年二月二十九日有人取解一号主家，听得当事共计算本息一百六十贯八百三十二文，称系前岁腊月半[①] 解去，月息[②] 二分二厘，欲知：原本几何？

① 腊月指十一月，从月半、越去年，到今年 2 月 29 日。

② 月息 2 分 2 厘指每月利率为 22%。

(答数：原本 120 贯文，卷 18 第 4 题)

参考译文：某典当一笔账：从前年十一月十五日到今年二月二十九日，月息 22%，本利和 160 贯 832 文，问：原借本金多少？

解法：

术文说："以粟米求之，置积日[①]乘息，增三百为法。以三百乘共钱为实。实如法而一，得本"这是说所求本为：

我们如设本利和为 A，利率为 $r\%$，积日为 s，则所求本为

$$A\div\left(1+\frac{s}{30}\cdot\frac{r\%}{10}\right)=300A\div(sr\%+300)。$$

以题给数据说，所求本是

$$160\ 832\times300\div(464\times0.22+300)=120(\text{贯})$$

本题是今日百分法第二种问题。

3. 累收库本

问：有库本钱五十万贯。月息六厘半，令今掌事每月带本纳息，共还一十万。欲知：几何月而纳足，并末后畸钱多少？

(答数:本息纳足共 7 个月,卷 12 第 5 题)

参考译文：向全库借本钱500 000贯文，月息 6.5%，经办人员每月连本带息还100 000贯文。问：几个月还清？最后一个月应还多少？

解法：

术文说："以盈朒法求之。置原本，以息数退位，乘归本位，每出共纳，累得月数。以末后不足数为足月钱数。"本题草文用古汉语记录运算细节，不载图式，相当于说：

借款一月后归还100 000 000文，余款为

500 000 000 (1 + 0.065) − 100 000 000 = 532 500 000 −

---

① 积日，从前年腊月半到今年 2 月 29 日共 464 日。一月作 30 日，一年作 365 日计。

100 000 000＝432 500 000(文)＝432 500贯文。

借款二月后归还100 000 000文，余款为

432 500 000（1 ＋ 0.065）－ 100 000 000 ＝ 460 612 500 －
100 000 000＝360 612贯 500 文。

依次计算借款三、四、五、月后分别归还100 000 000文，余款各为 284 052 贯 312.5 文，202 515 贯 712.812 5 文，115 679 贯 234.145 312 5文。第六个月后归还100 000 000文，余款23 198贯 384.364 757 812 5文。秦氏又计算第七个月后应归还

23 198 384.364 757 812 5 （1 ＋ 0.065）＝ 24 706 贯 279.348 467 070 312 5文。

本题是百分法另一种问题。术文说："以盈朏变法求之"朏(音 fei)阴历初三的月亮与朒同义。《九章算术·盈不足》第 20 题贾利十三是今称整存另取的复利问题。本题也是同种问题，而有变化，所以秦氏说是"变法"。"贾利十三"题是已给利率、偿还时分期偿还年限，每期零取值，求整存本金。本题却是已给本金、利率、每期零取值，求偿还年限分期数。应该说这种题型的变化，是很大胆的变通。秦氏在草文中计算非常仔细。有效数字达 21 位，今天看来无裨实用。但正说明筹算计算技能到南宋已达登峰造极的境界。《九章算术》"贾利十三"题是我国经济学史上复利的最早文献。南北朝《张丘建算经》卷下第 34 题："今有负他钱，转利偿之，初去转利得二倍，还钱一百。第二转利得三倍，还钱二百。第三转利得四倍，还钱三百。第四转利得五倍，还钱四百。还毕皆转利。倍数皆通本钱。今除初本，有钱五千九百五十。问初本几何?（答数:本钱 150)。是"贾利十三"题的第一次变通。已给的是变利率、每期变零取值、偿还时分期年限以及纯利，求整存本金。本题又作了第二次根本性的变通。

从解题方法看，《九章算术》用双假设法，刘徽改用还原法，都是很得当的算术方法。张题用的也是还原法。由于秦氏题变化

太大，上面二法都不适用。如设本金为a，利率为$r\%$，每期偿还数为b，则每月底余款数将是数列$\{a_n\}$：$a(1+r\%)-b$，$(a(1+r\%)-b)(1+r\%)-b$，……$\underbrace{((\cdots((}_{n重}a(1+r\%)-b)(1+r\%)-b)(1+r\%)-b\cdots-b)$。

问题是求n为多少，使第n项，$a_n\leqslant b$。

由于n只允许是整数，秦氏循序计算比较大小，遇到小于b即止，不失为得当的方法。

第四节　比　　例

五种比例问题随着南宋商业经济发达、海运事业、征税、纳粮、特别是在当时特定的兵荒马乱环境中，物价、币制异常，促使与比例有关的事务愈加复杂。现就简单比例、分配比例、复比例和连比例作范题选析。

一　简单比例

先计军程

问：一军三将，将十队，队七十五人，每将分左右兼，作九行。爬头攙行，每日六十里。明日路狭，以单兼攙行。至晚，欲先知宿程里数，合几何？

（答数：6里240步。卷16第4题）

参考译文：各军设3将，每将有10队，每队75人，每将有左右侍卫卫队。原来9列纵队行军，每日行路60里，明天行军所经地区路面狭窄，改单列前进。今晚预估行军速度，试作计算。

解法：

术文说："以均输求之。置行数为法，以单数一行用乘日程数，为实。实如法而一，得宿程里步。"

如设原行速为a，改单列行速为b，那么$a:b=9:1$，所求行速

$$b=\frac{1}{9}a=\frac{60}{9}(\text{里})=6\text{ 里 }240\text{ 步}$$

与术文一致。

从行军时间说，与列队数当成反比。

《九章算术》称为反衰，都结合复比例分配比例运用，无单独反衰题。

二 分配比例

分配劳动成果和经商赢余是人类生活中永恒的课题。在《数书九章》卷 17 第 2 题(均货摊本)中说四人经商获得进口物资：沈香5 088两，胡椒10 430包(每包 40 斤)，象牙 212 合，要按照出海前四人投资资本为分配率 248∶152∶247∶201，即为一例。秦氏计算准确，所得如下表

表 4.1.3

人员	沈香(两)	胡椒			象牙(合)
		包	斤	两	
甲	1 488	3 050	11	$5\frac{7}{53}$	62
乙	912	1 860	21	$2\frac{6}{53}$	38
丙	1 482	3 037	30	$5\frac{23}{53}$	$61\frac{3}{4}$
丁	1 206	2 472	8	$3\frac{17}{53}$	$50\frac{1}{4}$

《九章算术·均输》已有很复杂的分配问题，而秦氏设题尤其推陈出新，前所未有。

1. 复邑修赋

问：有海坍县地，今已复涨。岁久、乡井再成，申请创邑。称土排到六乡。以附郭为甲、最远为己。各有田九等。开具下项。甲

乡共计田一十四万一百九十三亩三角[①]一十二步。乙乡共计田八万四千一十亩二角二步。丙乡，田共计一十二万九百三十五亩五十八步五分，丁乡，田共计八万九千六十六亩二步三分，戊乡，田共计二十万四千四百七十四亩一角二十四步四分，己乡，田共计一十五万八千四百六十亩三角十八步二分。

照得昨来本县原科[②]苗米一十万三千五百六十七石八斗四升四合二勺，和买绢一万三千四百九十八、匹一丈七尺三寸七分五厘，夏税[③]、九千八百七十六匹三丈二尺六寸五分六厘。其六乡田系三色：甲为上，乙丙为次，丁戊己又为次。先令官物为三差，使上比中、中比下皆十分外差一。次令各乡九等，皆于十分内差一抛科……欲知三色等每亩……及其科数各几何？

(答数：甲乡、苗米19 550石2斗4升8合3勺，和买10 192丈2尺6寸5分6厘，夏税7 457丈6尺8寸9分8厘。其上等上田苗米3斗2升3合2勺，和买1尺6寸9分，夏税1尺2寸3分……其下等下田苗米6升4合6勺，和买3寸4分，夏税2寸5分……卷9只此1题)

题文大意：江南沿岸耕地坍入水域，有时陆地隆起，又复为农田。题意是说坍田前国家有三项税入：苗米十万多石，和买绢一万三千多匹，夏税绢九千余匹。现在陷地又复为农田，新建县邑计甲乙等六乡，按各乡分摊原定国家税务，加权标准是“外差一”即甲：乙：丙：丁：戊：己＝上：中：中：下：下：下＝$(1+10\%)^2$：$(1+10\%)$：$(1+10\%)$：1：1：1＝121：110：110：100：100：100。各乡土地又分为上上、上中、上下、中上、中中、中下、下上、下

① 1角＝$\frac{1}{4}$亩＝60方丈。

② 科：科税。

③ 苗米、和买、夏税都是当时国家季节性纳税项目，详节见第三编第三章，四、经济·税制。

中、下下九等，按田等级以及田亩多少分摊各乡任务，加权标准是内差一，即按 10：9：8：7：6：5：4：3：2 分摊。

解法：

以苗米而论，甲乡应分摊

$$103\,567.844\,2\times\frac{121}{121+2\times110+300}=19\,550.248\,3(\text{石})$$

题文中列甲乡九等田各亩数：

上上：5 678亩 1 角 48 方步，上中4 892亩 30 方步，

上下6 621亩 54 方步，中上8 225亩 24 方步，

中中10 035亩 6 方步，中下16 530亩，

下上21 090亩 24 方步，下中32 060亩 3 方步，

下下35 061亩 3 角 3 方步。

各乡任务怎样分摊到户？以田好坏以及田亩大小加权分配。术文说："列各乡等位。自上等位置十分，每以内分锥行，九折之……又各以亩步乘之，副并为乡法，以除诸各乡所得官物数。所得为一分之率，以乘未并者，各得每亩税色。"举例说，甲乡上上等田每亩对苗米应分摊

$$10\times19\,950.248\,3\div\Big(5\,678\frac{108}{240}\times10+4\,892\frac{30}{240}\times9+6\,621\frac{54}{240}\times8+8\,225\frac{24}{240}\times7+10\,035\frac{6}{240}\times6+16\,530\times5+21\,090\frac{24}{240}\times4+32\,060\frac{3}{240}\times3+35\,061\frac{183}{240}\times2\Big)=0.3232(\text{石})，$$

上中等田每亩对苗米应分摊

$$9\times19\,950.248\,3\div(56\,784.5+44\,029.125+52\,969.8+57\,575.7+60\,210.15+82\,650+84\,360.4+96\,180.037+70\,123.525)=9\times19\,950.248\,3\div604\,883.237=0.290(\text{石})，$$

………

本题为《九章算术·均输》开头四题合理分摊计算的继续和

发展，与秦氏《数书九章·序》为第五章所写颂词前后呼应："邦国之赋，以待百事，畡田经入，取之有度，未免力役，先商厥功。以衰以率，劳逸乃同。汉犹近古，税租以算，调均钱谷，河菑之扞，惟仁隐民，犹已溺饥。赋役不均，宁得勿思?"

本题题文、答、术、草、筹算图式共达三万字，是从来算术题篇幅之多之最。我国自古以来四赋造册非常认真精细。清梅文鼎孙珏成对此有微词："查户工二部奏销银数，分下有厘毫丝忽微尘等十四位。为数既多，易于错误，徒滋书吏指驳之端……今拟分下只留厘毫丝忽四位。"[1] 本题如此翔实的田亩数据很可能是当时农田税册实录非常珍贵。六个乡核定为上、中、下三级是合理的：查甲乙乡上田多，下田少，而且"附郭"[2] 戊己乡上田少，下田多，且距纳税所远。各乡田分九等，含田有多有少，而且出现好几个无字，尤其体现了真实性。江南坍地、涨地到本世纪 50 年代仍有发生，钱塘江南岸大片农地系新涨。

本题运用两次分配比例，分摊税务也是合理的。从宏观考虑：从含田好坏多少，去纳税所远近只评定六个乡纳税三种权：

121 110 100不问所有田亩多少。由微观考虑：从九等田好坏，以及田多少评定各等田每亩应纳税的九种权。于是对于此千家万户的纳税问题答数出现了 180 种之多：

①六个乡应分摊三种税：苗米、和买、夏税，计 3×6=18 种，

②各乡九等田，应分摊任务共：3×6×9=162 种。

一题 180 答也是从来未有之作。

2. 均科绵税

问：县科绵[3] 有五等户，共一万一千三十二户，共科绵八万

---

① 梅珏成，增删算法统宗，卷一，零数附录。

② 意即市郊。

③ 绵指丝绵，江南蚕农取茧加工制成御寒用品，以斤、两论值。

八千三百三十两六钱。上等一十二户，副等八十七户，中等四百六十四户，次等二千三十五户，下等八千四百三十五户。欲令上三等折半差①，下三等比中等六四折差。② 科率求之。各户纳及各等几何？

（答数：上等户每户纳绵124两，共纳1 488两。副等每户纳62两，共纳5 394两。中等每户纳31两，共纳14 384两，次等每户纳12.4两，共纳25 234两。下等每户纳4.96两，共纳41 837.6两。卷10第5题）

解法：

术文说："列五等户数。先以四折下等数，加次等户。又以四折之，加中等户数。欲以半折之，加二(副)等户。又以半折之，加上等户数，不折，使为法(除数)除科绵，得上等一户之绵。复半之，为副等。又半之，为中等。又四折之，为次等。又四折之，为下等。各一户绵却各以户数乘之，各得五等共出绵。"

我们如设五等丝绵户依次有户数为 b_1，b_2，b_3，b_4，b_5，术文是说上等户每户应纳丝绵(两)为

$$c=\frac{88\ 330.6}{b_1+0.5(b_2+0.5(b_3+0.4(b_4+0.4b_5)}$$

副等户每户应纳丝绵(两)为 $0.5c$，中等户为 $0.5\times0.5c$；次等户为 $0.4\times0.5\times0.5c$，下等户为 $0.4\times0.4\times0.5\times0.5c$，各以户数乘，得五等户各共纳税数。

乍一看，本题秦氏分配比例公式似有悖常理，不能接受。事实上这是在当时纳丝绵实物税中的加权分配问题：按照五等农户富有贫困条件，以及每一等农户含户数二项因素加权。前者规定

① 加权数：设上、副、中、次、下五等每户出绵数如分别为 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，这里说前面三数 $a_1:a_2=a_2:a_3=1:0.5$。

② 后面三数之比 $a_3:a_4=a_4:a_5=1:0.4$。

$a_1:a_2=a_2:a_3=1:0.5$，$a_3:a_4=a_4:a_5=1:0.4$，五者连比，如化为整数之比：

$$a_1:a_2:a_3:a_4:a_5=400:200:100:40:16$$
$$=100:50:25:10:4,$$

再与后者户数取加权连比，各项对应相乘，乘积很大，运算工作量也大。秦氏却把五项四种比的连比化为：

$$1:a_1:a_1a_2:a_1a_2a_3:a_1a_2a_3a_4=1:0.5:0.25:0.1:0.04。$$

再与各等户数两两相乘，其加权分配率是

$$b_1,\ 0.5b_2,\ 0.25b_3,\ 0.1b_4,\ 0.04b_5。$$

这是秦氏公式的推导过程。我们考虑的是扩大，秦氏考虑的却是缩小。而且从公式结构看，以题给数据依次代入，非常方便，不必另外计算连比各项。本题的解法为"今定胜昔"提供了反例。

三　复　比　例

《九章算术》已把今有术，即三率法发展为重今有术。重今有术有两种：复比例——李淳风在注均输章第8题称复比例为重今有术。印度称为五率法、七率法至十一率法。《九章算术》有三例，均五率法，其中一例有错，经清人正误。《数书九章》中复比例题下面选析二则。

1. 堂皇程筑

问：有营造地基，长二十一丈，宽一十七丈。先令七人筑坚三丈，计功二日。今涓吉[①]立木有日，欲限三日筑了。每日合收杵手几何？

(答数：日收 $555\frac{1}{3}$ 工，卷14第2题)

题文大意：限3日内要打夯筑地基 21×17 平方丈。事前先作

① 涓吉即择吉。旧时建房要立排架，须选择黄道吉日。

试验：7 人 2 日内筑地基 3 平方丈。求：在规定时间内完成任务要多少工！

解法：

术文说："以长乘宽，又乘原日原人为实，以限日乘筑丈数为法。除之，得人夫"。就是说所求工数

$$x=\frac{21\times17\times7\times2}{3\times3}。$$

这是复比例问题。秦氏深知在规定期限内参加劳动人数与筑地基面积成正比，而与要求完工日数成反比。如所求人数为 x，那么其间关系应是

$$\left.\begin{matrix}3: & 21\times17\\3: & 2\end{matrix}\right\}=7:x。$$

当然在一定意义上人数、日数、面积数也不一定是单纯的正比例或反比例关系。

2. 军器功程

问：今欲造弓、刀各一万副，箭一百万只。据功程：七人九日造弓八张，八人六日造刀五副，三人二日造箭一百五十只。作院见管弓作二百二十五人，刀作五百四十人，箭作二百七十六人，欲知毕日几何？

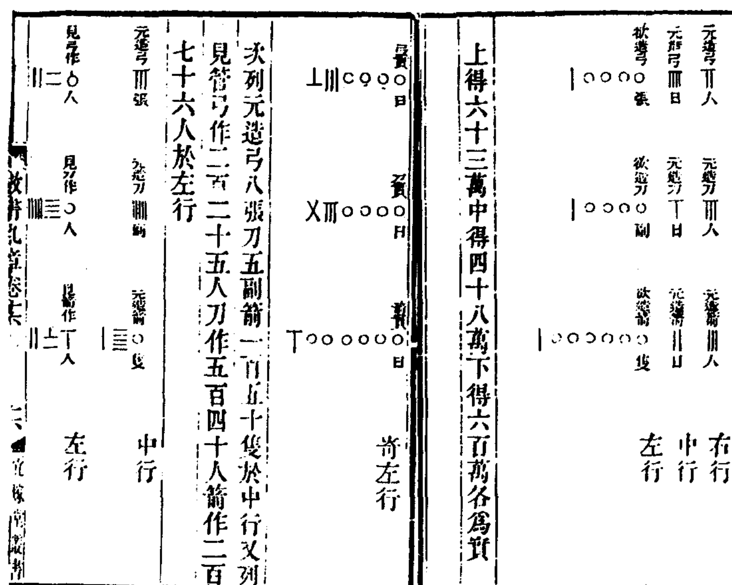
（答数：造弓 350 日，造刀 $177\frac{7}{9}$ 日，箭 $144\frac{64}{69}$ 日。卷 16 第 5 题）

解法：

术文说："以粟米求之，互换入之。置各功程人率于右行，置原日数于中行，置欲求数为左行。以三行对乘之，为各实列右行，次置原物数于中行，置见管人数为左行。以左行乘中行，各为法。以对除右行，各得日数。"

术文提供这类题的一般解法，而且明确指出题给各种数据应在位置，以便于筹算处理。以求造弓所需日数为例，原著草文后

列有图式，现改用阿拉伯数码。原著见图 4.1.2。


右行 中行 左行

上得六十三萬中得四十八萬下得六百萬各爲實

左行

次列元造弓八張刀五副箭一百五十隻於中行又列見管弓作二百二十五人刀作五百四十八人箭作二百七十六人於左行

中行 左行

图 4.1.2

造弓10 000张　　9 日　　7 人　　乘积　　630 000　　为弓实

　　左行　　　　中行　　右行

弓作　225 人　　8 张　　　　　　乘积　　1 800　　为弓法

　　左行　　　　中行

造弓10 000张所需日数：$x=$弓实÷弓法$=630\ 000\div1\ 800=177\frac{7}{9}$（日）

以造弓为例如设造10 000张弓所需日数为 x，据题意及所给数据，可排出复比例式

$$\left.\begin{array}{l}8:10\ 000\\225:7\end{array}\right\}=9:x$$

可见秦氏解法正确。

从本题草文图式得知古代用筹算解复比例式原貌。

四 连比例

另一种重今有术为连比例——刘徽在注均输章第10题时称之为重今有术，限于历史条件，《九章算术》无三对以上有比例关系的算题、刘注均输第10题时的理论："……是谓重今有也。虽各有率，不问中间。故令后实乘前实，后法乘前法而并除也……凡率错互不通者，皆积齐同而用之。放此，虽四五转不异也。"《数书九章》多处有连比例问题，在分配比例问题当出现加权时常需化为连比，但秦氏别出心裁，可以回避及此，达到同一目的，事半功倍，此点已在"复邑修赋"题中剖析。在某些问题中他又因地制宜地运用刘徽理论，解决刘徽未曾施行，而预言过的"虽四五转不异也"。下面选析三题。

1. 互易推本

问：出度牒，差人营运。每三道易盐一十三袋；盐二袋，易布八十四匹，布一十五匹易绢三匹半，绢六匹易银七两二钱。今趁到银九千一百七十二两八钱。欲知：原关度牒道数几何？

（答数：度牒180道。卷17第3题）

题文大意：以下各种票证、商品是等价的：3道度牒、13袋盐，2袋盐、84匹布，15匹布、$3\frac{1}{2}$匹绢，6匹绢、7.2两银。依次经过四次商品交换后得到银9 172.8两。问：原持度牒多少道？

解法：

术文说："以粟米互乘易法求之。列各数，以本色相对，如雁翅。（图4.1.2）以多一事者相乘，为实。以少一事者相乘，为法。除之。"这就是把题给数据对应地列成二斜行，其中同一纵列记等价商品，同一横行记同种（本色）商品。从斜行来看上面一行有五

个量(多一事)相乘作为被除数，下面一行有四个量（少一事）相乘作为除数。做一次除法，除数就是答数。

事实上这是刘徽所说“凡率错互不通者，皆积齐同而用之”的再现。秦氏模拟重今有术，解五种量的连比例问题。我们知道如果有甲、乙、丙、丁、戊五种量，两两之比[①] 为甲：乙$=a:a'$，乙：丙$=b:b'$，丙：丁$=c:c'$，丁：戊$=d:d'$。那么五者连比[②] 甲：乙：丙：丁：戊$=abcd:a'bcd:a'b'cd:a'b'c'd:a'b'c'd'$。

以本题说五种商品各含如下单位数等价：
度牒 3×2×15×6 道，盐 13×2×15×6 袋，布 12×84×15×6 匹，绢 13×84×3.5×6 匹，银 13×84×3.5×7.2 两。它们之间的比，就相当于粟米章 20 种粮食之比，也就是刘徽在《九章算术·方程》第 18 题注所说相当率(相对于各当率而言)。既然 3×2×15×6 道度牒与 13×84×3.5×7.2 两白银同价，那么9 172.8两白银，做一次正比例，等价于度牒 x 道，是比例式的解：

$$3\times2\times15\times6:13\times84\times3.5\times72=x:9\ 172.8$$

$$x=\frac{3\times2\times15\times6\times9\ 172.8}{13\times84\times3.5\times7.2}。$$

秦九韶写成“雁翅”形：

				3	度牒
			2	13	盐
		15	84		布
	6	3.5			绢
9 172.8	7.2				银

2. 菽粟互易

问：菽三升易小麦二升，小麦一升五合易油麻八合，油麻一升二合易粳米一升八合。今将菽十四石四斗欲易油麻，又将小麦

---

① 等价二种商品各含相应单位数之比。

② 等价五种商品各含相应单位数之比。

二十一石六斗欲易粳米几何？

（答数：油麻 5 石 1 斗 2 升，粳米 17 石 2 斗 3 升。卷 17 第 4 题）

解法：

本题一题二问。在题给条件下问菽（豆）14 石 4 斗可换多少油麻（芝麻）？小麦 21 石 6 斗可以换多少粳米？纯是生活常事，却较《九章算术·粟米》深刻一层。原著有二图式

	30	14 400	菽		15	21 600	麦
15	20		麦	12	8		油麻
8			油麻	18			粳米

术文都说："以下三事相乘为实，以上二事为法"就是说所求油麻、粳米（合）数分别是

$$\frac{14\ 400\times 20\times 8}{30\times 15}\qquad \frac{21\ 600\times 8\times 18}{15\times 12}$$

本题解法说明秦氏对连比例问题的处理已得心应手，哪些题给数据应列入算式，哪些不应列入，已有针对性的选择。术文明确地指出："不干其率者不置。"

3. 推计互易

问：库率：糯谷七石出糯米三石，糯米一斗易小麦一斗七升，小麦踏麹二斤四两，麹一十一斤酿糯米一斗三升。今有糯谷一千七百五十九石三斗八升。欲出谷、做米易麦，踏麹，还自酿余谷之米，须令适足各合几何？

（答数：共谷1 759.38石，出谷 924 石，得米 396 石，易麦 673.2 石，踏麹30 294斤，余谷 835.38 升，酿米 358.02 石。卷 18 第 1 题）

题文大意：这是一道在酿造过程：从糯谷经砻碾、易麦、制麹等过程中产生的算题。其中已知

糯谷（石）：出糯米（石）＝7：3，

糯米（升）：换小麦（升）＝10：17，

小麦(升)∶制麹(斤)$=5:2\frac{1}{4}=5:2.25$，

麹(斤)∶酿糯米(升)$=11:13$。

问题提出在1759石3斗8升糯谷中应取出多少升加工成糯米，以此换麦、制麹。所制麹适可以酿造余下糯谷加工成的糯米？显然这是《九章算术·盈不足》第15题以漆易油调和余漆题的推广。以漆易油题原来用盈不足求解，刘徽改用重今有术解，而秦氏据刘注精神解本题。

原著术文说："以粟米换易求之。置诸率，随本色对列，如雁翅。(此为元图)。有分者通之，异类者变之(此为变图)。以上位者进乘之，以下位者退乘之，得合数(此为合图)有对者相乘之，无对者直命之，为诸率(此为率图)"图为书影4.1.3。我们用阿拉伯数字记这些图式，并略加说明。

元图					
				7	谷
			10	3	米
		5	17		麦
	11	2.25			麹
	13				米

变图					
				7	谷
			10	3	米
		20①	17		麦
	33	9			麹
91②					米

合图				
			46 200	出谷
		6 600	3	米
	660	51		麦
33	450			麹
41 969				余谷

① "有分者通之"是指在元图左第二列两数都扩大4倍。

② 题文7石谷可以出3石米，11斤麹可以酝13升米。那么33斤麹需要91升谷。借此可以省去另立(糯)米一行。

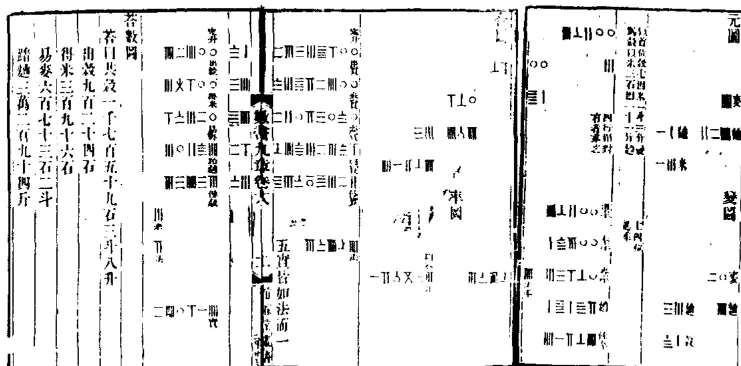


图 4.1.3

从变图、五种量：谷、做米、换麦、制麹、酿造已知比 $a:a'=7:3$，$b:b'=10:17$，$c:c'=20:9$，$d:d'=33:91$ 化为连比 $abcd:a'bcd:a'b'cd:a'b'c'd:a'b'c'd'=7\times10\times20\times33:3\times10\times20\times33:3\times17\times9\times33:17\times3\times9\times91=46\ 200:19\ 800:33\ 600:15\ 147:41\ 769$

术文说：

“有对者相乘之，无对者直命之”是指在合图中已在变图基础上作好准备。第一、五两横行就是连比中（出）谷的率和余谷率所以“直命之”。而其余各率都是同一横行“有对者相乘之”。

例如　19 800＝6 600×3　等等　得率图

率图		46 200(出)谷率
问 数		19 800米率
175 938	87 960	33 660麦率
升	法率	15 147麹
		41 769（余）谷率

在率图之后，原著相当于说

8 128 335 600出谷	92 400出谷
3 483 572 400米实	39 600得米

5 922 073 080麦实	67 320易麦
2 664 932 886麹实	30 293制麹
7 348 754 322余实	83 538余谷

秦氏据刘注《九章算术·均输》第15题解法：如果有谷46 200＋41 769＝87 960，那么在其中取出46 200，经一系列做米、换麦、制麹等手续，刚好可以酿所留谷所做米。从率图所算得的数据，问题已转化为正比例问题。本题一开始就说有谷175 938(升)，因此应取出：

糯谷：

175 938×46 200÷87 960＝8 128 335 600÷87 960＝92 400(升)，

做米：

175 938×19 800÷87 960＝3 483 572 400÷87 960＝39 600(升)。

类似计算得换麦、制麹，应留谷分别为67 320，30 293，83 538(升)在书影末尾还记道　3米　7法　250 614实　这是指酿造用谷，能做米　83 538×3÷7＝250 614÷7＝38 502(升)。

秦氏从酿造过程设计此题，当是精心杰作之一。在一定数量谷子中取出若干，经做米、换麦以制麹，然后酿余下的谷所做的米，不缺少也不多余。能不是组合数学或运筹学的肇始吗？此题源自《九章算术》，但多了几个层次，真是胜于蓝之作。如果把它适当改变内容，保存命题设计思想，作为某一级数学竞赛试题，也很合适。

清四库馆臣评点秦氏书至此，也予美誉："术中互乘、进乘、退乘、对乘皆通分法也。"张丘建云："学者不患乘除之为难，而患通分之为难。此术曲尽其妙。"又说："再此术不独用法之巧，即图式布置，亦皆具精义，熟玩之，可以得其往来变通之故。"四库馆臣所说甚是，有现实意义。从计算方法考虑，计算数据排列位置与计算工作量和减少差错有密切关系。

第五节 双假设法

《九章算术》设专章讨论这种解法，已在本《大系》第二卷详论。《九章算术·盈不足》后12题对一般问题俱用假设法解题，但全部是一盈、一不足，未免单调。秦氏书中用此法解题，引用不多，但能注意到盈、不足的变化。我们选析其一题

计造军衣

问：库有布、绵、絮三色，计料欲制军衣。其布、六人八匹，少一百六十匹，七人九匹，剩五百六十匹。其绵，八人一百五十两，剩一万六千五百两，九人一百七十两，剩一万四千四百两。其絮，四人一十三斤，少六千八百四斤，五人一十四斤，适足。欲知：军士及布、绵、絮各几何？

（答数：士兵15 120人。布20 000匹，绵300 000两，絮42 336斤。卷16第7题）

题文大意：对于布作二次假设：每人$\frac{8}{6}$匹，少了160匹；每人$\frac{9}{7}$匹，多了560匹。对于丝绵作二次假设：每人$\frac{150}{8}$两多了16 500两；每人$\frac{170}{9}$两，多了14 400两。对于棉絮，每人$\frac{13}{4}$斤，少了6 804斤；每人$\frac{14}{5}$斤，刚好不多也不少。求有多少士兵？多少匹布？多少两丝绵？多少斤棉絮？

解法：

从术文、草文及图式可以看到秦氏忠实按照盈不足术解题。以第二组问题来说：是双盈问题。他的解法相当于说 士兵数是 $\frac{16\ 500-14\ 400}{\frac{170}{9}-\frac{150}{8}}=\frac{8\times9\times(16\ 500-14\ 400)}{8\times170-9\times150}=15\ 120$(人)，两库中

实有丝绵数是$\frac{8\times170\times16\ 500-9\times150\times14\ 400}{8\times170-9\times150}=300\ 000$(两)。

第三组问题是不足、适足之例。其士兵数为

$$\frac{6\ 804}{\frac{13}{4}-\frac{14}{5}}=15\ 120(\text{人}),$$

而棉絮数为$\frac{\frac{14}{5}\times6\ 804}{\frac{13}{4}-\frac{14}{5}}=42\ 330$(斤)。

本题草文及其图式提供了筹算盈不足术的真凭实据。(图4.1.4为求布筹算书影)

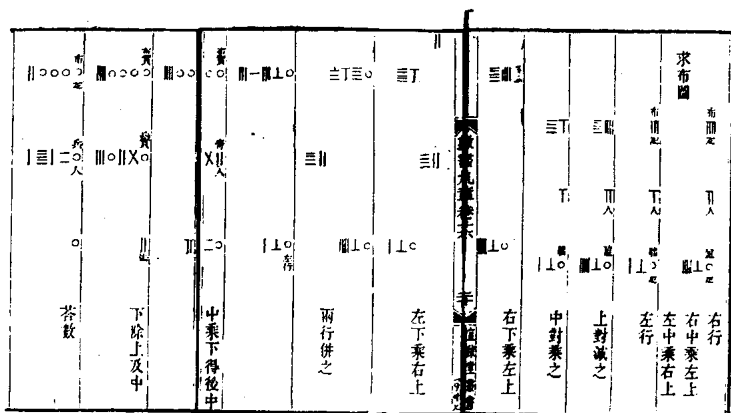


图 4.1.4

我们还须区别中算中提法的形似而实异。

盈不足术的提法。“今有共买物，人出八余三；人出七，余六，求物数。”如设物数为x，是解一次方程问题$8x+3=7x+6$，$x=3$。

而按孙子的提法：“物不知数，八八数之，余三，七七数之余六，求物数。”如设物数为x，是解同余式的问题：

$$x\equiv 3 \pmod 8 \equiv 6 \pmod 7 \qquad x\equiv 27 \pmod{56}$$

元代严恭《通原算法》在穿陌问题中已注意及此。

第六节 归 一 法

在《数书九章》中现选析用归一算法解的一题。

计造石坝

问：创石坝一座，长三十丈，水深四丈二尺，全面[①]宽三丈。石板每片长五尺、宽二尺、厚五寸，用灰一十斤。每层高二尺，差宽一尺。石匠每工九片，搬扛四片用工五人，兼工搬灰兼用，每工一百一十斤。火头每名管六十人，部押每名管一百二十人。所用石须依原段，不许凿动。欲知：坝下宽及用石、并灰、共工各几何？

（答数：坝下宽 5 丈。石板100 800片。石灰1 008 000斤。用103 528$\frac{8}{11}$工。卷 13 第 3 题）

参考译文：建石坝一座，长 30 丈、高 4 丈 2 尺，顶宽 3 丈，每层高 2 尺，逐层加宽，层差 1 尺。石板每片长 5 尺、宽 2 尺、厚 5 寸，每片平均用石灰 10 斤。石匠每工做 9 片，搬运工每 4 片用 5 工，粘结料石灰施工，每工做 110 斤。伙食工每名管 60 人，工头每名管 120 人。问：石坝底层宽多少？用石多少片？共用去多少工？

解法：

术文说："以商功求之，招法入之"招法就是招差法——求数列和。本题借以求下宽，将在下一节申说，得下宽是 5 丈。（图 4.1.5a 为原著书影）

---

① 全面，指顶面。

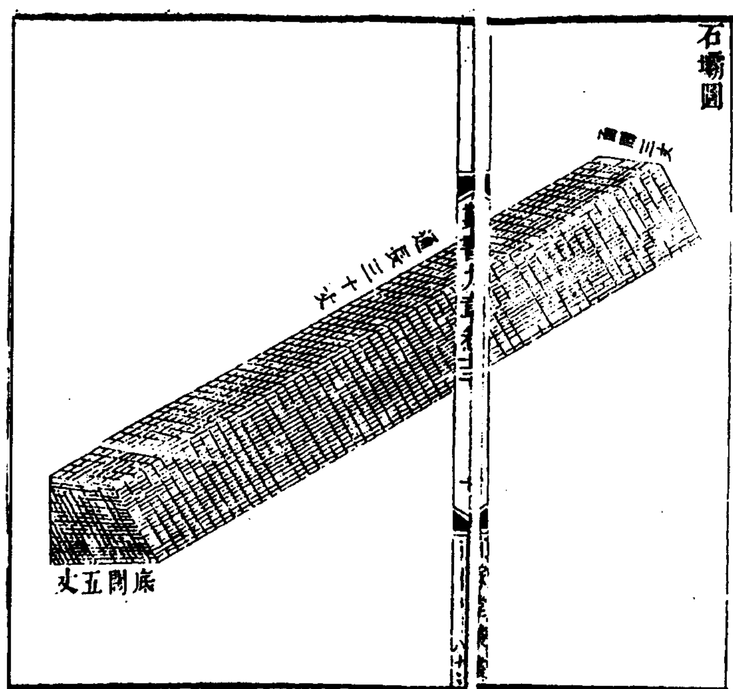


图 4.1.5 a

术文首先求出石坝用石板片数。步骤是

(i)顶层用石板片数，据题给数据计算

$$a_1=\frac{300\times30\times2}{5\times2\times0.5}=3\ 600\text{片},$$

(ii)每层递增石板数

$$d=\frac{300\times1\times2}{5\times2\times0.5}=120\text{ 片},$$

(iii)按数列求和公式所求石板片数

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d,$$

取 $n=42\div2=21$，$S_n=100\ 800$(片)。

术文据题意又求出用石灰斤数为1 008 000(斤)。

在求各工种工数上术文说："以匠工片数约板，得石匠。以搬夫数乘石板为实，以扛片数为法，除之，得(搬夫)人数。并诸工，以火头管数约之，为火头。半之，为部押。"

这是说

石匠每工做 9 片，每片需$\frac{1}{9}$工，100 800片需

$$\frac{100\ 800}{9}=11\ 200(\text{工})。$$

搬运工每工运$\frac{4}{5}$片，每片需$\frac{5}{4}$工，100 800片需

$$\frac{100\ 800}{\frac{5}{4}}=80\ 640(\text{工})。$$

石灰工：石坝共用石灰100 800×10 斤。每 110 斤用一石灰工，每斤用$\frac{1}{110}$人，因此用石灰工

$$\frac{100\ 800\times 10}{110}=9\ 163\frac{7}{11}(\text{工})。$$

为求出伙食工人数，秦氏再一次用归一法：

共有施工工数为$11\ 200+80\ 640+9\ 163\frac{7}{11}$，而每伙食工管 60 工，这就是说每工需$\frac{1}{60}$，于是共需伙食工：

$$\frac{11\ 200+80\ 640+9\ 163\frac{7}{11}}{60}=1\ 688\frac{13}{33}(\text{工})。$$

虽然同样可以用归一法求工头数，由于与伙夫工定额有倍数关系，秦氏就取前者之半。求总和，就得答数。

第七节　数　　列

《数书九章》多次论述数列——等差数列和二阶等差数列。其中“缀术推星”(卷3第4题)“计造石坝”(卷13第3题)为等差数列例。以下分别在本编第三章第二节、范例以及上一节范题介绍其他数学内容。以“计造石坝”来说，术文论述数列求前 n 项和及第 n 项，都很精到，术文云：“……以招法入之。置层高尺数(h,图 4.1.5b)乘面宽(b)及长(l)，为初率(blh)，次以差宽尺数

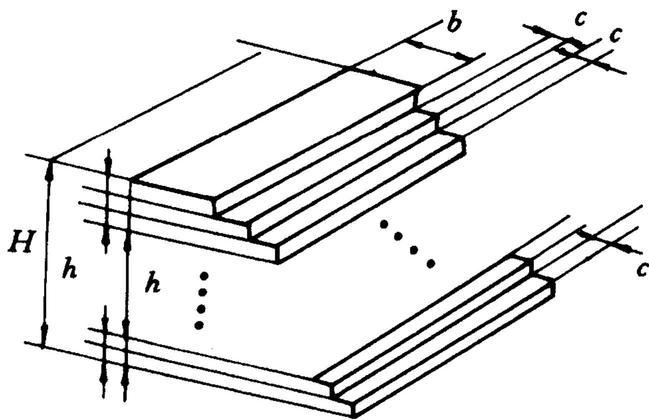


图 4.1.5 b

(c)乘高(h)又乘长(l)，为次率(clh)，却以石板长宽厚相乘($b'l'h'$)为法，以除二率各得石板[①] 为上积$\left(a_1=\dfrac{blh}{b'l'h'}\right)$及次积$\left(d=\dfrac{clh}{b'l'h'}\right)$。置深($H$)，以层高尺数约之，得层数$\left(n=\dfrac{H}{h}\right)$。对二积列之一行。其上积，便以层数为乘率，其次积，置层数减一，以

① 石板数。

层数乘之，半之为乘率，以乘次积。并之，为石板[①]（数）。”

一 等差数列

设等差数列首项为 a_1，公差为 d，项数为 n，末项为 a_n，和为 S_n，则

$$a_n=a_1+(n-1)d, \tag{1}$$

$$S_n=\frac{1}{2}(a_1+a_n)n。 \tag{2}$$

从秦氏“计造石坝”术文可见这是他用古汉语写的另一求和公式

$$S_n=a_1n+\frac{1}{2}n(n-1)d。 \tag{3}$$

而(3)式恰是(1)，(2)两式的综合。可见他对等差数列性质的认识比前人更深入一层。以下再分析等差数列范例三则。

1. 积木计余

问：原管杉木一尖垛，偶不论数，从上取用至中间。现存九条为面宽。原木及现存各几何？

（答数：原木 153 条，现存木 117 条，卷 14 第 5 题）

题文大意：原著附插图（图 4.1.6）。图画的是俯视图。题文是说一堆杉木，基大顶小（一根杉木）。现经一段时间取用，正中层只存 9 根。从此可推测基层有 9×2－1＝17 根，借以设问：现存杉木多少根？

解法：

术文说：“……垛积入之。倍中面，副（别）置，减一，以乘其副，得数，半之，为原木数。副置中面，减一，以乘其副，得数，

① “其上积，便以层数……为石板”原著为“一行各添一拨天地数各以累乘对约之，得乘率以对上次积，并之为石板”《宋、景昌札记》云：“此语误”，改正如上。事实上原著草文如宋改。

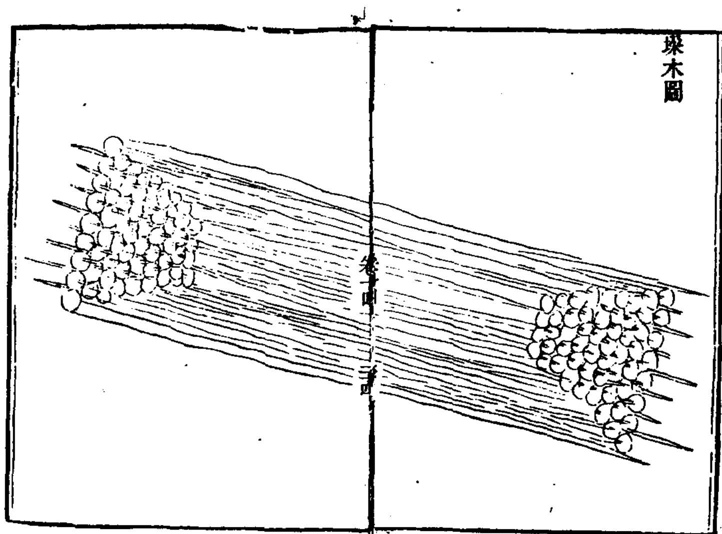


图 4.1.6

半之。用减原木，余为现存。”

如用公式(1)来解释，这里使用了两次数列求和。由于数列是自然数：$a_1=1$，$d=1$，中层只存 9 根，上面有 8 层，下面也应有 8 层，所以基层有 17 根[①]。公式(2)在此变形为

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=a_1n+\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{1}{2}n(n+1)。\qquad(4)$$

秦氏术文正是用古汉语写的公式(4)。他先计算 17 层杉木个数：$\frac{1}{2}\times17\times18=153$，拿去的上面 8 层杉木个数：$\frac{1}{2}\times8\times9=36$。做一次减法，就得答数。

2. 圆营敷布

问：周制一军，欲布圆营九重。每卒立圜边六尺，重间相去，

① 在术文中秦氏自注说：“其非中一层数者，各以自地上至面层数，立术求之。”

比立尺数倍之。于内摘差兵四分之一出奇，不可缩营示弱，须令仍用原营布满余兵。欲知：原营内外周及立人数，并出奇后，每卒立尺数，内外周人数各几何？

（答数：周制一军12 500人。减员3 125人。原内周长804丈，立1 340人；原外周861丈6尺，立1 436人。减员后外周立1 089人，内周立1 016人。内外周人间距7尺9寸1分。16卷第1题。）

参考译文

周朝制度一军有12 500人，排成9层圆阵。相邻二人距离6尺，相邻二层距离为二人距2倍。现因情况，减员士兵四分之一，但不许示弱于敌，仍按原来阵容排满。问：原来圆阵内外周长、各立多少人？减员后内周外各立多少人？相邻二人距离多少？（图4.1.7为原著插图）

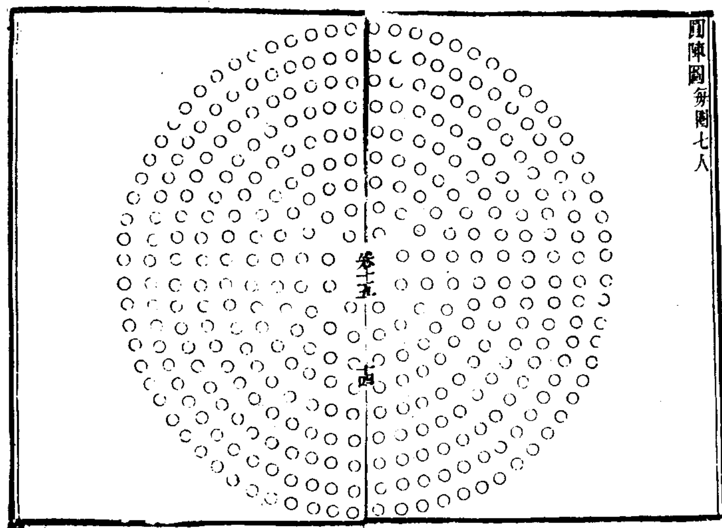


图 4.1.7

解法：

(i)减员前

术文说："以商功求之。置重数，减一，余为段。以段乘圆差为衰，以衰乘重数为率。求原周、以率减兵，余如重数而一，得内周人数，不满为余兵。"

本题秦氏运用公式(3)。圆阵相邻两层间元素差为b(圆差d)，本题层间距是每层人间距的2倍。因此相邻两层间元素差应为$2d$。把公式(3)变换为求a_1形式即：

$$a_1=\frac{1}{n}(S_n-n(n-1)d)。\tag{4}$$

这就是术文所说："置重数，减一，余为段$(n-1)$。以段数乘圆差为衰，以衰乘重数为率$(n(n-1)d)$。"而所求内周(a_1)人数[①]就是公式(4)。

术文继续说："以人立圆边(b)乘内周人，得内周尺(ba_1)。""倍衰乘圆边为泛$(12(n-1)d)$。以泛并内周尺，得外周尺。"

这是秦氏运用公式(1)，从a_1求a_6，用古汉语写出的结果。相当于$a_9=a_1+(n-1)\cdot 2d$，因此外周长是

$$ba_9=6a_1+12(n-1)d。$$

至以外周所立人数显然如术文所说："外周尺为实，如圆边而一，得外周人。"[②]

(ii)减员后

设减员后士兵总数为S'。圆阵层数，圆差没有变，又设外周上、内周上人数分别为a_n'，a_1'，则从公式(1)得

$$a_n'=a_1'+(n-1)d,$$

两端都乘以n，则

$$na_n'=na_1'+n(n-1)d=na_1'+\frac{n}{2}(n-1)d+\frac{n}{2}(n-1)d。$$

① 显然为近似值。

② 这里运算绕了不必要的远路。应先求a_9，再求外周长。

从公式(3)，得

$$na_n'=S'+\frac{n}{2}(n-1)d,$$ ①

那么，所求外周上人数应是

$$a_n'=\frac{S'}{n}+\frac{1}{2}(n-1)d。\tag{5}$$

这是经过多次代数变换的结果：从减员前层数、圆差以及减员后士兵数，就可以从上面公式作算术运算求出减员后外周上人数。令人叹为观止的是：秦氏后继的术文也正是这样写着：

“求出奇后，以半率$\left(\frac{n}{2}(n-1)d\right)$②加存兵($S'$)，如重数($n$)而一，得外周人(数)”

外周人数求出后，外周长已知，那么所求二人间距，只要做一次除法，术文说：“以外周人约原外周尺，得后立尺。”

从所引数例可知秦氏对于圆束(等差数列)五个量a_1,n,d,a_n，S之间的关系的认识已很全面。他设题已不只限于求和、求末项，而是设题内容多样、富有变化。

在“计造石坝”题中能综合运用(1)，(2)两式以简化运算。

“积木计余”一题中也含技巧性内容。

“圆营敷布”题不论是减员前还是减员后的题目设计都可谓出奇制胜。凭借熟练变换能力，他推导出用S，n，d表示a_1的公式(4)。他还设计了减员圆阵，并推导出用S，n，d表示a_n的公式(5)，而且推导简洁，评为最佳方案也不为过。

怎样用a_1，d，S求n的问题，秦氏已在“计布圆阵”一题中考虑到了，因牵涉建立二次方程将在第三章介绍。

---

① $S'=\frac{n}{2}(a_1'+a_n')=\frac{n}{2}(2a_1'+(n-1)d)=na_1'+\frac{n}{2}(n-1)d$。

② 宜稼堂本无“半”字。

此外另有一题，历来颇有争议，现介绍如下。

3. 竹围芦束

问：受给场交收竹二千三百七十四把，内筀[①]竹一千一百五十一把。每把外围三十六竿。水竹一千二百二十三把，每把外围四十二竿。芦三千六十五束，每束围五尺。其芦原样五尺五寸，今纳到围小。合准原芦几束、及外筀竹各几何？

(答数：筀竹146 177竿，水竹206 687竿，折合原芦苇2 532$\frac{7}{121}$捆。卷14第4题)

参考译文：建材场地收到竹类共2 374捆。其中筀竹1 151捆，每捆周围36枝；水竹1 223捆，每捆周围42枝；芦苇3 065捆，每捆外围周长5尺，原来外围周长5.5尺，运到场地时缩小了，折合原样有多少捆，又筀竹、水竹各有几竿？

解法：

术文说："以方田及圆率求之。置圆束差(d)，并竹外围竿数(a_n)，以乘外围，又乘把数，为竹实。倍圆束差，为竹法，除之。各得二竹数。皆以把数为心加入，各得竹条数。"[②] 设两种竹各有p_1，p_2把(捆)术文正是指筀竹和水竹各有竿数是

$$S_1=\frac{p_1(a_n+d)a_n}{2d}+p_1,$$

$$S_2=\frac{p_2(a'_n+d)a'_n}{2d}+p_2。$$

以题给数据代入$a_n=36$，$a'_n=42$；$d=6$(见原著草文)，$p_1=2374$，$p_2=1223$。计算，就得到答数。

本题求的是两种竹各有总数(竿)，所以分别扩大了p_1，p_2倍。就一捆竹而言，秦氏用的公式是圆束和

---

① 筀(gu)，建筑材料。

② 求芦苇原把数解法，在第二章第一节介绍。

$$S_n=1+\frac{a_n(a_n+d)}{2d},\qquad (1)$$

其中 d 是公差，a_n 是末项。

什么是圆束？我国在30年代末期出版过一部体量很大、内容丰富、翔实、含中算词条的数学辞典[①]。在圆束一词中解释说："圆束之名，见宋秦九韶《数书九章》……乃以圆物束成六角柱形也。中心为一柱，由内而外，每匝皆递增六枚。……以六除外周一匝之枚数(a_n)，加一枚，即外边之枚数(b_n)[②]，以每边之枚数减一，与每边之枚数相乘，又以三乘之，加一枚，即共枚数。"如设圆束共有 n 层，意思是说

$$S_n=3b_n(b_n-1)+1。\qquad (2)$$

可以验证(1)，(2)两式是等价的。也就是说《数学词典》的作者已完整地解释了秦氏圆束公式(1)的来源：是实心束，即中间为1的圆束(六角束)，$\{an\}$：1，6，12，18，…，的求和公式。50年代有文章批评《数学词典》[③]，并另作推导。从秦氏术文。"以方田及圆率求之"出发，把求和公式看成是面积计算问题。分两方面考虑。

(i)圆束直径上有奇数个元素，当层数递增时，圆束中元素和构成数列，如以面积近似代替圆束含元素个数，则

$$\{S_n\}：\frac{\pi}{4}\cdot 1^2，\frac{\pi}{4}\cdot 3^2，\frac{\pi}{4}\cdot 5^2，\frac{\pi}{4}\cdot 7^2，\cdots$$

这就是：$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}+2\pi$，$\frac{\pi}{4}+6\pi$，$\frac{\pi}{4}+12\pi$，…

其一阶差是　2π，4π，6π

---

① 段育华、周元瑞，算学辞典，pp. 1～1064，商务印书馆，1938

② $b_n=\frac{1}{6}a_n$，也就是说把六角柱形束外周枚数 a_n 的六分之一看成六角柱外周每边的枚数(b_n)。

③ 王守义. 圆束绝不是六角束. 数学通报，1957(5)：8～9。

其二阶差(术文中称圆束差)是

$$2\pi,\ 2\pi,\ 2\pi,\ \cdots$$

圆束和必须是整数。秦氏取圆率 π 近似值为 3，又取 $\frac{\pi}{4}=1$，那么

$\{S_n\}$：　1，7，19，37…，其中 S_n 就是 n 层元素总和

d_1　6，12，18…

d_2　6，6，…

用招差法，此二阶等差数列的第 n 项

$$S_n=a_1+\binom{n-1}{1}d_1+\binom{n-1}{2}d_2。\qquad (*)$$

由题给条件，又 $d_1=d_2$，因此 $n-1=\frac{a_n}{d}$①，$a_1=1$，那么上式($*$)就是秦氏圆束公式(1)。

(ii)圆束直径上有偶数个元素，类似于奇数个元素

$\{S_n\}$：$\frac{\pi}{4}\cdot 0^2$，$\frac{\pi}{4}\cdot 2^2$，$\frac{\pi}{4}\cdot 4^2$，$\frac{\pi}{4}\cdot 6^2$，…　它们就是

$$0,\ \pi,\ 4\pi,\ 9\pi,\ \cdots$$

其一阶差是　π，3π，5π，…

其二阶差是　2π，2π，…

从圆束和必须是整数考虑，那么取

$\{S_n\}$：　0，3，12，27，…

d_1　3，9，15，…

d_2　6，6，…

从题给条件，又　$n-2=\frac{a_n-d_1}{d}$，$d_1=\frac{d}{2}$，$d_2=d$，$a_1=0$ 代入($*$)式，就得到偶数个元素直径的圆束公式是

---

① 这里的 a_n 是指圆束外周元素个数，文章从 $a_n=a_1+(n-1)d$，视 $a_1=0$. 但紧接着又说 $a_1=1$，令人费解。

$$S_n=\frac{1}{2d}\left(a_n+\frac{d}{2}\right)^2 \tag{3}$$

上摘引的文章误导处在于：以 1 为中心(实心)的圆束逐层布列元素其分布，确与以 0 为中心(空心)的六角束不一样。把圆束视为以 1 为中心的实心六角束，是权宜之计。事实上要求圆束上元素(圆柱或圆球)同层相邻的都达到几何准确地挨紧(相切)或有等距，由于有理数(整数)与无理数(π)之间的矛盾，永远不可能做到。四库馆臣在“圆营敷布”所作按语有精到的见解：求圆阵草中用圆束法。圆束实六等边形，非圆形也。盖圆形重数相距等，则弧边上相距不等。弧边上相距等，则重数相距不等。惟圆束可并取相等，故用其法。至次阵减人数，不减营周尺数，则各重周上相距不能相等，故草文中又以尺数求内周人数。然未免与圆束逐层相差数不合。亦仅取其大略也。”上引文章一开始以面积(连续量)近似地代替元素个数(离散量)，后来又为迁就所求数是整数的事实，曾作了两次取近似值。不难检测，文章所得各层元素数与《数学词典》结果一样，即：1，6，12，18，…。仍旧是六角束各层元素个素(只首项取 1)。文章表面上是从二阶等差数列：1，7，19，37，… 出发。殊不知这是 1，6，12，18 的前 n 项和组成的数列。

说这些，是想作为一个例子说明：要剖析古人所思，确实不很容易，弄得不好，兜了一个大圈子，赢得“他在丛中笑”。完全否定了作为文章题目的命题。实际上从高阶等差数列的定义，任何等差数列的和都是二阶等差数列。

二　二阶等差数列

秦氏书中述二阶等差数列例子虽然不多，但是在中国数学史上却居领先地位。“方锥差”、“蒺藜差”名词实自秦氏开始。现举二例

1. 推求本息

问：三库息例：万贯以上，一厘，千贯以上，二厘五毫，百贯以上，三厘。甲库本四十九万三千八百贯，乙库本三十七万三百贯，丙库本二十四万六千八百贯。今三库共纳到息钱二万五千六百四十四贯二百文。其典率、甲反锥差、乙方锥差、丙蒺藜差。欲知：原典三例本、息各几何？

答数：甲库共得息9 053贯文：其中一厘息2 469贯，二厘半息4 115贯，三厘息2 469贯。乙库共得息10 051贯文。其中一厘息264贯500文，二厘半息2 645贯，三厘息7 141贯500文。丙库共得息6 540贯200文。其中一厘息246贯800文，二厘半息1 851贯，三厘息4 442贯400文。(卷18第3题)

题文大意：按规定借贷款项据金额多少计息：万贯以上利率一厘(1%)，千贯以上［至万贯］二厘半(2.5%)，百贯以上［至千贯］三厘(3%)。今有甲、乙、丙三金库。甲库有本金493 800贯文，按反锥差(3,2,1)分为三支，依次各按三种利率出贷。乙库有本金370 300贯文，按方锥差(1,4,9)分为三支按三种利率出贷。丙库有本金246 800贯文，按蒺藜差(1,3,6)分为三支按三种利率出贷问：三库每支各得利息多少？

解法：

本题是分配比例问题，其中乙、丙两金库本金要按照二阶等差数列1，4，9；1，3，6为分配率分为三支。原著术文、草文相当于说：

甲库本金分为$1+2+3=6$段，每段$493\ 800\div 6=82\ 300$(贯)。乙库本金、丙库本金分别分为$1+4+9=14$，$1+3+6=10$段，每段各为26 450，24 680贯。然后计算各自三支金额，分支计息。经整理列表如下：(图4.1.8为书影)

金库	每段(贯)	支	每支(贯)	利率(%)	得息(贯)	共得息(贯)
甲	82 300	3	246 900	1	2 469	9 053
		2	164 600	2.5	4 115	
		1	82 300	3	2 469	
乙	26 450	1	26 450	1	264.5	10 051
		4	105 800	2.5	2 645	
		9	238 050	3	7141.5	
丙	24 680	1	24 680	1	246.8	6 540.2
		3	74 040	2.5	1 851	
		6	148 080	3	4 442.4	
三金库						25 644.2

秦氏用二阶等差数列为分配率实为创举。四库馆臣评点说："反锥即平三角形，于四元玉鉴为茭草形，今反用之。方锥为四角垛，蒺藜形为立三角形，又为茭草落一形。"《数书九章》早《四元玉鉴》60 年用之。本题秦氏计算审慎，各笔账准确无误。他所说反锥差与锥差显然不一样，答数有别。但在命题中有缺点：三金库共得利息应该是问题求件，不应该列入问题作为已给件。

2. 计立方营

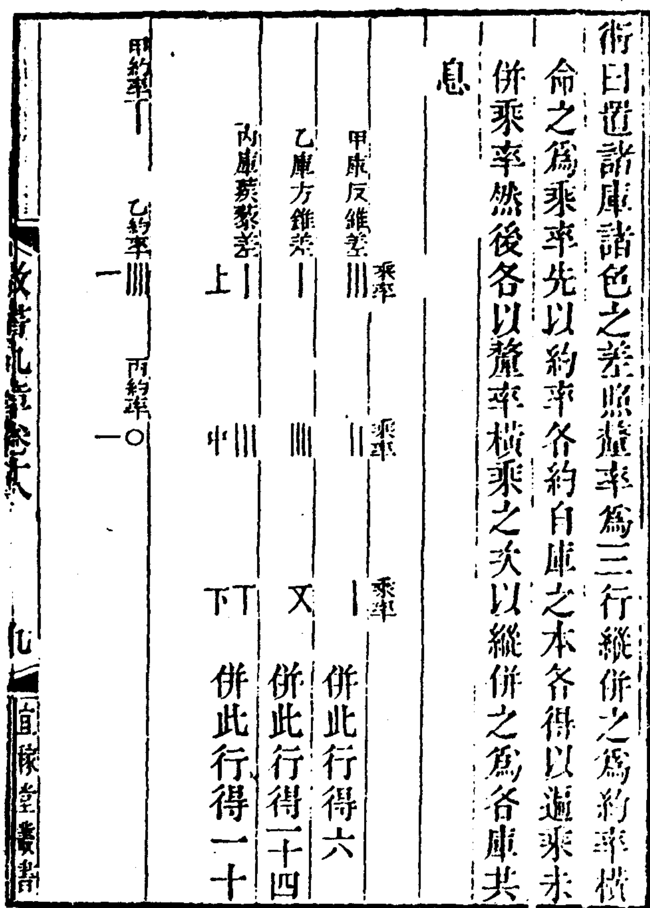
问：一军三将，将三十三队，队一百二十五人，遇暮立营。人占地方八尺，须令队间容队，帅居中央。欲知：营方几何？

（答数：方营每边 171 丈，方队每边 9 丈。卷 15 第 1 题）

题文大意：全军设元帅，每营 3 将，每将 33 队，每队 125 人。晚间扎营。规定每人占地 8 尺见方。每队建方队，全军列方营。元帅居中央，占地同方队。要求方队与方队之间留一个方队的空隙，求方营每边长。

解法：

原著解法分二步



術曰置諸庫諸色之差照攅率為三行縱併之為約率橫
命之為乘率先以約率各約自庫之本各得以遍乘未
併乘率然後各以攅率橫乘之次以縱併之為各庫共
息

甲庫反錐差　　乙庫方錐差　　丙庫蒺藜差

併此行得六　併此行得一十四　併此行得一十

甲約率　乙約率　丙約率

图 4.1.8

(i)求方队边长

术文："以少广求之，置人占方幂，乘每队人，为队实。以一为隅，开平方。所得为队方面。或开不尽，就为全数"。这就是说，每方队边长是$\sqrt{8\times8\times125}=\sqrt{8\,000}\approx90=9$(丈)原著有插图(图 4.1.9)，士兵位置安排得当：四个长方队 5×6，中央队押 2 人，队

官 2 人，队将居正中。

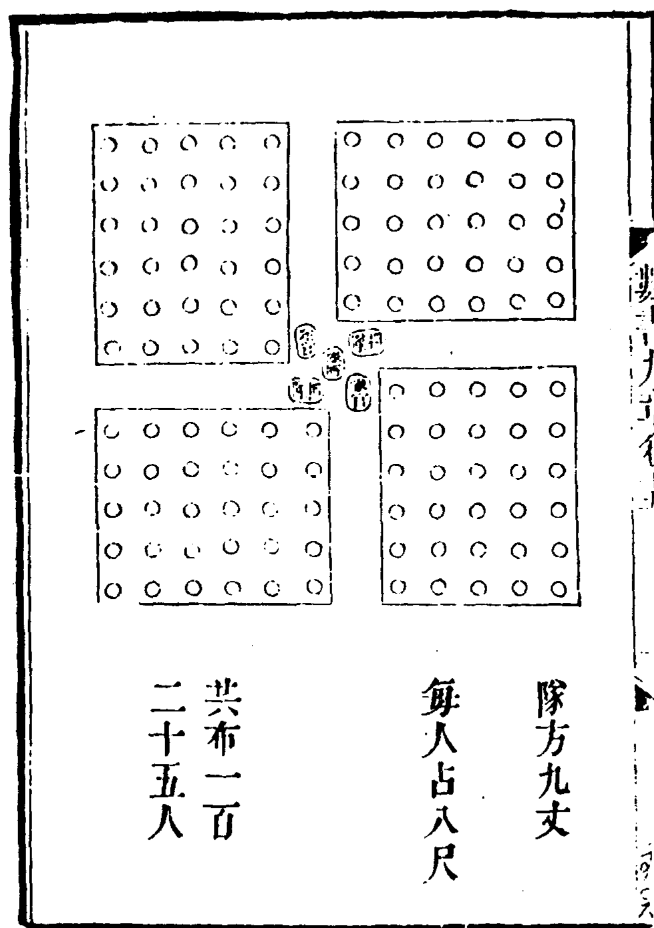


图 4.1.9

(ii)求方营边长

术文：“次置队数，乘将。又四因之，增三，共为实。以二为从方，一为从隅。开平方，得率，以乘队方面，为营方。开不尽，为全数？这是说，如设方营每边有 x 个方队(含两两相邻空隙)它

是二次方程 $x^2+2x=33\times3\times4+3$ 的根。这令人费解，作如下解释：在边长为 x 的方营外纵横各拓广一排空隙方队如图 4.1.10 正

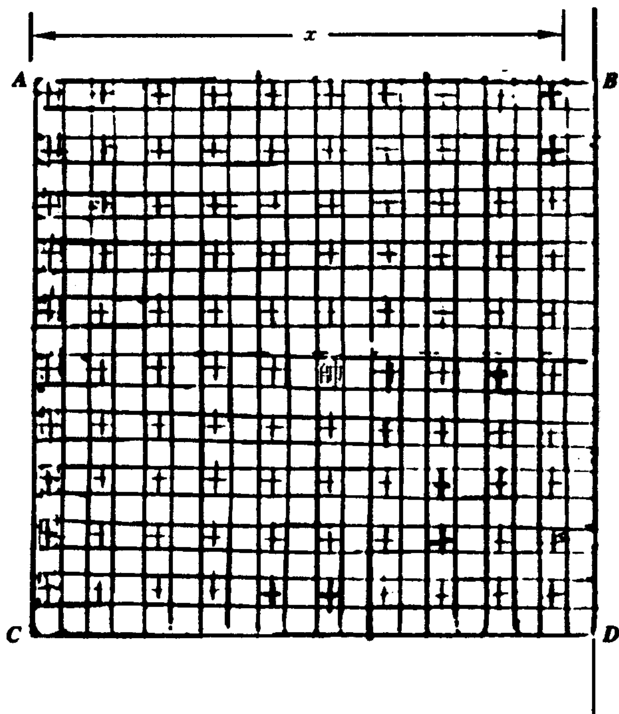


图 4.1.10

方形 $ABCD$。它的边长是 $x+1$，内有实心格(方队)设为 n 个，那么空心格也是 n 个，对正方形整体说实心格从左上角起向右下数为磬折形，所含方队数：

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2,$$

而正方形共含方格

$$(2n)^2=4n^2,$$

也就是说实心格是正方形方格数的四分之一。把实心格子的个数

用题设数据代入，就得到方程

$$\frac{1}{4}(x+1)^2=33\times3\times4+1。$$

原著用正方开方解方程求得 $x=19$，就得方营边长为 171 丈。

从秦氏所拟术文第(ii)步可见他对"奇的自然数和的通项是平方数列"已很熟悉，所以能不加说明地列出此令人难以捉摸的二次方程。原著对步骤(ii)的插图失实，使方队与方队之间的距离靠得太拢，使后人更难猜测原意。原著术文有一般意义，当将数、队数、队含士兵数即使改变，术文所示解题过程仍有效，术文都提醒读者："开不尽为全数。"即取整数近似值。原著所取将数、队数、每队人数是经过深思熟虑的：其一，全军人数很接近周制 12 500人。其二，方队每边 9 丈是精度较高的近似值，而方营每边 171 丈是准确数。

第二章　几　　何

《数书九章》几何内容相对于算术、代数来说比较薄弱，但毕竟仍有其特色，以下分三节介绍。

第一节　图 形 面 积

原著都引用《九章算术》有关图形面积公式，而三角形和弓形面积有创新之处。用出入相补原理化整为零，以计算总积，较前人所作变化较大。圆周率有时取近似值为3，有时取$\frac{22}{7}$，有时取$\sqrt{10}$。有些计算还能运用“相似图形面积之比为相似边平方之比”这一定理以简化计算工作量。本节选析三题。

1. 三斜求积

问：沙田一段有三斜。其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里。里法三百步。欲知：为田几何！

(答数:315顷。卷5第2题)(图4.2.1为书影)

题文大意：沙田为三角形，已知三边长，每里作300步计，每亩作240方步计，计算沙田面积。

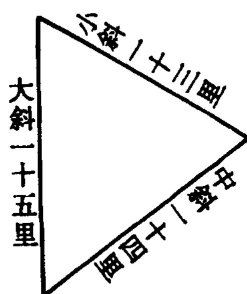
解法：

术文说：“以少广求之。以小斜幂，并大斜幂，减中斜幂。余半之，自乘于上。以小斜幂乘大斜幂，减上。余四约之，为实。一为从隅。开平方，得积。”

我们如设△ABC三边长为a，b，c，术文是说它的面积是二次方程 $x^2=\frac{1}{4}\left(a^2c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2\right)$ 的根(图4.2.2)

○三斜求積

問沙田一段有三斜其小斜一十三里中斜一十四里大斜一十五里里法三百步欲知爲田幾何



荅曰田積三百一十五頃

術曰以少廣求之以小斜冪并大斜冪減中斜冪餘半之自乘於上以小斜冪乘大斜冪減上餘四約之爲實一

图 4.2.1

在草文中有图式，秦氏以三边相应值代入，开正负方得到答数。

一般说，已知三边为 a，b，c 的三角形，其面积为

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad (1)$$

其中 $s=\frac{a+b+c}{2}$，世称海伦(Heron)公式。海伦是希腊亚历山大时期数学家。此公式简洁易记忆，是体现数学美的佳例。在土地测量中，当三角形地段大，不可避免地会有树木、沼泽等阻碍，三角形的高很难测准，如果改测边长，测量难度就大为减弱。因此用三角形三边边长求其面积是生产实际的需要，本题正是真凭实据。容易验证公式(1)与上面术文中所提出的二次方程根

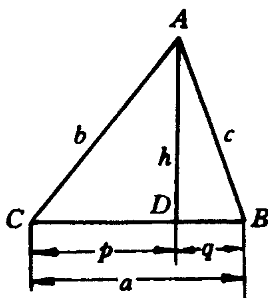


图 4.2.2

$$A=\frac{1}{2}\sqrt{a^2c^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2} \quad (2)$$

是等价的。

秦氏对公式(2)无推导。海伦则有证明传世。东方国家对三边表示的面积公式都有发明。特别是日本江户时代今村知商《竖亥录》(1639年)有双弦股题[①]，用出入相补原理推导了公式(2)。

东方人独立完成与公式(1)等价的(2)，但是至今主张西来说者不乏其人。这种说法是没有根据的。因为从海伦推论其公式思路与东方大异其趣[②]。他援引欧几里得《原本》有关命题，东方国家都自起炉灶。其中阿拉伯学者借用设未知数的代数方法[③]，日本用出入相补原理，印度则自勾股和差关系[④]。秦氏在本题术文只示

① 参见本《大系》副卷第一卷第七编第二章。
② 参见本《大系》副卷第一卷第三编第二章。
③ 参见本《大系》副卷第一卷第五编第一章。
④ 参见本《大系》副卷第一卷第四编第五章。

结果，隐去推导过程，这是他著书立说的习惯，在本编其他章节中已见为数众多的类似情况。本题虽然未留证明，但在下一题（卷5第3题(斜荡求积)）中可以追迹对本题术文论证的主要环节。此外从南宋时代已具备的条件看，他也完全有能力推导出公式(2)。清初学者梅文鼎的工作，作为公式(2)的补证，非常适当。如果说秦氏公式(2)是直接从(1)推导得来，则更是不近情理了。因为从(2)导出(1)化繁为简，顺理成章。反过来，舍易就难，论点就站不住脚了。

清初学者梅文鼎在所著《平三角举要》卷3立题："假如锐角形甲乙边、甲丙边、乙丙边已知，求积。"我们如据图4.2.2，以a，b，c记乙丙、甲丙、甲乙三边。梅氏的推导为："术先求垂线(h)…任以乙丙(a)为底，以甲丙(b)，甲乙(c)为两弦，两弦之较数($b-c$)、总数($b+c$)相乘为实，以乙丙底(a)为法，除之得数，转减乙丙，余数半之，得乙丁。依勾股法：以乙丁自乘，与甲丙自乘相减，余数平方，开之，得甲丁垂线，以甲丁垂线折半，乘乙丙底，得积。"至此梅氏已完整证明公式(2)。他运用《九章算术·勾股》惯用的命题"已知股弦和、勾，求股、弦。"其中他创造性地设计另一直角三角形：以CD为弦，BD为股。那么另一直角边——勾应是$\sqrt{CD^2-BD^2}$。又从图中左右两直角三角形，显然$CD^2-BD^2=b^2-c^2$。另一方面已知股弦和$CD+BD=a$，而勾也已知，那么股弦差$CD-BD=\dfrac{CD^2-BD^2}{a}=\dfrac{b^2-c^2}{a}$，于是

$$CD=\frac{1}{2}\left(a+\frac{b^2-c^2}{a}\right)。$$

b在a上的射影CD是证明过程关键的一着，借以求h，并求三角形面积，恰如本题秦氏术文。

2. 斜荡求积

问：有荡一所，正北宽一十七里，自南穿径中长二十四里，东

南斜二十里，东北斜一十五里，西斜二十六里。欲知亩积几何？

(答数：1911顷 60 亩。卷 5 第 3 题)

题文大意　图 4.2.3 中，据题意作四边形，其中 a—北边，b——西边，c——东南边；d——东北边，h 为$\triangle ABC$ 底边 BC 上的高，均为已知条件，荡，南方称大面积稻田为荡。

解法：

原著术文分为二步：其一，以三斜术积公式求出$\triangle ABD$ 但 AB 长为未知。其二，以底高乘积之半求出$\triangle ABC$ 面积。对第二步 术文说："以少广求之，置中长(h)，乘北宽(a)，半之，为寄(搁在一边)。对第一步，术文说："以中长幂减西斜幂余为实，以一为隅，开平方，得数($\sqrt{b^2-h^2}$)。减北宽，余自乘，并中长幂，共为内率$\left((a-\sqrt{b^2-h^2})^2+h^2\right)$。以小斜幂($d^2$)并率，减中斜幂($c^2$)余，半之，自乘于上。以小斜幂乘率，减上。余、四约之、为实。以一为隅，开平方。得数。"然后加"寄"，共为荡积，在草文中以数据入算，求出答数。

在上引术文中，使人感到特别有兴趣的是对第二步中所说"内率"，内率就是图 4.2.3 中 AB 边长平方，术文所说 $\sqrt{b^2-h^2}=EC$，$a-\sqrt{b^2-h^2}=EB$。秦氏以其熟练代数运算能计算出$\triangle ABC$ 的 AC 边在底边上的射影 EB。a，b，h 都是已给数，于是再以勾股定理求得所求 AB(内率的平方根)。不难想象在图 4.2.2 中，当 a，b，c 为已知时，借助同一关系，秦氏就能反算 h，因此就能推导出三斜求积公式(2)。

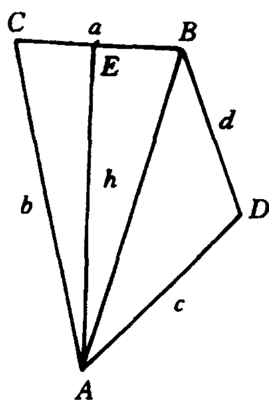


图 4.2.3

从历史借鉴，中学数学教学中对三角形面积公式(1)，(2)已

有多种方法推导。

其一，借助于海伦自证。

其二，三角课上已知△ABC 内切圆半径

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

而其面积为 rs，就得出公式(1)

其三，借助于梅文鼎设想，图 4.2.2 中，b，c 在边 a 上的射影分别为 p，q。则　$p+q=a$，又　$p^2-q^2=b^2-c^2=(q+p)(p-q)$　综合说　$p-q=\frac{b^2-c^2}{a}$。从两数和差，求两数公式：

$$p=\frac{1}{2}\left(a+\frac{b^2-c^2}{a}\right)=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a},$$

$$h^2=b^2-p^2=b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2。$$

那么所求△ABC 面积是

$$\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}。$$

其四，借助于秦氏在斜荡求积从“内率”反算变换。

内率　$b^2=p^2+h^2$，那么 $p=\sqrt{b^2-h^2}$，而

$$q=a-p=a-\sqrt{b^2-h^2},$$

$$\begin{aligned}c^2&=q^2+h^2=\left(a-\sqrt{b^2-h^2}\right)^2+h^2\\&=a^2-2a\sqrt{b^2-h^2}+b^2-h^2+h^2\\&=a^2+b^2-2a\sqrt{b^2-h^2}。\end{aligned}$$

于是，　$4a^2(b^2-h^2)=(a^2+b^2-c^2)^2$，

$$h^2=b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2。$$

其余推导同其三。

3. 蕉田求积。

问：蕉叶田一段，中长五百七十六步，中广三十四步，不知其周。求：积亩几何？

(答数:45 亩 1 角 11 $\frac{5213}{63070}$方步。卷 5 第 5 题)图 4.2.4 为书影

题文大意　二倍弓形田，弦长 576 步，中宽 34 步。求地积。

解法：如设弦长为 a，中宽为 b，原著术文相当于说，所求蕉叶田面积为二次方程：

$$(2x)^2+\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)2x=10(a+b)^3 \qquad (1)$$

的正根。

原著以题给数据建立方程，并数值解方程，计算答数。

秦氏术文何据？未能查考，但从量纲看，方程(1)中首项为 $[L]^4$，第二项则为 $[L]^4$，而其常数项则为 $[L]^3$。已暴露出本质性错误。正如四库馆臣评议："数必三乘(四次方)而后可以平方求之……宜其不可用也。"有可能系刊刻之误。在某一范围内(1)式还有一定意义，试比较其他二种公式。

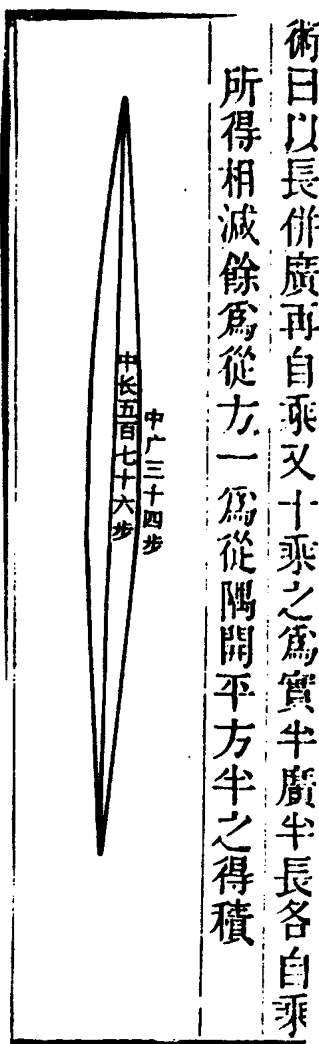

術曰以長併廣再自乘又十乘之爲實半廣半長各自乘所得相減餘爲從方一爲從隅開平方半之得積

图 4.2.4

$$x=b\left(\frac{b}{2}+a\right) \quad \text{(《九章算术·方田》弧田术)} \qquad (2)$$

$$x=\frac{2}{3}ab \quad (\text{海伦})^{①} \qquad (3)$$

就本题题给数据而言，求出 x 为

公式	(1)10871(方步)	相对误差	16.8%
	(2)10081		22.8%
	(3)13056		0.068%

所以秦氏公式较九章弧田术精度高，而次于海伦公式，但正如四库馆臣指出："此题中广(宽)甚小，故得数较古法多七百余。若设长为七百零七，广为二百九十三，……其术之不合，显然矣。"

4. 竹围芦束

前面已在第一章第七节数列列为范例选析。其中第三部分问："芦三千六十五束，每束围五尺。其芦原样五尺五寸。今纳到围小、合准原芦几束?"题意是说芦束比原样缩小，已知原样周围 5.5 尺，收入材料库时周围为 5 尺，求那时有多少束? 术文说："芦围尺数自乘，以乘芦束数为芦实。以芦原尺数自乘，以芦法、除实，得所准芦束数。" 这就是说前、后芦束数之比与围长平方成反比。这就简化了运算。这种说法与欧几里得《原本》卷 11 命题 2 同义："圆与圆之比等于其直径平方之比。"

第二节　勾股比例

现称相似直角三角形对应边成比例的数学问题为勾股比例。秦氏设立专章——第四章测望类作专题研究。事实上在其他各章已有很好应用。例如第三章卷 5 第 6 题(均分梯田)就借助于勾股比例以确定三块梯形田的高。又第八章卷 16 第 2 题(望知敌众)也是这类问题。而第四章卷 8 第 5 题(古池推原)并不是勾股比例问

---

① 参见本《大系》副卷第一卷第三编第二章。

题。这些测望类问题中有些与《九章算术·勾股》或《海岛算术》相同，有些问题从测量效果要求来衡量，当是向壁虚构，或其误差将达不能容许的程度。但毕竟是赖以沟通几何与代数(建立多项式方程的数学模型)。这是中国数学史上前所未有的。特别应该指出的是第三章卷 6 第 1 题(漂田推积)，在解题过程中为了求线段长度，秦氏在术文、草文及所附插图中无可争议地：①引了平行线，②获致一对相似斜三角形，借以从相应边成比例的事实，正确解题。这也是中国数学史上的创举。因此我们不能拘泥于习惯的说法，“中算比例问题仅限于直角三角形。”本节选析五例。

1. 表望方城

问：敌城不知广、远。傍城南山原林间望之。林际有木二株。南北相去一百六十步。遥与城东方西三相直。于二木之东，相对立表。表间与木四方平。人目以绳维之。人自东后表向西行一十步，望城东北隅，入东前表一十五步。又望城东南隅，入东前表四十八步强半步。里法三百六十步。欲知：其方广及相去几何？

(答数：方城边长 12 里 320 步，城与较近树距 9 里 320 步。卷 8 第 1 题，图 4.2.5 为书影)

题文大意：敌方方城 $CDEF$ 不知大小(设边长为 x，图 4.2.6)林荫隐蔽处有二树(A，B，AB 为 $a=160$ 步)，连线与城东边 CD 共线。又另立二标杆 G，H，使 $ABGH$ 成正方形，并用绳索相连。人立 K 处(KH 为 $b=10$ 步)前视 D，截绳索 BG 于 J(JG 为 $d=10$ 步)。前视 C，截 BG 于 L(LG 为 $c=48\dfrac{2}{3}$步)。每里作 960 步计。求方城每边长以及其东南角与前树的距离(y)。

解法：

原著术文有误，四库馆臣已为改正。宋景昌《札记》说：“馆本推得答数甚确，而未详其法，今补于后。术曰：置南影入表(c)减表间(a)。余乘表间，为城去木(y)实；以西行步(b)减南影入表，

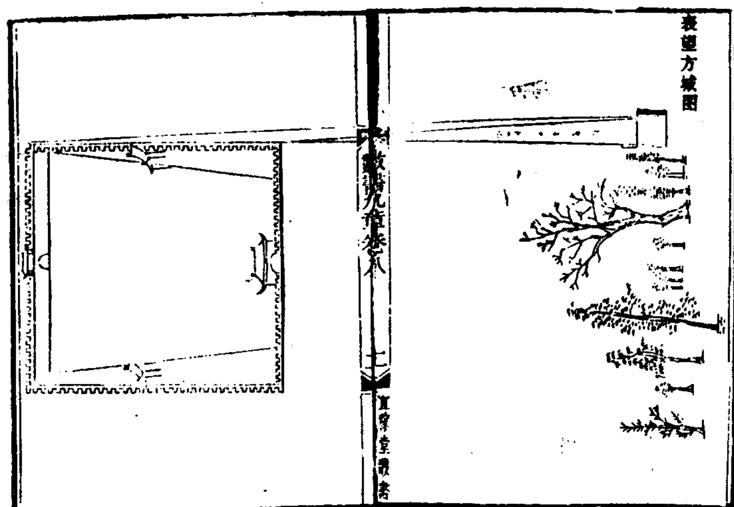


图 4.2.5

余为法，实如法，得城去木数。求城广者，以西行步减北影入表(d)余乘前法为法。乘前实为寄。以北影入表减表间，余乘表间，又乘前法，得数内减寄。余为城广实。实如法，得城广数(x)。”宋景昌用古汉语写的术文就是说所求：

$$x=\frac{a(a-d)(c-b)-a(a-c)(d-b)}{(c-b)(d-b)},$$

$$y=\frac{a(a-c)}{(c-b)}。$$

由图 4.2.6 取两组相似直角三角形，选相应比例，适可推导出上面二结果：

其一，$\triangle CBJ \backsim \triangle KML$，得$\frac{CB}{BL}=\frac{JK}{ML}$，这就是

$$\frac{y}{a-c}=\frac{a}{c-b}。 \qquad (*)$$

其二，$\triangle DAK \backsim \triangle KMJ$，得$\frac{DA}{AK}=\frac{KJ}{JM}$，这就是

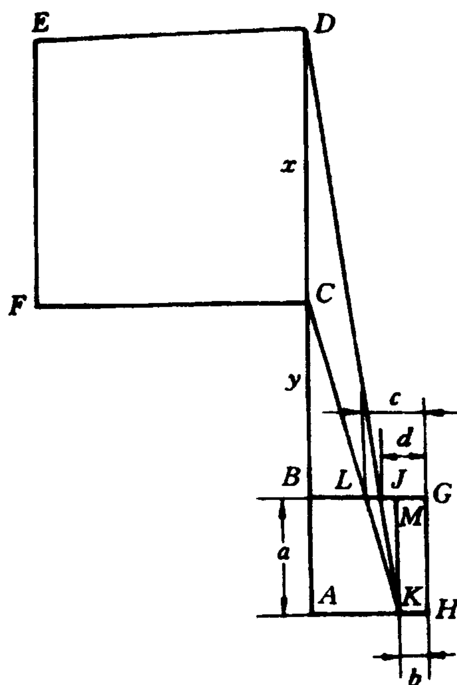


图 4.2.6

$$\frac{x+y+a}{a-b}=\frac{a}{d-b}。\qquad (**)$$

综合(*)，(**)两式就得宋景昌所改公式，以题给 a，b，c，d 数据代入，答数应改为

$$x=11\text{ 里 }220\frac{20}{31}\text{步},$$

$$y=1\text{ 里 }99\frac{11}{31}\text{步}。$$

如与《九章算术·勾股》所命题比较，显然本题复杂了一个层次，《九章算术》只运用一组相似形，而本题综合了“今有方邑”题和“四表测木”题的内容。如与《海岛算经》第3题相比，

本题虽也是二望问题，但又添加了变化。

2. 望敌圆营

问：敌为圆营在水北平沙，不知人数。谍称彼营布卒占地，方八尺。我军在水南山原。于原下立表，高八丈，与山腰等平。自表端引绳，虚量平至人足三十步。人立其处，望彼营北棱，与表端三合，又望营南棱，入表端八尺。人目高四尺八寸。以圆密率入重差。求：敌众合得几何？

（答数：敌众35 643人。卷16第2题）图4.2.7为原著书影。

题文大意 如图4.2.8敌布圆营 AB 于河北。我军在河南山原立8丈标竿，用索从竿端 E 量水平30步至 D。人立 D 处，人目 C 前视敌营直径 A 端，视线适过标竿顶 E，前视其 B 端，视线截标竿于 F，EF 长8尺、谍报人员说敌兵站立每人8方尺，求圆营中敌兵有多少？圆周率取近似值 $\frac{22}{7}$。人目高4.8尺。

解法：

术文说[1]："以勾股求之。置表高并人目，乘人退表步，又乘入表，为实。以入表并人目，乘人目高，为法。除之，得径。以密周率乘径，得数为实，以密径率因人立，为法，约之，得外周人数。余收为一。副置加六，以乘副，得数为实。如一十二而一，余亦收为全。"

我们如据题意：表高 $EG=c=80$（尺），表与人平距 $ED=a=b\times 30=180$（尺）人目高 $(CD=d=4.8$（尺），视线 CB 截表 $EF=b=8$（尺）。术文是说所求直径 $x=\frac{ab(c+d)}{d(b+d)}$，以题给数据代入，$x=1\,656.25$（尺）。以 $\pi=\frac{22}{7}$，计算圆营外周长。又以敌兵人间距8（尺）知外周长数。$a_n=\frac{1\,656.25\times 22}{7\times 8}=651$。从圆束（实心六角束）

1 本题术文及答数均据宋景昌《札记》改正。

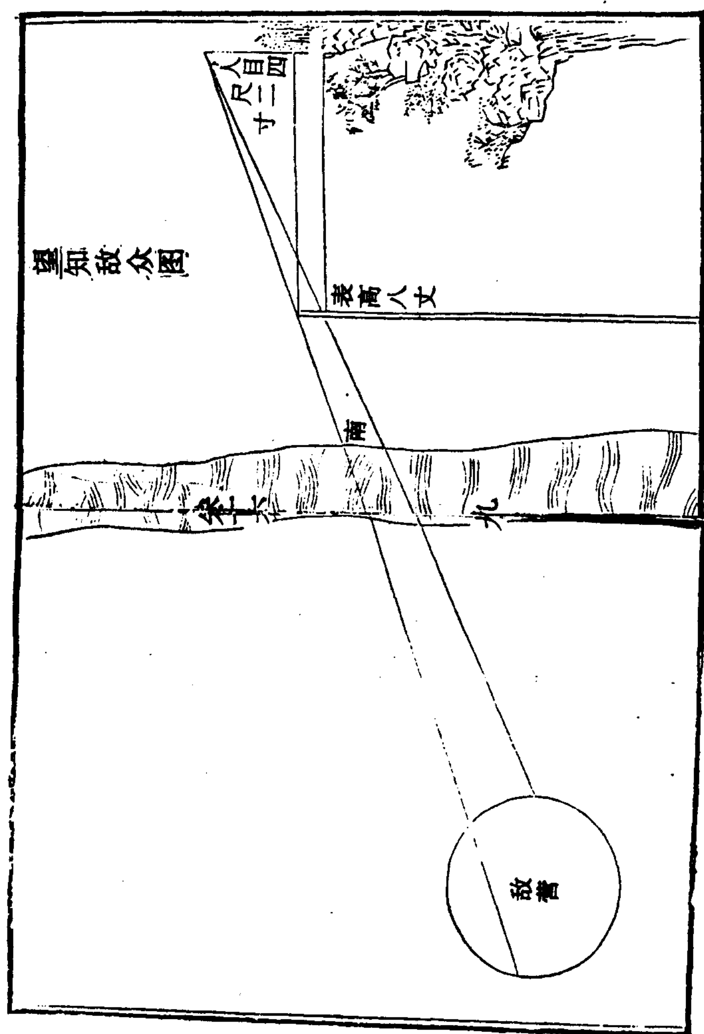


图 4.2.7

公式知敌营士兵数为

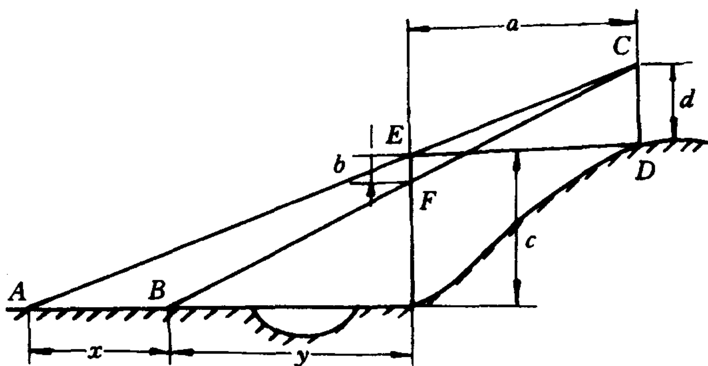


图 4.2.8

$$S_n=1+\frac{a_n(a_n+d)}{2d}=35\ 643。$$

这里 d 取 6。后半段术文正是上面运算过程。

本题也是二望问题，题系新创。与上例方营都反映南宋时代军事实况。

本题是继“竹围芦束”问题后把圆束看成实心六角束的第二例。术文中有两处说：“收为一”“收为全”指取近似值整数，二者都四舍五入。

3. 表望浮图

问：有浮图[①]攲[②]侧，欲换塔心木，不知其高。去塔六丈，有刹[③]竿，亦不知其高。竿木去地九尺二寸始钉锔[④]。锔一十四枚，

① 浮图：梵语 Stupa，汉译窣坡堵，或浮图，后世称塔。

② 攲(qi)义：倾侧。

③ 刹(ca)，塔尖佛家标徽，佛家制度钉 13 轮，称十三天。秦九韶说是 14 轮，不知何据？此为旧(废)刹，所以题文说就竿为表(标竿)。

④ 锔(ju)义：铁箍。

枚长五寸。每锎下股，相去二尺五寸。就竿为表。人退竿三丈，遥望浮图尖，适与竿端斜合。又望相轮[1]之本，其影入锎第七枚上股。人目去地四尺八寸。心木放三尺为楯卯[2]剪截。欲求：塔高、轮高。合用塔心木长，各几何！

(答数:塔高11丈7尺,竿高4丈2尺2寸,塔身高8丈7尺,相轮高3丈,塔心木9丈。卷8第9题,图3.3.8为书影)

题文大意　古塔倾斜，需大修。为知塔高，离塔6丈(a)处，(图4.2.9)立不知高的标竿。在高9.2尺处开始钉铁箍，共14个，每箍宽0.5尺，箍间距2.5尺。测量者后退3丈(c)前视塔尖(A)。视线通过竿顶B。又前视相轮根部(C)，视线恰截取标竿上第七箍的上沿(H)。已知人目(F)高出地面(G)4.8尺(d)。又相轮根部与塔心木间留3尺作为榫卯。求：塔高x，相轮高y，塔身高(LC)，竿高b。塔心木高。

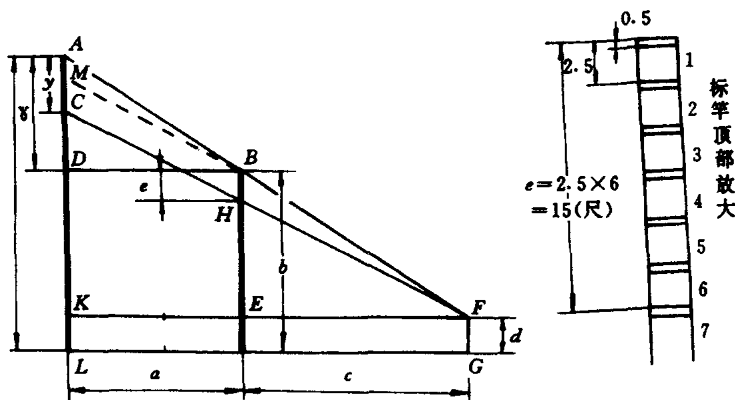


图 4.2.9

① 相轮即刹，今北海白塔相轮也是十三重。

② 楯卯即榫卯。

解法：

术文说："以勾股求之，重差入之，置锏数减一，余乘锏相去数，并一枚长数，加竿术，共为表竿高。以退表为法，以人目高减表竿高，余乘竿去塔为实，实如法而一，得数加表竿高，共为塔高。置相轮本之锏数，减一。余乘锏相去，又乘竿去塔，为实。实如法而一，得相轮高。以减塔高，余为塔身高。以益楯卯尺数，为塔心木长。"

术文细节有失误处。四库馆臣已指出："三数俱误。相轮高，四丈五尺，塔身高七丈二尺，塔心木长七丈五尺"术文中表(标竿)高计算不误：$b=2.5\times(14-1)+0.5+9.2=42.2$(尺)。又据图4.2.7中$\triangle ABD\backsim\triangle BFE$，得$AD:BE=BD:FE$，于是术文作出结论，所求塔高

$$x=\frac{(b-d)a}{c}+b=11(\text{丈})7(\text{尺})$$

也不误，但在相轮高计算时失误。现改正如下：
从$\triangle AKF\backsim\triangle BEF$，得

$$c(x-d)=(a+c)(b-d)。\qquad (*)$$

再从 $\triangle CKF\backsim\triangle HEF$，得

$$c((x-d)-y)\ =(a+c)((b-d)-e)。\qquad (**)$$

从(*)，(**)消去x，得 $y=\dfrac{(a+c)e}{c}=4(\text{丈})5(\text{尺})$，其中$e=2.5\times6=15$(尺)。于是塔身高应是

$$x-y=7(\text{丈})2(\text{尺})，$$

而塔心木长为

$$72+3=7(\text{丈})5(\text{尺})。$$

宋景昌为揭秦氏相轮为3丈之谬，在其《札记》中另作图(图4.2.10为书影)相当于加一平行线$BM/\!/FC$。在他的按语中相当于说$\triangle BAM\backsim\triangle FBH$。而二者对应边边长之比等于$KE$与$EF$之比，亦即 $a:c=2:1$。也就是说

$AM=2BH=2e=2.5\times6\times2=3$(丈)。找出了秦氏误以 AM 代替 AC 的原因。这里，宋景昌以斜三角形比例入算，本题为二望问题，与《海岛算经》第 2 题(望松生山)类似，但有变化。

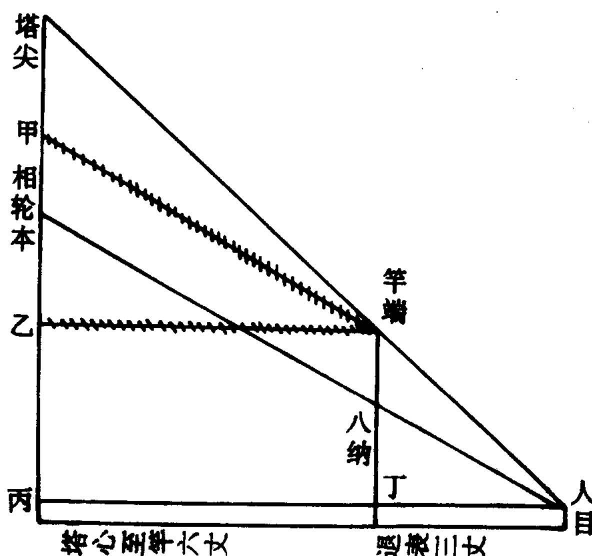


图 4.2.10

4. 漂田推积

问：三斜田被水冲去一隅，而成四不等直角之状。原中斜一十六步，如多长水直五步，如少宽。残小斜一十三步如弦。残大斜二十步如原中斜之弦。横量径一十二步，如残田之广，又如原中斜之勾，亦是水直角之股。欲求：原积、残积、水积、原大斜、原小斜、二水斜各几何？

(卷 6 第 1 题,图 4.2.11 为书影)

题文大意　斜$\triangle ABC$ 田，被水冲去一角($\triangle DEA$)成为不规则四边形(图 4.2.12)：原来的中边($BC=a$)为一边，临水的($DE=d$)为另一边。残缺的短边($BE=c$)成为直角三角形 BDE 的弦，

草曰以水直五減中斜一十六餘一十一爲法以中斜一

十六乘大殘二十得三百二十爲大斜實以法除之得

數書九章卷六

宜稼堂叢書

元中斜一十六步

殘大斜二十步

經一十二步

水直五步

殘小斜一十三步

图 4.2.11

残缺的长边($CD=b$)为另二边。

对角线($BD=e$)是直角三角形 CBD 的勾，又是 BDE 的股。求原来三角形、余下的三角形、冲去的三角形各自的面积。原来的长边、短边，又冲去三角形其余二边长各多少？

解法：设冲去三角形其余二边长分别为 x，y。

原著术文分三部分：(i)“以少广求之，连枝入之，又勾股入之。置水直(d)减中斜(a)为法。以中斜乘大残(b)为大斜实。以法除实，得原大斜(AC)。以残大斜减之，余为水大斜(x)。”(ii)“以法乘径(e)，又自之为小斜隅。以水直幂并径幂为弦幂(d^2+e^2)，又乘径幂，又乘中斜幂，为小斜实。(与隅可约，约之。)开连枝平方，得原小斜($c+y$)。以残小斜减之，余为水小斜(y)。”(iii)“以水直乘之，为水实。倍水小母为法除之，得水积。以水直并中斜，乘径为实。以二为法，除之，得残积。以残积并水积，共为原积。”

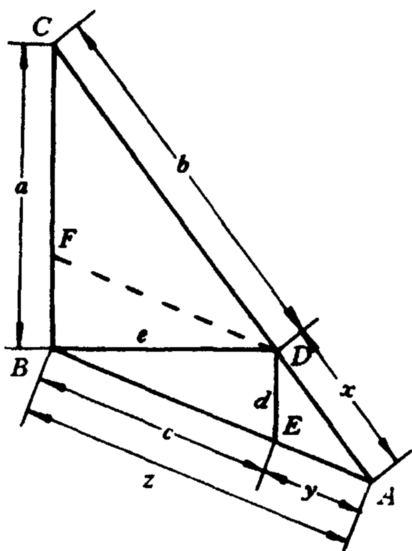


图 4.2.12

其中(i)是在求$\triangle ADE$的边长，先计算

$$b+x=\frac{ab}{a-d},\quad x=\frac{ab}{a-d}-b。$$

(ii)求边长$EA=y$，术文说原短边长$AB=c+y$是方程

$$((a-d)e)^2z^2=(d^2+e^2)e^2a^2 \tag{1}$$

的正根，也就是所求$y=z-c$。

(iii)冲去的$\triangle ADE$面积是$\frac{1}{2}dy$，四边形$CBED$面积是$\frac{1}{2}(a+d)e$。

这里三段术文都耐人寻味。

其第(i)段结果与秦氏插图应有密切关系。我国传统数学，素无平行线，也素无一般相似三角形对应边成比例之说。但从本题

插图有虚线(图 4.2.11 书影,相当于图 4.2.12 中的 FD)与原三角形小斜(BA)平行。更有趣的是清人沈钦裴评注至此,为之作点睛之笔:"与水直线(DE)相切,成大小勾股形。更增一虚线,与残小斜(BE)平行,则比例之理显矣。"沈钦裴注道出了秦氏超越前人的几何造诣:

①这平行线划分出一对相似三角形:$\triangle DFC \backsim \triangle ABC$。

②平行四边形对边相等:$BF=DE=d$,$FD=BE=c$。

③斜三角形相似,对应边成比例:$CB:CF=AC:CD=BA:FD$。

于是得到所求边 x,y 的公式:

$$a:(a-d)=(b+x):b,$$

$$a:(a-d)=(c+y):c。$$

令人感到遗憾的是,他只用了第一式,忽略第二式,舍易就繁,求短边的水蚀长 y 改用第(ii)段术文的方法。

其第(ii)段中方程(1)的来源也需用斜三角形的相似理论导出,试为推导如下:

还是从$\triangle AED \backsim \triangle ABC$ 出发。

$$CB:AB=DE:EA,$$

这就是

$$a:z=d:(z-c)=d:(z-\sqrt{e^2+d^2}),$$

$$ea:z=ed:(z-\sqrt{e^2+d^2}),$$

从减比定理①

$$ea:z=(ea-ed):\sqrt{e^2+d^2},$$

$$(a-d)ez=ea\sqrt{e^2+a^2}。$$

两边平方,就是(1)式。我们不知道除了上述过程以外还有其他别

① 《九章算术·勾股》第 16 题刘注已用之。

的方法能推导出此式。显然式中两端的 e 是赘余的。对此沈钦裴也认为："以法乘径(e)可省。"

其第(iii)段中求△AED 面积取二边乘积之半。宋景昌批评说："当用三斜求积术，今用勾股求积术，误也。"沈钦裴有改正求水积术："以水直，水大斜、水小斜三较连乘，又乘半总，开连枝平方，得水积。"在其草文中明确指出："水直(d)，水大斜(x)，水小斜(y)，并而半之，为半总。与三面相较…，三较相乘，又乘半总…开方…为水积。"沈氏不用三斜求积公式而用海伦公式。查阅清《数理精蕴》下编卷 14 设题："三角形大腰十七尺、小腰十尺、底二十一尺，求面积几何?"解法说："三边之总，折半为半总。三边与半总之较与半总乘积，开方。"沈钦裴术当本于此。

5. 临台测水

问：临水城台立高三丈。其上架楼，其下址，侧脚二尺。护下排沙下橇，去址一丈二尺。外橇露土高五尺，与地下平。遇水涨时，漫至址。今水退不知多少。人从楼上栏杆腰串间，虚驾一竿出外，斜望水际，得田尺一寸五分，乃与竿端三合。人目高五尺，欲知：水退立深，涸岸斜长、自台址至水深各几何?

(答数:水退立深 1 丈 5 $\frac{130}{157}$尺,涸岸自台址至水际斜长 4 丈 1 尺$\frac{37}{157}$。卷 7 第 2 题,图 3.3.6 为书影)

题文大意：有临水楼台 GDH.（图 4.2.13)在 D 处挑出一水平竿 $AD(a=4.15)$，人直立 D 处(人目高 $DJ(b=5)$。台基 G 至水岸 B 为斜坡，筑有平基 $KG(d=12)$，高差 $KL(e=5)$。自 J 过 A 视水边 B，三点成一直线。求高差 $GC(x)$、斜坡 $BG(y)$长各是多少?

解法：

原著术文说："以勾股变法，兼少广求之。求涸岸斜长(y)：置出竿(a)乘台高(c)为段(ac)。以去基(d)乘段为宽泛(acd)以岸高

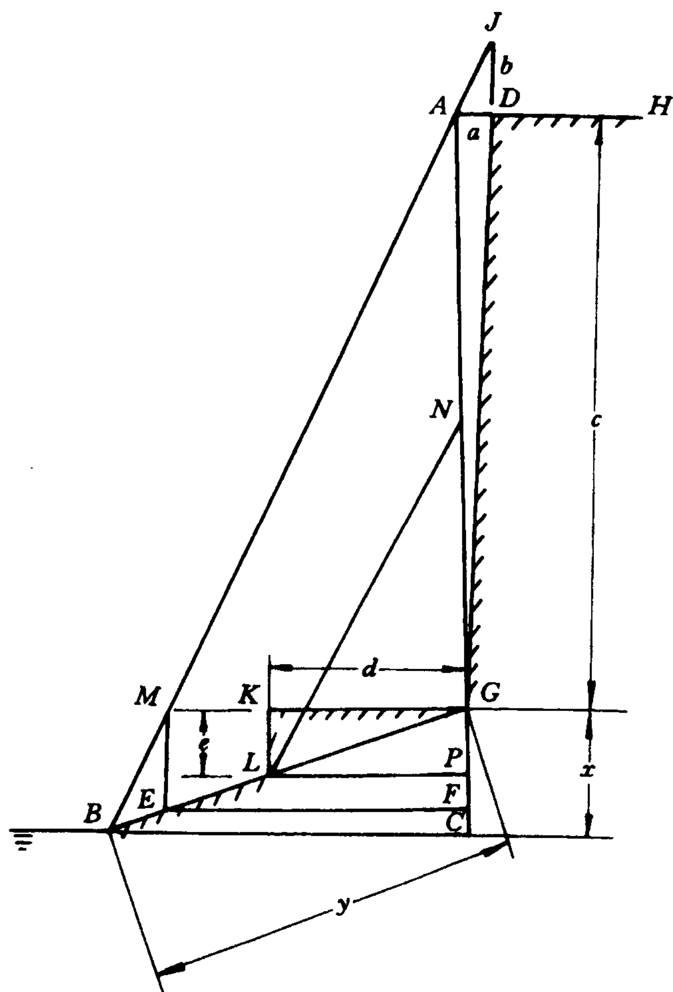


图 4.2.13

(e)乘段为浅泛(ace)。以目高(b)乘去基，为约泛(acb)。三泛可约者约之，为定率，不可约，径为率。以宽自乘为宽幂($(acd)^2$)，以浅率自乘为浅幂($(ace)^2$)。并宽、浅二幂，共为峻幂。复乘宽幂于

上。以台高幂乘上，为峻实。次以宽率乘浅率为寄。以台高数乘宽率，又乘约率，得数，内减寄。余自乘，为峻隅。验峻实、峻隅，两者可约，求等约之，为峻定实。峻定隅。开同体连枝平方，得峻岸斜长。”“求水退深(x)。置岸高幂乘峻定实为深实。以去岸幂并岸高幂，乘峻定隅，为深隅。开连枝平方，得水退深。”

现用图上所注相应字母记出，前后两段术文是说所求数 x，y 分别是下面两方程的根：

$$(d^2+e^2)((acd)(bcd)-(acd)(ace))^2x^2$$
$$=e^2c^2(acd)^2((acd)^2+(ace)^2), \tag{1}$$
$$((acd)(bcd)-(acd)(ace))^2y^2$$
$$=c^2(acd)^2((acd)^2+(ace)^2)。 \tag{2}$$

秦氏把题给数据写成两个二项二次方程，用数值解法，获取答数。

秦氏所建立的方程源自何方，自来为学者所关注。自《九章算术》迄南宋已一千多年。像秦九韶那样数学大师对于勾股比例已非常熟悉，不必像三国刘徽那样——借助长方形余形——出入相补原理导出结论。如此结论不谬，秦氏当推导如次：

(i)$\triangle JAD \backsim \triangle AMG$，得 $MG=EF=\frac{ac}{b}$，

(ii)$\triangle KGL \backsim \triangle FEG$，得 $GF=EM=\frac{ace}{bd}$。

近人已有三篇文章为秦氏方程(1)，(2)复原作如下设想。

(iii)$\triangle GBC \backsim \triangle GEF$，得 $GC:GB=GF:GE$。这就是

$$x:y=\frac{ace}{bd}:\sqrt{\left(\frac{ac}{b}\right)^2+\left(\frac{ace}{bd}\right)^2}。 \tag{3}$$

(iv)$\triangle ABC \backsim \triangle AMG$，得 $BC:AC=MG:AG$，于是

$$bc\sqrt{x^2-y^2}=ac(x+c)。 \tag{4}$$

文章说从式(3)，(4)可以推导(1)，(2)。事实却推导不出。

实际上，秦氏的第(iii)步是得力于“漂田推积”题公式(1)，对

图 4.2.12，4.2.14 作仔细对照，不难发现前者$\triangle CBA$与后者$\triangle AGB$及其内部构造是一致的。其对应部分可列表如下：

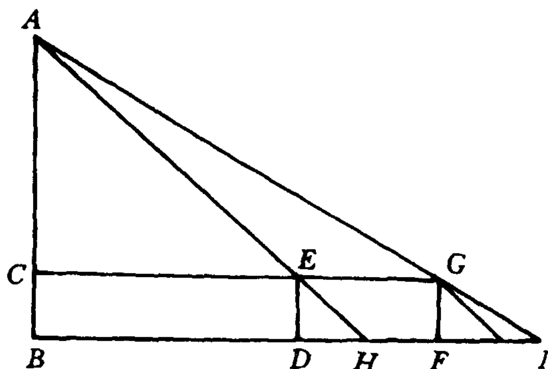


图 4.2.14

表 4.2.1　图 4.2.12 与图 4.2.14 对照表

图 4.2.12	图 4.2.14
$\triangle CBA$	$\triangle AGB$
$\triangle BDE$	$\triangle GME$
$\triangle DEA$	$\triangle MEB$
e	$MG=\frac{ac}{b}$
d	$ME=\frac{ace}{bd}$
z	y
a	c

那么“漂田推积”公式中的e，d，z，a把“临台测水”中的相应量代入就成为

$$\left(\left(c-\frac{ace}{bd}\right)\frac{ac}{b}\right)^2 y^2=\left(\left(\frac{ace}{bd}\right)^2+\left(\frac{ac}{b}\right)^2\right)\left(\frac{ac}{b}\right)^2 c^2。$$

这恰恰就是本题方程(2)：“漂田推积”的图形在水平面上，本题的图形在竖立面上，秦氏合而为一：田域类问题的结果巧妙地为测量类问题所用，这说明他的非凡抽象能力。

秦氏的第(iv)步：从$\triangle GBC\backsim\triangle GLK$，$x:y=e:\sqrt{d^2+e^2}$，把方程(2)中的$y$代入，就成为方程(1)。

当年四库馆臣校书至此，不禁击节称赏："此条术虽甚繁，理数皆极精密，非兼通于勾股、通分之法者，不能立也。"但对之又有微词："但累乘累除，错综变换，皆未尝明言其故，观者不能无金针不度之疑。"四库馆臣借助于欧几里得《原本》知识："今绘图以解之，并条析其乘除各数"。馆臣所绘图及解法相当于在图4.2.13中引$LN/\!/BA$，$LP/\!/KG$，那么

$$\triangle ABG\backsim\triangle NLG,\ 得\ BG:AG=LG:NG,$$

这就是

$$y:c=\sqrt{e^2+d^2}:NG,\ 而\ NG=NF-GF=NF-e。$$

又从$\triangle JAD\backsim\triangle NLP$得$AD:JD=LP:NP$，

这就是

$$a:b=d:NP,$$

于是

$$NG=\frac{bd}{a}-e,$$

很方便知道所求

$$y=\frac{ac\sqrt{d^2+e^2}}{bd-ae} \tag{5}$$

再从$\triangle GBC\backsim\triangle GLP$，得

$$x:y=e:\sqrt{d^2+e^2},\ x=\frac{ace}{bd-ae} \tag{6}$$

有趣的是四库馆臣求得的结果与秦氏结果全合。此外令人无法理解的是秦氏在术文中特别强调，对于三个中间数据宽泛acd，浅泛ace，约泛acb："三泛可约者，约之为定率"即三者应约为d，e，b。"不可约，迳为率"。秦氏竟自食其言，未约简，迳为率，致使所列二方程十分繁复，如果依术文把他的方程(1)，(2)两端分

别约去公因式 $a^2c^2d^2\cdot c^2$，然后两端开方，就得到

四库馆臣加作平行线性所得同样结果，方程(5)和(6)。

在本世纪70年代后半叶一次全国数学史学者座谈会中，吴文俊院士论文中，以《海岛算经》第1题证法问题提出数学史研究中值得引起大家注意的重要论点："如果依照欧几里得几何体系的习惯证法，那就自然应该添一平行线 $GM'/\!/AH$。(图4.2.14)再利用相似三角形比例理论作证。清代李潢以及近代中外数学史家大都依这法补作海岛公式证明。这当然不是刘徽的原意，也和我国古代几何传统相违背"[①] 他又身体力行写出力作"《海岛算经》古证复原，作出令人折服的符合刘徽时代数学条件的证明。我们认为"古代几何"应有一个下限。吴文是针对李潢等对刘徽证明而言。对经过一千多年以后秦九韶的命题，如果再用出入相补原理求证，就不是必要的，甚至是累赘，何况在秦氏自著术文中已明确出现平行线和相似斜三角形比例理论。所以清代四库馆臣引平行线的做法，可以说是欧几里得《原本》的余绪，也可以说是秦氏发明的应用。不能否定"这不是秦氏原意"。推广说，对秦氏以后的数学专著有关命题证明的复原，都可以放心照样进行。

秦氏机智过人，善于编题。本题实在是《海岛算经》第4题(有望深谷)设累矩的变体。《海岛》题二矩立于同一竖直线上，秦题则使二者有平距 $AD=CF=a$。前者二矩的勾为同高，本题则使 $JD=b\neq GP=e$。前者仅要求计算"谷深"，相当于本题 $PC=x-e$，而本题还进一步求斜距 $BG=y$。

第三节 立体体积

《数书九章》在有关量粮容器、土方体积中运用了方台、圆台、

① 论文见吴文俊，出入相补原理，pp. 83~84，中国青年出版社，1978

拟柱体体积公式，但都因袭《九章算术·商功》方亭、圆亭、刍童、刍甍术，对其他立体也无创新处，特别令人不能理解的是秦书对球体未置一字。在第二章天时类有关计量降水器皿中则出现了有关立体体积计算问题，现选析如后。

1. 天池测雨

问：今州郡都有天池盆，以测雨水。但知以盆中之水为得雨之数。不知器形不同，则受雨多少亦异，未可以所测，便为平地得雨之数。假令盆口径二尺八寸，底径一尺二寸、深一尺八寸，接雨水深九寸。欲求：平地雨降几何？

(答数:平地降 3 寸。卷 4 第 2 题)

参考译文：当今州郡都有天池盆测降雨量。如果以为盆内的积水深度就是降雨量，这就错了。接水器形状不同，降雨深度有异。切不可把所测水深，就作为平地降雨量。假设盆的口径 2.8 尺，底径 1.2 尺，水深 9 寸。问：折合平地降雨量多少？

解法：

术文说："盆深乘底径为底率，二径差乘水深，并底率，为面率。以盆深为法，除面率，得面径。以二率相乘，又各自乘，三位并之，乘水深为实。盆深乘口径，以自之，又三因为法。除之，得平地雨深。"

图 4.2.15 为圆台形天池盆截面。我们设口径为 D_H，底径为 D_O，盆高 H，积水深 h。术文第一步是求积水表面的直径 D_h。从术文所说，可以认为秦氏已深知：如引 CB 平行于盆壁 GK，$\triangle ABC$，$\triangle EFC$ 两底边长之比为高 H，h 之比，所以他能建立关系：底率 D_oH，面率 $D_oH+(D_H-D_o)h$，而水面直径(面径)$D_h=\dfrac{D_oH+(D_H-D_o)h}{H}$。

术文第二步是把积水体积(圆台)化为以口径为底直径的圆柱，求此圆柱之高，即平地降水量

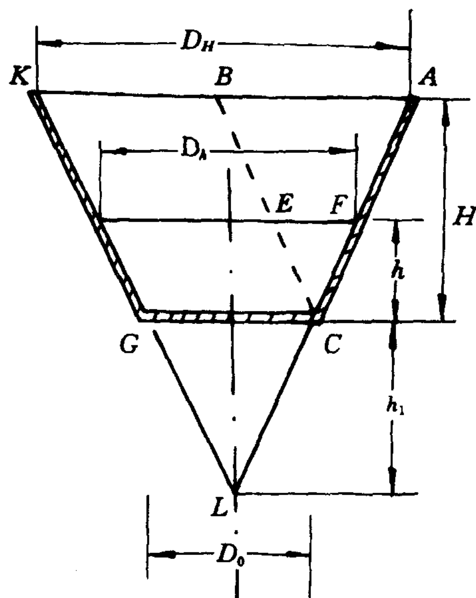


图 4.2.15

$$\frac{(\text{底率}\times\text{面率}+(\text{底率})^2+(\text{面率})^2\times\text{水深}}{3(\text{口径})^2\times\text{盆深}^2}。$$

南宋偏安临安，人口密集，耕地紧张，开海涂，建围田，水利工作首当其冲，反映在《数书九章》中卷4各问。本题说降雨量3寸，约合100毫米。以浙江省论全年降雨量约1 000毫米以上，这一记录约100毫米是正常的。

2～5四题都是量降水量问题。本题秦氏所论精到、准确，从体积反算体高当是创举。

从本题结论可见秦氏精通《九章算术》及其刘徽注，他从隐君子学数学，《缉古算经》当是必读书。王孝通运用勾股比例解决类似于本题梯形截面问题。《缉古算经》第7题为解决仓容问题，对于图4.2.16延长梯形的腰成为$\triangle ALK$，设L到底径距离为h_1，

王孝通称 h_1+h 为小高，h_1+H 为大高，并建立关系 $\frac{h_1+h}{D_h}=\frac{h+H}{D_H}=\frac{h_1}{D_o}$。又《九章算术·勾股》第 16 题刘徽注已有明确的分合比运算。秦氏综合这二项成果[①]得 $\frac{h}{D_h-D_o}=\frac{H}{D_H-D_o}$，借以导出术文中水面直径公式。这是说他的深思熟虑，其来有自。

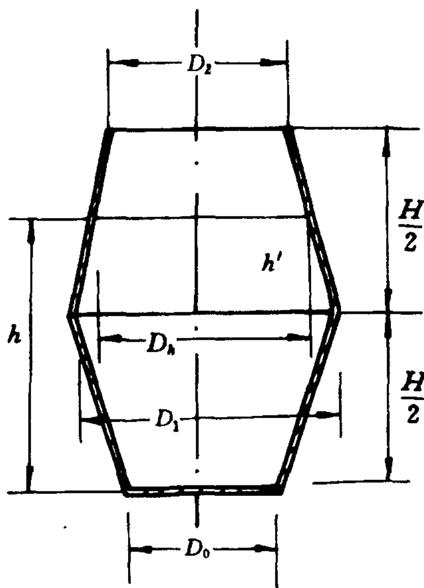


图 4.2.16

本题在计算方法上也有特色。

其一，如果先计算积水体积：$\frac{\pi}{4}(D_oD_h+D_o^2+D_h^2)h$，然后求以 D_H 为直径的圆柱体积 $\frac{\pi}{4}D_H^2y$，然后做除法，将要白白浪费用

① 回顾秦氏在"漂田推积"题也曾作过同样运算。

π除以4的计算工作量。在秦氏平地降雨量公式中分子分母都把$\frac{\pi}{4}$约去，一步到位，这是计算处理上成功的一面。

其二，水面直径公式系分式，如果先求直径再代入圆台体积公式，除法比乘法难做，而且难免有除不尽时，发生处理余数的麻烦，而秦氏公式只做一次整数除法，这是成功的又一面。沈钦裴注书至此，深有体会地说："术恐除有不尽。"这种处理方法至今仍有重要意义。

2. 圆罂测雨

问：以圆罂接雨。口径一尺五分，腹径二尺四寸，底径八寸，深一尺六寸。并里明接得雨一尺二寸。圆法用密率。问：平地雨水深几何？

$\left(\text{答数:1 尺 } 8\frac{64\ 483}{74\ 088}\text{寸。卷 4 第 3 题}\right)$

题文大意：圆坛(图4.2.16为中截面)已知口径1.05尺，中径2.4尺，底径0.8尺。坛高1.6尺。接雨水深1.2尺。圆周率取$\frac{22}{7}$。问：平地降雨量是多少？

解法：

原著术文有误。四库馆臣据题意及原著精神改正，相当于说

如设底径为D_o，中径为D_1，口径为D_2，坛高为H，积水深为h。又设中径适在坛的$\frac{H}{2}$处。

先计算下半坛水容积，秦氏称为下积

$$V_{下}=\frac{1}{12}\pi(D_o^2+D_1^2+D_1D_o)\frac{H}{2},\ \left(\text{取 }\pi=\frac{22}{7}\right)$$

$$=\frac{11(D_o^2+D_1^2+D_1D_o)\frac{H}{2}}{42}。$$

(术文称分母为下率，分子42为下法。)

术文所说上深，指上半坛水深$h'=\frac{H}{2}+h-H$。又从上题方法，得

水面直径(面率)

$$D_h=\frac{\frac{H}{2}D_2+(D_1-D_2)\left(\frac{H}{2}-h'\right)}{\frac{H}{2}}。$$

于是就可计算上半坛中的水容积，秦氏称为上积。

$$V_{上}=\frac{1}{12}\pi(D_1{}^2+D_h{}^2+D_1D_h)h'。$$

设坛中总雨量$V=V_1+V_2$，化为以口径D_2为底面、高为y的圆柱：$V=\frac{1}{4}\pi D_2{}^2y$。

综合V，$V_{上}$，$V_{下}$三式，得所求平地降雨量

馆臣按术据题给数据，计算平地水深

$$y=3\text{尺}5\frac{920}{1\ 323}\text{寸}。$$

一次雨后平地水深约一米(1 000毫米)，显然此题秦氏命题失当。

第三章　适定方程

把《数书九章》中有关多项式方程和线性方程组方面的工作成果汇为一章，相对于不定分析，我们称之为适定方程。

第一节　多项式方程

我国古代传统把解多项式方程称为开方术。秦九韶在北宋学者贾宪、刘益有关工作的影响下，又通过师承关系：如在太史局和从隐君子的学习过程中，把数值解方程的理论和技术取得进一步发展。在《数书九章》81题中要解多项式方程的有21题，合共有26个二次(及)以上方程。其中二次(含二项)20例，三次1例，四次4例，还有十次1例。

含负系数的多项式方程的数值解法秦氏称为正负开方法。在有关21个题的术文和草文中可以发现他有承旧的一方面，但更重要的有创新的另一面。

其一，在大量术文、草文中有充分证据足以说明：秦氏已具有前人从未达到的熟练代数恒等变形和设未知数建立方程的能力。在外国，中亚细亚花拉子米(9世纪)从图形建立正整数系数二次方程三种，意大利卡当诺(G. Cardano，1501～1576)从图形建立三次方程(三项，缺x^2项)，可拉(J. Colle，1540前后时人)从“把10分成三部分，使成连比例，引出四次方程[①]”都已成为世界数学史美谈，视为瑰宝。秦氏《数书九章》远早于意大利学者，从生活、

① 详节俱见本《大系》副卷第一卷第六编第二章。

生产中提炼出多项式方程，有的高达十次。其生活、生产模型之生动活泼、丰富多彩则远甚于外国。

其二，在具体运算程序上，秦氏已予定型。已在本《大系》第二卷第二编第二章第一节筹算举例，开平方的具体运算程序，相当于解二次二项方程，是不断估根、减根和扩根的过程，方程也从缺一次项的 $a_0x^2=a_2$ 不断变形为 $a_o'y^2+a_1'y=a_2'$。《九章算术》开方术等算是四个数排成纵列，其中最上层为商(方程的根，x_o)，其次为常数项，再次为一次项系数，最下层二次项系数。(图 4.3.1)

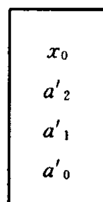


图 4.3.1

这种不定系数的排列次序也为北宋学者所承袭，读者可以查阅。在《数书九章》中。多项式既已发展到十次，在布列系数时也有相应措施。完全二次方程古称带从平方，秦氏改称连枝平方；完全三次方程改称连枝立方。对于四次方程和十次方程则分别称为玲珑三乘方(奇次幂系数是零)、玲珑九乘方(奇次幂系数是零)。这些方程系数排列次序根据传统，也是根列最上层，常数项在其次，依次排到最高次幂的系数。也据传统习惯，多项式方程

$$a_ox^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=a_n$$

事实上就是　$a_ox^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x-a_n=0$

秦氏概括为四句话：

“商常为正，实常为负，从常为正，益常为负。”

意指：商(根)总是正的，当 a_n 排到等号左边后总认为是负值。在运算过程中，正数旁注从字，负数旁注益字。还有，在大量草文中可以见到，空位常注明虚字或以圈〇代替。

当 $n=2$，纵行列如图 4.3.2 之左，当 $n=3$，列如图 4.3.2 之中，$n=4$，列如图 4.3.2 之右

当 $n=10$，纵行列如图 4.3.3。

x_0 商	x_0 商	x_0 商
a_2 实	a_3 实	a_4 实
a_1 方	a_2 方	a_3 方
a_0 隅	a_1 廉	a_2 上廉
	a_0 隅	a_1 下廉
		a_0 隅
左	中	右

图 4.3.2

x_0 商
a_{10}实
a_9 方
a_8 上廉
a_7 次廉
a_6 才廉
a_5 维廉
a_4 行廉
a_3 爻廉
a_2 星廉①
a_1 下廉
a_0 隅

图 4.3.3

其三，在解法理论上也有许多新的认识。在方程变换中常数项绝对值的增大或减小称为投胎。②符号的变化则称为换骨③，他却视为正常现象，使后学放心运算，直至获得答数。解法全过程称为开翻法，例如解四次方程则称为开翻法三乘方。这种称谓为和算因袭。数值解方程，在估根时，当经多次减根变换后，多项式方程的根对于一次项来说，当是多项式的主要线性部分，因此其近似解当为

① 《数书九章》序数词除用一、二、三、…，甲、乙、丙、丁…十干，子、丑、寅、卯、…十二支之外，还用八种乐器为序：金、石、丝、竹、匏、土、草、木。(如卷1第4题(积尺寻源)。又用三才(天、地、人)隐去三字，才即表示第三、四维(礼、义、廉、耻)隐去四字，维表示第四。五音(宫、商、角、徵、羽)隐去五字，音表示第五或五行(金、木、水、火、土)隐去五字，行表示第五。六爻隐去六字、爻即为第六。又七星或七政(日、月、金、木、水、火、土)略去七字，星或政表示第七。又卜即卦、八卦(乾、兑、离、震、巽、坎、艮、坤)隐去八字，卦就表示第八。九宫隐去九字，宫就是第九。又(天)干表示第十，(地)支表示第十二。天地之间又插入日月星诸曜，以曜表示第十一，再不够就以闰字表示第十三。有如十二月之外，再设闰月。同一道理卷17第2题(均货推本)为解线性方程组在草文中列有15个矩阵初等变换步骤，使其系数矩阵最终变换为单位矩阵，问题得解。此十五张图就以此为序：首图、次图、定率图、维图、音图、爻图、政图、卜图、宫图、干图、曜图、定图、终图，杭州大学数学系王云海先生指出这一序号秘密，并告笔者。

②③ 古人对系数的变化视为非同小可，所以用“投胎”“换骨”命名这种变化。

$$x_0 \approx \frac{a_n}{a_{n-1}}。$$

这在《张丘建算经》刘孝孙细草中已述及。秦氏对于估根另有考虑，将在范题选析中述评。对于根的精度及表示有时取整数，有时取小数或分数，也就是说添零位，继续进行运算以提高精度，这是《九章算术·少广》开方术刘徽注求微数的继续和发展，是很重要的成果。

下面选八例作为范题，分别分析。

一　二次方程

1. 均分梯田

问：户业田一段若梯之状。两广：南广小三十四步，北广大五十二步。正长一百五十步。合系兄弟三人均分其田。边道各欲出入，其地难分。经官乞分定：南甲乙，北丙。欲知：其田共积、各人合得田数、及各段正长大小、广各几何？

(答数：田共面积 26 亩 210 方步。甲、乙、丙各得 8 亩 3 角 50 方步。甲地段南底 34 步，北底 $40\frac{52\ 284}{58\ 709}\approx 40.89$(步)，高 $57\frac{853}{2\ 045}=57.41$(步)。乙地段北底 $46\frac{6\ 587\ 454\ 825\ 283}{8\ 482\ 689\ 502\ 651}\approx 46.775$(步)，高 $49\frac{20\ 276\ 319}{412\ 406\ 319}\approx 49.049$(步)，丙地段高 $43\frac{448\ 886\ 027\ 046}{843\ 370\ 921\ 905}\approx 43.53$(步)卷 5 第 6 题)

参考译文：有一家农户，兄弟三人各耕一梯形田：南底边 34 步，北底边 52 步，高 150 步。留出公共通道以外，要求均分地积。这个难题请求官员判定：南段归甲、中段归乙、北段归丙。问：这块田共有地积多少？各人分得多少？各段上、下底边长，高各是多少？

解法：

(i)建立方程

图 4.3.4 中我们如设梯形 $ABCD$ 中：a——梯形田南底边长。$a_{甲}$——甲地段北底，也就是乙地段南底长。$a_{乙}$——乙地段北底，也就是丙地段南底长。b——梯形田北底边长。h——梯形田的高。又 $h_{甲}$、$h_{乙}$、$h_{丙}$ 分别为三地段的高。秦氏原著术文相当于说

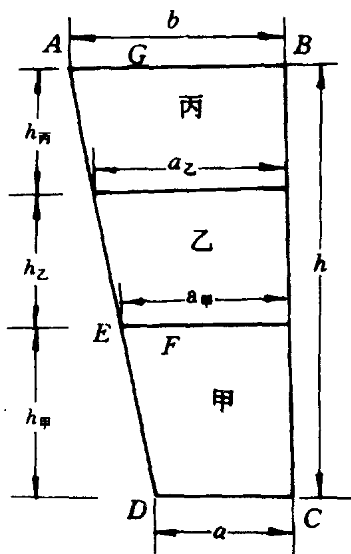


图 4.3.4

三人各分得地积 $\frac{1}{6}(a+b)h$

甲地段高 $h_{甲}$ 是二次方程 $\frac{1}{2}(b-a)x^2+ahx=\frac{1}{6}(a+b)h^2$ 的正根，北底边长 $a_{甲}=\frac{(a+b)h}{3h_{甲}}-a$。

乙地段高 $h_{乙}$ 是二次方程 $\frac{1}{2}(b-a)x^2+a_{甲}hx=\frac{1}{6}(a+b)h^2$ 的正根，北底边长 $a_{乙}=\frac{(a+b)}{3h_{乙}}-a_{甲}$。

丙地段高 $h_{丙}=h-h_{甲}-h_{乙}$。

(ii)数值解方程

以解甲地段二数据：$h_{甲}$、$a_{甲}$ 为例。以题给 a，b，h 代入二次方程得

$$9x^2+5\,100x=322\,500。$$

原著草文把隅(9)，方(5 100)，实(322 500)自下而上地列成纵列，作正负开方，一如北宋刘益操作。如按综合除法列为横式相当于

隅	方	实	商
9	5 100	−322 500	57
	513	319 941	
9	5 613	−2 559	
	513		
9	6 126	−2 559	

运算结果是 $x=57\cdots\cdots2\ 559$(余数)。

秦氏取 x(正根)的近似值为 $h_{甲}=57\dfrac{2\ 559}{9+6\ 126}=57\dfrac{2\ 559}{6\ 135}=57\dfrac{853}{2\ 045}=57.41$ 用分数表示，又化为近似小数表示。

以此代入公式，计算甲地段北底边长 $a_{甲}=40\dfrac{52\ 284}{58\ 709}$。

同术解出乙地段高、北底边长及丙地段高等其余三数据 $h_{乙}$，$a_{乙}$ 和 $h_{丙}$。

从秦氏本题术文可以清楚地看到他设未知数为某某以建立方程的能力。术文说："以少广及从法求之，并两广$(a+b)$，乘长(h)得数，以分田人数约之，为通率$\left(\dfrac{1}{3}(a+b)h\right)$，半之为各积$\left(\dfrac{1}{6}(a+b)h\right)$。以长乘各积，为共实(二次方程的常数项)。以长乘南广，为甲从方(ha 为一次项系数)，二广差半之为共隅($\dfrac{1}{2}(b-a)$为二次项系数)，开连枝平方，得甲截长($h_{甲}$)。"

从这一段术文我们还可以追迹秦氏形数结合、熟练地进行代数恒等变换的技能和技巧。今天我们要建立这一二次方程，势必设 $h_{甲}$ 为 x。从勾股比例：$AG:EF=h:h_{甲}$，$a_{甲}-a=\dfrac{x}{h}(b-a)$，又从甲地段是梯形田地积三分之一考虑$\dfrac{1}{2}(a_{甲}+a)x=\dfrac{1}{6}(a+b)h$。综合这两个代数式得

$$\left(\frac{x}{h}(b-a)+a+a\right)x=\frac{1}{3}(a+b)h。$$

别无他途可循。这就是秦氏建立的方程。可以这样说：在南方的秦氏书中只是未提立天元一这个术语。无声实有声，本质上已建立与北方同样的成果。是中算源自王孝通《缉古算经》同脉相承南北竞放的香花。

在本题解法中还见到秦氏用分数表示所求的根。其中整数部分取自正负开方，而其分数部分，则借助于他独创的近似根公式。当方程一再经过减根、扩根变换后，根的值与系数比较，其绝对值已相当小，如果方程已变换为

$$a'_0y^n+a'_1y^{n-1}+a'_2y^{n-2}+\cdots+a'_{n-1}y=a'_n,$$

秦氏认为它的根

$$\{y_0\}\approx\frac{a'_n}{\sum_{i=0}^{n-1}a'_i},$$

因此对于 $h_甲$ 来说 $a'_0=9$，$a'_1=6\ 129$，$a'_n=a'_2=2\ 559$，

就取

$$h_甲\approx57\frac{2\ 559}{9+6\ 126}。$$

秦氏此举无科学根据。应该以线性部分即 $a'_{n-1}y$ 作为 a'_n 的近似值，亦即取

$$h_甲\approx57\frac{2\ 559}{6\ 126}$$

虽然它与真值的相对误差是0.001 3，而秦氏近似值相对误差仅0.000 006 8。

2. 古池推原

问：有方中圆池，堙圮[①] 止余一角。从外方隅，斜至内圆边七尺六寸。欲就古迹修之，欲求：圆、方斜各几何？

（答数：圆直径 36 尺 6 $\frac{412}{429}$寸，正方形边长同圆直径，对角线

---

① 堙：埋没，圮(pi)从土、从己，义：毁坏。

51尺$8\frac{412}{429}$寸。卷8第5题)

参考译文：正方形中有圆池，日久损坏，只余下一角(四分之一(图4.3.5))。量得正方形角顶至圆边(如图)最短距离7尺6寸，问圆池直径、正方形边及其对角线，各长多少？

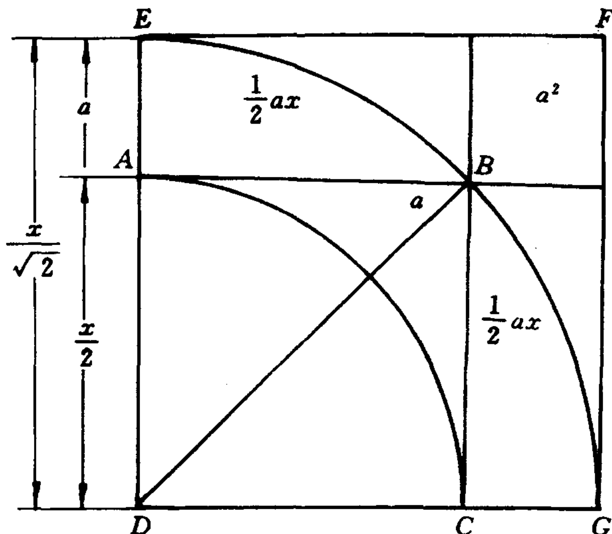


图 4.3.5

解法：

原著术文说："以少广求之，投脱术入之。斜自乘，倍之为实。倍斜为益方，以半为从隅。开投胎平方，得径。又为方面。以隅并之，共为方斜。"

"少广求之，投脱入之"是说用正负开方法解方程。此方程为二次，术文说的很清楚，斜指正方形顶点至圆边最短距离。所求正方形边长是$\frac{1}{2}x^2-2\times7.6x=2(7.6)^2$的正根，而正方形的对角线则是$y=x+2\times7.6$。

草文约500字，记述此二次方程数值解法全过程，我们用横

式记出就是

隅	从方	实	商
0.5	−152*	−11 552△	300
	150	−600	
0.5	−2	−12 152	
	150		
0.5	148*	−12 152△	60
	30	10 680	
0.5	178	−1 472	
	30		
0.5	208△	−1 472	3
	3	1 356	
0.5	211	−205	
	3		
0.5	214△	−205	

本例的根有三位有效数字，他取$\frac{205}{214}$为根的分数部分。在运算过程中系数出现换骨(用*号为记)，好几次投胎(用△号为记)。

我们用图 4.3.5 表示题意。以 a 记正方形至圆边最短距离，秦氏建立的方程当是$\frac{1}{2}x^2-2ax=2a^2$。方程是怎样建立的？可以有两种解释

其一，从勾股定理$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=\left(\frac{x}{2}+a\right)^2$即可推得原著方程，但术文并未讲。以勾股求之，不合秦意。

其二，从出入相补原理知

磬折形 $EFGCBA$ = 正方形 $EFGD$[①] − 正方形 $ABCD$

$$=ax+a^2=2\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{4}。$$

同样可以推出原著方程，此处我们运用当时数学界流行的“演段术”。本题与《九章算术·勾股》第 9 题(圆材埋壁)同是从部分求

① 注意 $DE=DB=\sqrt{2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{x^2}{\sqrt{2}}$。

全体的佳例，允称双璧。至今可以在中学数学教学中采用。[①]

3. 囤积量容

问：有圆囤米二十五个。内有大囤一十二个，上径一丈、下径九尺、高一丈二尺。小囤一十三个，上径九尺、下径八尺、高一丈。今出租斗一只，口方九寸六分、底方七寸、正深四寸。并稟明准尺，先令准数造五斗方斛及圆斛各二只。须令二斛口径正深、大小不同。各得多少？及囤积米几何？

（答数：方斛尺寸：上、下底边分别长 6.4 寸，12 寸，高 15.92 寸。或上、下底边长 10 寸，12 寸，高 11.45 寸。圆斛尺寸：上下底直径 12.7 寸，12 寸，高 12.14 寸，或上、下底直径 13 寸，12 寸，高 11.85 寸。囤米共8 067.047 418石。[②] 卷 12 第 1 题）

参考译文：有圆形米囤 25 个，其中大圆囤 12 个，其上、下底直径为 10 尺、9 尺，高 12 尺；小圆囤 13 个。其上、下底直径为 9 尺、8 尺，高 10 尺。现有出租用斗一只，上、下底为正方形，边长为 0.96、0.7 尺，高 0.4 尺。问：这斗容积是多少？借此任意制造容 5 斗方斛及圆斛各二具，使口径，高度各不相同。用此来量米囤，容米共有米多少？

解法：

原著先据题意按《九章算术·商功》方亭术计算出租用斗容积（图 4.3.6）

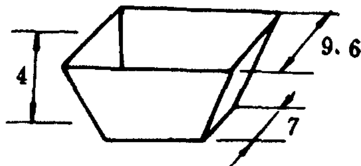


图 4.3.6

$$V=\frac{1}{3}(9.6^2+7^2+9.6\times7)\times4=\frac{1}{3}833.44(\text{立方寸}),$$

于是要制造的五斗斛容积

① “圆材埋壁”是从弓形求原圆，“古池推原”是从凹曲边三角形 ABC 求原圆。

② 原答有误。见解法正误。

$$V' = \frac{1}{3}833.44 \times 5(\text{立方寸}),$$

25个圆囤容积秦氏取 $\pi \approx 3$，计算出总容积 V''

$$3V'' = (10^2 + 9^2 + 10 \times 9) \times 12 \times 12 + (9^2 + 8^2 + 9 \times 8) \times 10 \times 13$$
$$= 67\ 234(\text{立方尺}),$$

这里秦氏漏去折方为圆，正确值应为

$$3V'' = 67\ 234 \times \frac{3}{4} = 50\ 425.5(\text{立方尺})。$$

李锐已指出："囤上下径相乘、自乘，皆为方幂，以方求圆，当以共得、三之，四而一，得五千四十二万五千五百寸"，折成石数应是

$$V'' = 50\ 425.5 \div 8.334\ 4 = 6\ 050.285\ 5(\text{石})。$$

五斗方斛尺寸怎样决定？旧时量米用具是方台形，有时上大下小如图4.3.6，一般量米用升，是这种形状；有时上小下大，量米用斛是这种形状，因为约重七八十斤，所以有铁件钉在周围，还在侧边加平行双柄，需两人抬举，如图4.3.7。在决定尺寸时，秦氏术文中相当于明确设定上底边长为 x 寸，而下底边长及高分别自定一已知值：12(寸)和16寸。术文相当于说所求上底边长 x 是二次方程

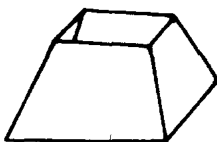


图 4.3.7

$$16x^2 + 12 \times 16x = 3 \times 5 \times \frac{1}{3} \times 833.44 - 12^2 \times 16,$$

这就是 $16x^2 + 192x = 1\ 863.2$ 的正根。

五斗圆斛尺寸怎样确定？旧时量米用具取长鼓形或圆台形，上大下小，一般量米用斗或斛取这种形状(图4.3.8)。在秦氏术文中相当于设上底直径为 x，下底直径及高适当定值如分别为10寸，12寸。于是所求上底直径 x 是二次方程

$$36x^2 + 360x = 13\ 068.88$$

的正根。

为了满足题问要求，对答数作适当调整，就可以得到两种斛的各自两种尺寸，而他们所含容积都是 5 斛。

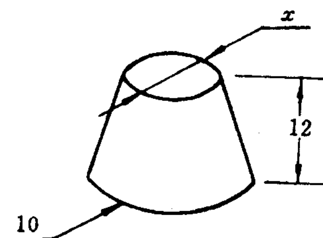


图 4.3.8

数值解方程

当解 $16x^2+192x=1\ 863.2$ 时，秦氏正负开方经扩根变换两次，使所求根精确到百分位。以下用横式综合除法记其运算过程如

隅	从方	实	商
16	192	−1833.2	6
	96	1728	
16	288	−135.2	
	96		
16	384	−135.2	3
0.16	38.4	−135.2	
	0.48	116.04	
0.16	38.88	−18.56	
	0.48		
0.16	39.36	−18.56	5
0.001 6	3.936	−18.56	
	0.008	19.72	
0.001 6	3.944	1.16	

运算至此，秦氏说“不及 1.16”又说“造斛无厘，又益厘为分。”即求得 $x=6.35$ 寸，精度已满足需要。为制造方便，他又凑整为 6.4 寸。这就是答数中第一组数据，但已把高从 16 调整为 15.92 使斛容为 5 斗不变。另外他又取上下底边长为 10，12，并取高为 11.45。他又用正负开方法解圆斛方程精度到厘止，用类似方法计算出两种容 5 斗的圆斛尺寸。

原著术文说：“求方斛。先自如意立数为斛深($h=16$)又如意立数为底方($b=12$)置深为从隅(h 作为二次项系数)以底方乘隅为从方(bh 作为一次项系数)。又以底乘从方为减率以减上积，余

为实($3V'-b^2h$ 作为常数项)。[1] 开连枝平方，得方斛口方(x)。这正是当时北方数学家所说“立天元一”。术文继续说：“以所得数为基，增损求之（把所得数适当调整为 x_0）以口底方相乘(x_0b)，又各自乘，并之($x_0^2+b^2+x_0b$)为法。除前上积，得深(h)。”这就是说斛深也应调整为：

$$h=\frac{3V'}{x_0^2+bx_0+b^2}。$$

这再一次说明秦氏的熟练代数变换高水平。

4. 计布圆阵

问：步卒二千六百人为圆阵。人立圆边九尺，形如车辐[2]。鱼丽[3] 布阵。阵重间，倍人立圆边尺数，须令内径七十二丈，圆法用周三径一之率。欲知：阵重几数？及内外周通径、并所立人数各几何？

（答数：内周216丈，立240人。外周302丈4尺，立336人。直径100丈8尺。圆阵9层余下8人。卷15第3题）

参考译文：步兵2 600人排列圆阵。每层圆周上每隔9尺立1人，形如车轮。相邻二层间距为每层的人间距2倍。已知内层圆周72丈，取圆周率近似值为3。问：此圆阵有几层？外层圆周上立多少人？直径多少？

解法：

术文说：“以商功求之。以圆率因内径为内周。以人立尺约之，为内周人数”这易理解，内周人数是

$$720\times3\div9=240。$$

术文又说：“乃以圆束差率为隅，次置内周人，减一，余为从

---

① 对照上文用阿拉伯数字所立含 x 的二次方程，二者完全一致。

② 辐，放射状车轮。

③ 鱼丽，古代车战列阵名。

方。列兵数为实。开平方，得重数。不尽为余兵。”

本题圆束从术文及草文可知秦氏考虑为有公差 $d=6$ 的等差数列。其 $a_1=240$，$S=2\ 600$，反求层数 n。从第一章第七节数列总论中等差数列公式(3)，经变换为①

$$S=a_1n+n\ (n-1)\ d,$$

或

$$dn^2+\ (a_1-d)\ n=S。$$

正是术文所说：圆束差率 d 为隅，内周人 a_1 减一为从方，列兵数 S 为实。这又一次证实秦氏建立方程和代数恒等变换的水平。至此他以题给数据代入所得数字系数二次方程，就“开平方，得重数”。书影中（图 4.3.9）在数值解方程中估根、减根、连乘、连加、交代十分利索。

图 4.3.9

① 题给相邻层间距为 $2d$，因此这里的 S 中第二项系数改 $\frac{1}{2}$ 为 1。

所求层数应是下面方程的正根

$$6x^2+234x=2\ 600。$$

现用综合除法如下：

6	234	−2 600	9
	54	2 584	
6	288	−8	
	54		
6	342	−8	

所求为 9 层多余士兵 8 人

本节所引上面四例都是二次方程。其中“均分梯田”题方程的根用分数表示，“囤积量容”题则以不断扩根、求根精确到百分位，这是中国数学史上的创举。而本题例则求得整数根，层数 9，之后，秦氏就中止运算。在常数项中还余（正数）8 作为余数。这样处理，很合理。图 4.3.9 为原著书影，左起第一列说：“不尽为余兵”。从此三例说明秦氏处理问题，得心应手，因地制宜，恰到好处。

二　高次方程

1. 推知籴数

问：和籴三百万贯，求米石数。闻每石牙[1] 钱三十，籴场量米折支牙人所得，每石出牵钱八百。牙人量米四石六斗八合折与牵头。欲知：米数、石价、牙钱、牙米、牵钱各几何？

（答数：籴到米 12 万石。每石价 25 贯文。牙钱3 600贯文，折米 144 石。牵钱 115 贯 200 文。卷 12 第 4 题）

参考译文：收购粮食，花钱 300 万贯。问：能买米多少石？已知每石米付牙钱 30 文，收购站管理人员把牙人所得每石付牵头人钱 800 文。牙人共给牵头人米 4.608 石。问：共买了多少石米？每

① 牙通互，牙：义，买卖经纪人。

石米价、牙人得钱、得米、牵头人得钱多少？

解法：

(i)建立方程

术文说："置籴本(300万贯)、牙钱(30文)、牵钱(800文)相乘为实，以牵米为隅，开连枝立方，得石价。以价除本，得籴到米。以牙钱乘米，得总牙钱。以价除之，得牙米。以牵钱乘牙米，得共牵钱。"

这是说，如果设所买米为 x 石，那么所求数每石价(钱)是三次方程

$$4.608x^3 = 3\ 000\ 000\ 000 \times 30 \times 800 = 72\ 000\ 000\ 000\ 000$$

的正根，设为 x_o。于是所买米数是

$$3\ 000\ 000\ 000 \div x_o。$$

而牙人得钱数是

$$3\ 000\ 000\ 000 \times 30 \div x_o,$$

所得米数是

$$3\ 000\ 000\ 000 \times 30 \div x_o \div x_o。$$

牵头人得钱数是

$$3\ 000\ 000\ 000 \times 30 \times 800 \div x_o \div x_o。$$

(ii)数值解方程

原著草文后附筹算过程实录，共16图，可谓精审而且井井有条，下面用横式综合除法记出

从原著书影相当于①及⑯(图4.3.10)可见秦氏运算中一丝不苟精神，在此再略给注释

①把所求数单位定为石，常数项单位定为文，特别要注意书影中单位上下严格对齐。

②～⑥是缩根变换。"隅超二位"，从《九章算术》习惯，指把三次项系数扩大 10^3 倍。于是根缩小10倍，根的单位成为10贯。

图 4.3.10

⑦～⑪，⑬～⑮连乘相加，与今综合除法算法一致。

⑫是扩根变换。"方一退，廉二退，隅三退"的结果，使根的单位成为贯。

⑯常数项出现零，即 25 贯是所求正根，所以原著说："除实，适尽"。

得每石价 25 贯。于是其余问题都可用乘除法解决。

本题再一次证实秦氏通过代数恒等变换，建立方程的知识已经成熟。他通过什么途径能建立此三次方程？惟一可循之路是据题给条件，依次译成代数语言：设每石米价是 x 文，那么共买米 $\frac{300\ 000\ 000}{x}$石。而牙人共得钱$\frac{300\ 000\ 000}{x}\times 30$ 文，牵头人得钱

$\frac{300\,000\,000}{x^2}\times30\times800$ 文，牙人共得米$\frac{300\,000\,000}{x^3}\times30\times800=$ 4.068 石。这就是秦氏所列方程。从答案看其正根适为整数。还可以理解秦氏在命题时也是煞费苦心。要使生活模型含三次方程内容，且有整数解，确不是易事。

在本题正负开方16个图式中特别应当赞赏的，是秦氏小心谨慎的定位工作，其中前后经过五次扩、缩根变换，否则尾位将出现许多空位(零)，将造成不可克服的麻烦，终致使运算出现许多差错。

2. 兴田求积

问：有两尖田一段。其尖长不等。两大斜三十九步，两小斜二十五步，中广三十步。欲知：其积几何？

(答数:840 方步。卷5第1题)

参考译文:有大小二等腰三角形地段。已知公共底边长30步。大三角形腰长39步，小三角形腰长25步。求：二地段地积共有多少?

解法：

(i)建立方程

原著术文：“以少广求之，翻法入之。置半广(图4.3.11中$\frac{c}{2}$)自乘为半幂$\left(\frac{c}{2}\right)^2$与小斜幂相减$\left(b^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right)$相乘为小率$\left(\left(b^2-\left(\frac{c}{2}\right)\right)^2\left(\frac{c}{2}\right)^2\right)$。以半幂与大斜幂相减、相乘为大率$\left(a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\left(\frac{c}{2}\right)^2\right)$。以二率相减，余自乘为实。并二率，倍之为从上廉。以一为益隅。开翻法三乘方，得积。一位开尽者，不用翻法”

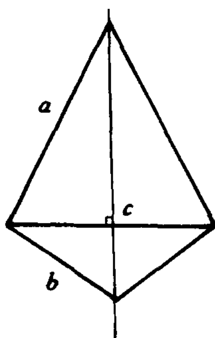


图 4.3.11

隅	廉	方	实	商
① 4.608	0	0	−72 000 000 000 000	
② 4 608	0	0	−72 000 000 000 000	
③ 4 608 000	0	0	−72 000 000 000 000	
④ 4 608 000 000	0	0	−72 000 000 000 000	
⑤ 4 608 000 000 000	0	0	−72 000 000 000 000	2 ⑥
	⑦9 216 000 000 000	⑧18 432 000 000 000	36 864 000 000 000	
4 608 000 000 000	9 216 000 000 000	18 432 000 000 000		
	9 216 000 000 000	36 864 000 000 000		
4 608 000 000 000	⑨18 432 000 000 000	⑩55 296 000 000 000		
	9 216 000 000 000			
4 608 000 000 000	⑪27 648 000 000 000	55 296 000 000 000	−35 136 000 000 000	
⑫ 4 608 000 000	276 480 000 000	5 529 600 000 000	−35 136 000 000 000	5 ⑬
	⑭23 040 000 000	⑮1 497 600 000 000	35 136 000 000 000	
4 608 000 000	299 520 000 000	7 027 200 000 000	⑯0	

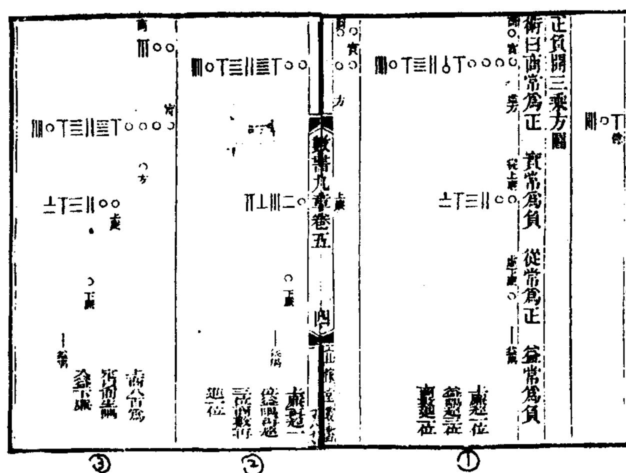


图 4.3.12-a

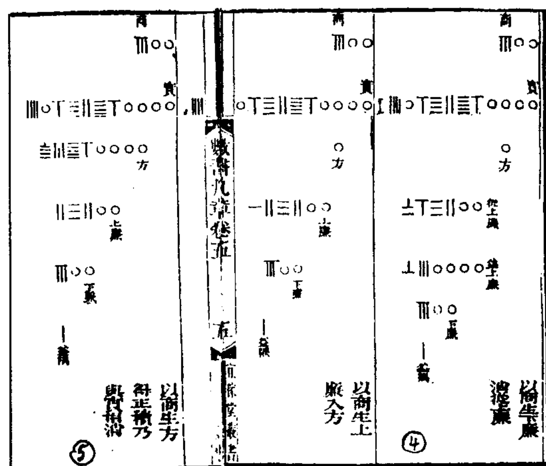


图 4.3.12-b

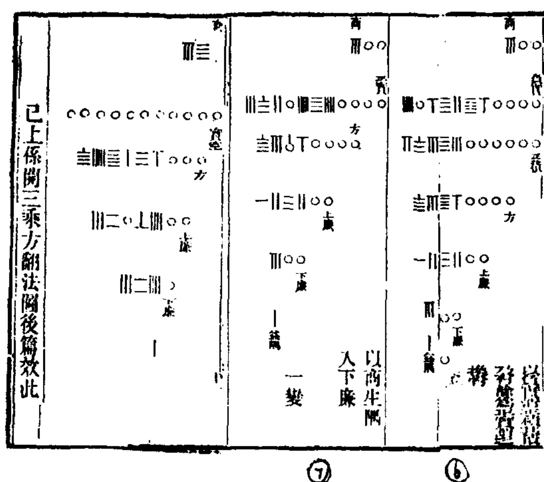


图 4.3.12-c

这就是说，所求箏形田面积是四次方程的正根：

$$-x^4+2(A+B)x^2=(A-B)^2,$$

其中

$$A=\left(a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right)\left(\frac{c}{2}\right)^2,B=\left(b^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right)\left(\frac{c}{2}\right)^2。$$

以题给数据代入，得方程

$$-x^4+703\ 200x^2-40\ 642\ 860\ 000=0。$$

(ii)数值解方程

在原著草文中有筹算实录图式 21 幅，现以综合除法示（第 299 页）其主要情节，并以带小圆圈数字，指出具有特色的书影片断(图 4.3.12)

①～②缩根变换两次$\left(\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\right)$，使根的单位为百位。注意 x^3(方)x(下廉)系数注明虚字即空位，系数为零。x^4(隅)注明益字，意为负。x^2(上廉)注明从字，意为正。常数项(实)未注字，但实常为

负。

⑥～⑦　⑥图实未注字，⑦实上注负字，下面说明："以负实消正积，其积乃有余，为正实，谓之换骨。即符号发生变化。其余只发生绝对值的大小变化，都是投胎，不一一注出。

⑰这里说明："以方约实，续商置四十"是指对于方程

$$a'_4y^4+a'_3y^3+a'_2y^2+a'_1y=a'_0。$$

当 y 为相当小时，以 $y\approx\frac{a'_0}{a'_1}$ 作为方程的近似根。

令人费解的是秦氏尖田地积四次方程是怎样得来的？在术文中未曾指出，从表象看此题是求筝形地积，那么所求值直接计算两三角形地段面积

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=\frac{1}{2}c\sqrt{a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{2}c\sqrt{b^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

即得答案。实无列和解四次方程的必要。对此，四库馆臣也有微词："其法甚易。然以如此费算者，殆欲用立天元一法不求分积，即得所问之总积也。"秦氏在术文中最后也说过："一位开尽者，不用翻积。"当式中无开不尽的平方根，就不必取解四次方程的途径。秦氏之所以设此题，用开不尽平方根命题，有其深刻用意。凭借他熟练的代数运算以有理化代数式为工具，建立了四次方程。我们如设所求筝形田地积为 x，据题意

$$x=\sqrt{A}+\sqrt{B},$$

$$x^2=A+B+2\sqrt{AB},$$

再一次有理化，就得到尖田方程

$$-x^4+2(A+B)x^2=(A+B)^2-4AB=(A-B)^2。$$

这正是术文所说，"以二率相减，余自乘为实。并二率，倍之为从上廉，以一为益隅，开翻法三乘方，得积。"而四库馆臣按语，说明清代学者也早已察觉，秦氏已具备立天元一建立方程的能力。

	隅	下廉	上廉	方	实	商
①	−1	0	763 200	0	−40 642 360 000	
②	−10 000	0	76 320 000	0	−40 642 360 000	
③	−100 000 000	0	7 632 000 000	0	−40 642 560 000	8
		④−800 000 000	−6 400 000 000	⑤ 9 856 000 000	⑥78 848 000 000	
	−100 000 000	−800 000 000	1 232 000 000	9 856 000 000	⑦38 205 440 000	
		⑧−800 000 000	⑨−12 800 000 000	⑪ −92 544 000 000		
	−100 000 000	−1 600 000 000	⑩−11 568 000 000	⑫ −82 688 000 000		
		⑬−800 000 000	⑭−19 200 000 000			
	−100 000 000	−2 400 000 000	−30 768 000 000			
		⑮−800 000 000				
	−100 000 000	−3 200 000 000	−30 768 000 000	−82 688 000 000	38 205 440 000	
⑯	−10 000	−3 200 000	−307 680 000	−8 268 800 000	38 205 440 000	4 ⑰
		−40 000	−12 960 000	−1 282 560 000	−38 205 440 000	
	−10 000	−3 240 000	−320 640 000	−9 551 360 000	0 ⑱	

3. 环田三积

问：环田大小圆田共三段。环田外周三十步，虚径八步。大圆田径一十步，小圆田周三十步。欲知：三田积及环内周通实径、大圆周、小圆径各几何？

(答数：环田面积 $20\frac{1\ 298\ 025}{2\ 362\ 256}$方步。外直径 $9\frac{9}{19}$步，环宽 $1\frac{9}{19}$步，内周长 $25\frac{5}{17}$步，大圆田面积 $79\frac{3}{53}$方步，周长 $31\frac{13}{21}$步，小圆田面积 $71\frac{43}{286}$方步，直径 $9\frac{9}{19}$步。卷 6 第 2 题)

参考译文：有圆环、大圆、小圆田三段。已知圆环外周长 30 步，内直径 8 步。大圆直径 10 步，小圆周长 30 步。求三段田面积以及环田内周长、外周直径，大圆周长，小圆直径各是多少？

解法：本题都取 π 的近似值为$\sqrt{10}$(张衡率)。大圆、小圆面积及周长、直径做算术运算即可，我们不予讨论。环田内周长、外周直径也是算术问题。

关于求环田面积问题

(i)建立方程

原著术文说："以方田及少广率变求之。各置环圆径自乘为幂，进位为实，以一为隅，开平方得周"。在图 4.3.13 中我们设环内径为 $D_{内}$，术文是说环内周是二次方程 $x^2=10D_{内}^2$ 的解，$x=\sqrt{10}D_{内}$。

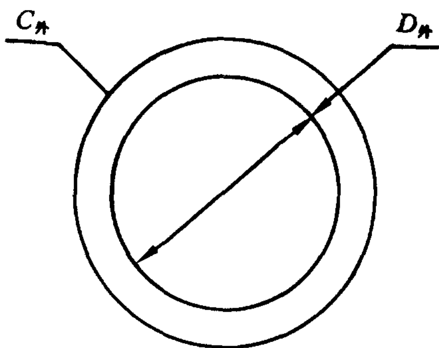


图 4.3.13

术文续说："各置环圆周自乘为幂，退位为实，以

一为隅开平方，得径。”在同图中，我们设环外周为$C_{外}$，术文是说环外径是二次方程$x^2=0.1C_{外}^2=\frac{C_{外}^2}{10}$的根：$\frac{C_{外}}{\sqrt{10}}$

术文续说：“以圆幂或径幂乘各实，以一十六约之，为实，以一为隅，开平方，得圆积。”这是说环外圆面积是二次方程。$x^2=C_{外}^2\cdot\frac{C_{外}^2}{10}\div16$的根，$x=\frac{C_{外}^2}{4\sqrt{10}}$，而环内圆面积是二次方程$x^2=D_{内}^2\cdot10D_{内}^2\div16$的根，$x=\frac{\sqrt{10}D_{内}^2}{4}$。

术文最后谈到求圆环面积求法：不循举手之劳求内、外圆面积之差，而是：“置圆周幂乘径实，十六约之，为大率。置虚径幂乘内周实，十六约之为小率。以二率相减之余，以自乘为实。并二率，倍之为从上廉。一为益隅。开三乘方得环积。”这是说所求圆环面积是四次方程的正根

$$-x^4+2(A+B)x^2=(A-B)^2,$$

其中

$$A=\frac{1}{16}C_{外}^2\cdot\frac{C_{外}^2}{10},\quad B=\frac{1}{16}D_{内}^2\cdot10D_{内}^2。$$

以题给数据代入，即解方程

$$-x^4+15\ 245x^2=6\ 262\ 506.25。$$

(ii)数值解方程

原著草文以19个图式纪录筹算正负开方实况。现简记为横式，并用小圆圈数字示序号，并略作说明。

	隅	下廉	上廉	方	实	商
①	−1	0	15 245	0	−6 262 506.25	
②	−10 000	0	③ 1 524 500	0	−6 262 506.25	2
		−20 000	④ −40 000	2 969 000	5 938 000	
	−10 000	−20 000	⑤ 1 484 500	⑥ 2 969 000	−324 506.25	
		⑦ −20 000	⑨ −80 000	⑪ 2 809 000		
	−10 000	⑧ −40 000	⑩ 1 404 500	⑫ 5 778 000		
		−20 000	⑬ −120 000			
	−10 000	−60 000	⑭ 1 284 500			
		⑮ −20 000				
	−10 000	−80 000	1 284 500	5 778 000	−324 506.25	
⑯	−1	−80	12 845	577 800	−324 506.25	0

得数　$20\dfrac{324\ 506.25}{12\ 845+577\ 800-1-80}=20\dfrac{324\ 506.25}{590\ 564}=20\dfrac{1\ 298\ 025}{2\ 362\ 256}$
⑰　　⑱　　⑲

①②为缩根变换，根缩小10倍，因此所得根单位应是十位数。

⑯为扩根变换，根扩大10倍，所得根应是单位。经验算：其主要线性部分与实之比$\dfrac{324\ 506.25}{577\ 800}<1$所以原著说明说："无商"。

⑰经过减根变换和扩根变换后，方程相当于

$$-y^4-80y^3+12\ 845y^2+577\ 800y=-324\ 506.25$$

秦氏在估算x_0的小数部分时以324 506.25为分子，取等号左边所有系数的代数和$-1-80+12\ 845+577\ 800=590\ 564$为分母即$\{x_0\}=\dfrac{324\ 506.25}{590\ 564}$对于32 450 625，59 056 400秦氏认为有等数$d=(32\ 450\ 625,59\ 056\ 400)=25$，约分子分母，于是$\{x_0\}=\dfrac{1\ 298\ 025}{2\ 362\ 256}$。

⑲秦氏说："开三乘方，凡二十（应为十九）变，至此得环田积数。"

环田三积四次方程从何而来？与"尖田求积"类似，从表象看，所求面积无非是外圆、内圆面积之差

$$x=\sqrt{A}-\sqrt{B}。$$

何必要动用解四次方程、小题大作？事实上这处术文再一次展示秦氏如椽之笔。他用古汉语言简意赅地一口气建立了四个二次方程和一个四次方程。前四者含蓄地道出用张衡圆周率详尽无余地作出圆积、圆周长、圆直径间的关系；后者他匠心独运，在有理化代数式中建立了与“尖田方程”相匹配的另一个有共轭关系的环田方程。用今日数学语言表示，当 x 是两无理数(开平方根)之差

$$x=\sqrt{A}-\sqrt{B},$$

那么
$$x^2=A+B-2\sqrt{AB}。$$

再一次有理化，就得到环田方程

$$-x^4+2(A+B)x^4=(A-B)^2。$$

这正是术文说：“以二率相减之余，以自乘为实。并二率，倍之为从上廉。一为益隅。开三乘方得环积。”四库馆臣读书至此，按语也说：“求环积与前求尖田积同。但彼立天立一为两积之和，此立天元一为两积之较耳。”极有见地。

在对环田四次方程作正负开方法中值得称道处有二。

其一，步骤⑯当在估根中出现 $\frac{a_n'}{a_{n-1}'}<1$ 时，根的首位数已小于一个单位，秦氏肯定地说：“无商”也就是说从无商到有商，还需进一步扩根变换，或是迳取其尾数。他取后者。

其二，前已道及以系数之和作为分母取近似根，无科学依据。而他在约简分子分母时，对于两个千万位大数，做了一个更相减损术，求出等数，并作约简。

4. 遥度圆城

问：有圆城不知周径，四门中开，北门外三里有乔木。出南门，便折东行九里，乃见木。欲知：城周、径各几何？圆用古法。

(答数：直径 9 里，周长 27 里。卷 8 第 2 题)

解法：

(i)建立方程

原著术文说："以勾股差率求之。一为从隅。五因北外里，为从七廉。置北里幂，八因为从五廉。以北里幂为正率，以东行幂为负率，二率差四因，乘北里为益从三廉，倍负率，乘五廉，为益上廉。以北里乘上廉为实，开玲珑九乘方。得数自乘为径。以三因径，得周"图 4.3.14 为原著插图。

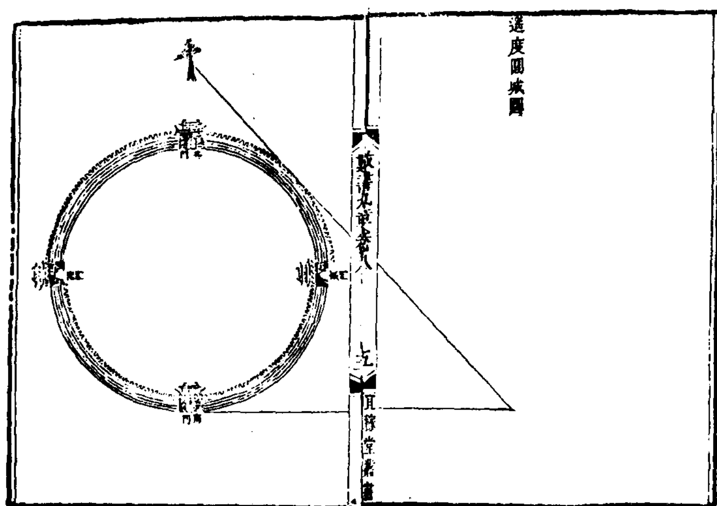


图 4.3.14

图 4.3.15 左设直径 EB 的圆城，设 A 处有乔木，北门至乔木 $AE=a$，南门 B 东行 b 至 C 见乔木。术文是说所求圆城直径是十次方程正根的平方。

$$x^{10}+5ax^{8}+8a^{2}x^{6}-4a(b^{2}-a^{2})x^{4}-16a^{2}b^{2}x^{2}=16a^{3}b^{2}$$

以题给数据代入，要解

$$x^{10}+15x^{8}+72x^{6}-864x^{4}-11\ 664x^{2}=34\ 992。$$

(ii)数值解方程

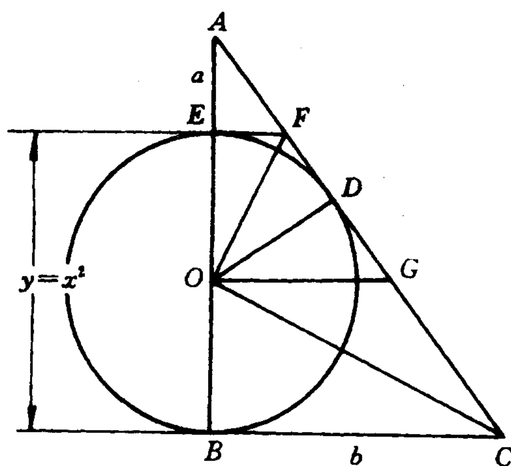


图 4.3.15 a

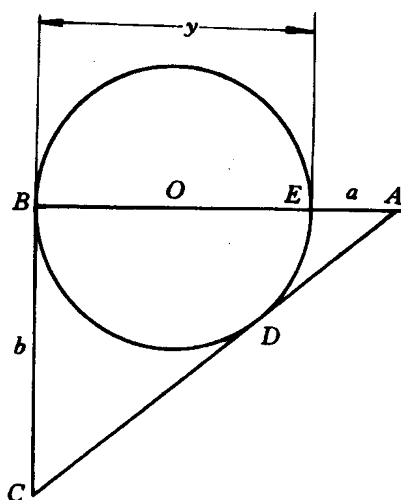


图 4.3.15 b

以现代数学语言列横式表示，设有正根为3，一步到位，就得到准确答案，此即

隅	下廉	星廉	爻廉	行廉	维廉	才廉	次廉	上廉	方	实	商
1	0	15	0	72	0	−864	0	−11 664	0	−34 992	3
	3	9	72	216	864	2 592	5 184	15 552	11 664	34 992	
1	3	24	72	288	864	1 728	5 184	3 888	11 664	0	

对照秦氏此题筹算草文书影(图 4.3.16)，他小心翼翼布筹，其最后一纵列(自下而上)，与上横式(自左而右)完全一致。

本题十次方程一百多年来受人瞩目、聚讼已久，是秦氏九章讨论焦点之一，其中主要观点有二：

其一，为什么本题要建立十次方程？如果就事论事，布列三次方程足以置答，四库馆臣对之曾作按语："元李冶《测圆海镜》一百七十问，仅一题取至五乘方，犹自以为烦。此题非甚难者，乃取至九乘方，盖未得其要也。"有学者还批评他此举"好高骛远，哗众取宠。"经过一段时间反思，人们逐渐认识到他所建立的十次方程史无前例，是辛勤力作，是数学历史硕果，功勋千秋，值得称道。

其二，通过怎样途径建立这十次方程？已在前面七个范例中一再指出秦氏熟练的代数恒等变形和设立未知数、建立方程的技能技巧，这一事实在十分丰富的术文、草文中已跃然纸上、不呼自出，《九章算术·勾股》第 20 题："四面开门，北门外有木，人出南门西行见木"题。与本题相仿。唯方城改为圆城。而秦氏同代人李冶《测圆海镜》卷 3 第 4 题："或问甲出西门，南行四百八十步。乙出东门，直行一十六步望见甲。"求城径(答数 240 步)。李氏则立元一术建立三次方程获解。秦氏本题与李题全相一致，只是数据、测量者步行方向有异而已，对照图 4.3.15 a 与 b，两题同是九章勾股衍生，是不言而喻的。而秦氏建立方程虽不明言天元与李氏天元术应是一母孪生同胞也应无庸置疑。秦氏写书之时正当

已上係求率圖　以後係開方圖

約實商三里

以商生行廉 得維廉

以商生維廉 得才廉

以益才廉消從才廉餘提

以商生才廉 得次廉

图 4.3.16 a

以商生次廉 得從上廉

以益從上廉消從上廉餘

數書九章卷八

以商生從上廉得從方

乃以從方命上商除實適盡得三里

图 4.3.16 b

中国北方天元术酝酿之际。他有可能从师友处风闻立天元一之说，但语焉不详，不能确定究为何物，以致误以为在解一次同余式 $ax\equiv 1(\mathrm{mod}\ b)$时计算函数 $j_n=q_nj_{n-1}+j_{n-2}$，$j_0=0$，j_1 恒等于 1，称为"立天元一于左上。"在本题术文中秦氏只记十次方程各项系数，对方程的推导不着一字，正说明他对代数恒等变换已视为极其平常之事，所以全部略去。这是可以理解的。好像今日人们写论文，略去众所周知的推导过程一样，古今一理。

李冶在解题中说："以四之东行步乘南行幂为实，从空，东行为廉，一步为隅法，得全径。在图 4.3.15 右中对应的东行步为 a，南行步为 b，如设城径为 y，即所求圆城直径是三次方程

$$y^3+ay^2=4ab^2。$$

四库馆臣在议论秦氏立术过繁后说："爰另立取法，并步算之式于后。"对应于图 4.3.15，馆臣考虑二相似直角三角形，此为《九章算术》及《测圆海镜》经常使用的图形，取对应边成比例之理，"另立取法"。其中对应四线段 $AO:AD=AC:AB$(图 4.3.15 右)第一、三、四项都是现成的。第二项如运用欧几里得《原本》知识，当是圆 O 的切线 AD 与割线 AB 的关系，即得 AD 与 a，y 的关系 $AD=\sqrt{a(a+y)}$。但四库馆臣忠实于中国传统把直角三角形 AOD 中 AO，OD，AD 分别称为小弦、小股、小勾。那么 $a=AO-OE=AO-OD$ 为小弦股差，而 $a+y=AO+OD$ 为弦股和。《九章算术·勾股》有式：弦股差与弦股和之乘积为勾幂，同样获得 $AD=\sqrt{a(a+y)}$；这是值得称道的。于是即建立关系：

$$\left(a+\frac{y}{2}\right):\sqrt{a(a+y)}=\sqrt{(a+y)^2+b^2}:(a+y)。$$

这就是

$$(y+a)(y^3+ay^2-4ab^2)=0。$$

馆臣只为李冶方程作了推导，而对秦氏方程来源的探索并无裨益。

沈钦裴读书至此，为秦氏工作复原作出了贡献。他说："此术精深，须以天元一显之，先识别得东行里自乘，以北外里乘之，又

四因之数($4ab^2$)与城径自乘(设为 y^2)又以北外里并城径乘之数等。”这就是李冶方程。他又说：“然后立草。草曰：立天元一为城径开方数($x=\sqrt{y}$)。自之得城径($y=x^2$)，又自之($y^2=x^4$)为径幂。以北外里并城径($a+x^4$)乘径幂($x^4(x^2+a)$)。为寄左数。乃置东行里自乘，以北外里乘之，又四之为等数，与左相消。”这已得一六次方程

$$x^6+ax^4-4ab^2=0。$$

他继续说：“置北外里倍之($2a$)，并城径(x^2)，自之，以乘上，与秦书脗合，”就这是说

$$(x^2+2a)^2(x^6+ax^4-4ab^2)=0。$$

刚好与秦氏方程一致。

沈氏及门弟子宋景昌写了内容翔实的《数书九章札记》。于此，他作出评论：“先生此术，本之测圆海镜边股及底勾第四问。即识别杂记所谓边股(EF)叀股(BC)相乘得半径幂。底勾(EF)明勾(BC)相乘得半径幂也。于天元术相消后，便宜开方。今复以倍北外里并城径乘之者，所以明九乘方中较常术多带此一分母也。若欲相消便得九乘方者，以城径乘倍北外里并城径为径率，以东行里乘倍北外里并城径，为勾率，如积求之，即得。”

宋氏所评论的二论点，前一论点是说在直角三角形 FOC 中 $OD^2=FD\cdot DC=EF\cdot BC$，其中$\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，从勾股比例，易于求得 $EF=\dfrac{ab}{y+a}$，而 $OD=\dfrac{y}{2}$，$BC=b$。就验证了老师所建立的三次方程。他又进一步为老师阐明之所以再乘上$(y+a)^2$ 的苦衷。后一论点是宋氏自创，借以用李冶立天元一术解释秦氏方程造术。在图 4.3.15 中$\triangle ADO\backsim\triangle AOG$，$AO:OG=AD:OD$。仍以 $y=x^2$ 代入，所谓径率是 $x^2(x^2+2a)=4a\sqrt{x^2+a}\cdot OG$。

又由$\triangle AOG\backsim\triangle ABC$，$AO:OG=AB:BC$，所谓勾率，指

$$b(x^2+2a)=2(x^2+a)OG。$$

综合两式，得

$$\frac{x^2(x^2+2a)}{4\sqrt{a(x^2+a)}}=\frac{b(x^2+2a)}{2(x^2+a)}。$$

两边平方，变换为

$$\frac{x^4(x^2+2a)^2}{16a(x^2+a)}=\frac{b^2(x^2+2a)^2}{4(x^2+a)^2}。$$

约去两边分母中的公因式 $4(x^2+a)$，就得到秦氏十次方程。

我们认为从秦氏已有极好的代数素养看，沈钦裴的复原解释最有见地，也最为中肯。

第二节　线性方程组

我国古代传统把线性方程组系数用算筹排列成长方形，称为“方程”，而其解法称为“方程术”。

今日很时髦的话题“数学建模”(mathematical model)应该说，在古老的南宋时代成书的《数书九章》中已搞得很热闹。秦氏善于把客观世界某一细节归结为数学模型，在上节多项式方程所引范例八则已经道及。在线性方程组问题上他也十分关切。上自天文星象、下至海运贸易、取材非常广泛，所建立的方程组恰如其分，贴切事实。比较《九章算术·方程》时代命题仅限于马牛羊、鸡犬豕或金代李冶《测圆海镜》以直径 240 步圆城反复命题达 170 次，而秦氏所命题内容多变化、曲折，一新耳目，充分体现数学科学的本质——理论的抽象性和应用的广泛性。

《九章算术·方程》已系统论述线性方程组解法——今称矩阵的初等变换。只是在计算技术上以“直除”(连续做减法)消元，运算费时费力。又矩阵元素限于整数(含负数)从未遇到分数，又当同一方程中系数有公约数例子也从未出现。如果出现，应怎样解决？又从来数学专著都使系数矩阵变换到三角矩阵止，然后回代，

这确能省时、省力。但也不能一概而论。如果坚持这样做，难免出现近似根。怎样探索把系数矩阵变换到单位矩阵止？这样从最终变换所得系数矩阵本身就是方程组的解。秦氏对上述问题在有关问题术文及草文中作出出色、系统改进：

“以方程求之，正负入之。列积及物数于下(常数项)。布行数，各对本色(列出各方程的系数，对齐相应系数)。有分者通之(当有分数系数，全式通分)，可约者约之(当同一方程各系数有公约数，就约简)，为定率积列数(经过上面两种运算后，新矩阵称为定率)每以下项互遍乘之(未知数的系数互乘代替乘后“直除”，这是一项重要的进步)。每视其积以少减多，其下物数各随积正、负之类。如同名相减，异名相加。正无入负之，负无入正之，其如同名相加，异名相减，正无入正之，负无入负之。使其下项物数得一数者为法(除数)，其积为实(被除数)，实如法而一。(指变换到单位矩阵后，每一方程仅余一个未知数及常数项)，即得答数。”

三国刘徽在注《九章算术·方程》第6题时就有改“遍乘直除”为互乘相减的好主意。他说：“假令为同齐，当相乘左右行定。更置右行牛十羊四，值金二十两；左行牛十、羊二十五，值金四十两，牛数等同，金多二十两者，羊差二十一，使之然也……以小推大，虽四、五行不异也。”秦氏是贯彻刘徽这一理论的最早实践者。

有关解法细节将在三个范题选析中详述。

1. 缀术推星

问：岁星合伏经一十六日九十分、行三度[①] 九十分，去日一十三度乃见。后、顺行一百一十三日、行一十七度八十三分，乃

① 我国古代圆周的365 $\frac{1}{4}$等分为一度，100分为一度，100秒为一分。以下百分，称小分、小秒。

留。欲知合伏段初行率，末行率。各几何？[①]

(答数：初行率0.239 7度，末行率0.230 7度、卷3第4题)

题文大意。岁星(即木星)、是金、木、水、火、土五星中最先被人们认识的行星。因为它最明亮，而且在一年中能看到的时间最长。先秦典籍如《书·洪范》就明确记载："王省唯岁。"之所以称岁星，因它约12年绕天一周。当木星与太阳在黄道同经度时，称"合日"，人们看不见它，即使在近旁，大约先后33日也不能看到，古称合伏。合伏之后，它在黎明时出现在东方天空，古称"晨始见"。这是时隔399日，约一年又一月周期的天象。《汉书·律历志》记载这个数据。如冬至所在月，即十一月、木星出现在斗、牵牛座间，称卯年。下一次将是十二月才出现在婺女、虚座，称辰年。再一次是一月出现在营宿、东壁座，称巳年……周而复始，经12年，恢复到原来位置，木星一年一次变动而始见的位置，就用以记岁。《汉书·律历志》以11.92年为周期。《后汉书·律历志》则定为11.87年，与今测11.86年最为接近。

五星的真运动是从西向东以太阳为一焦点绕太阳公转。轨道为椭圆。我们在地球上观察到的是它们的视运动，有时从西向东运动，称为顺行；有时反是，即自东向西。称为逆行。方向相反运动的转折时刻，称为留。

古人视木星为匀加(减)速运动，而且是以一日为间距(t)的阶梯函数。《九章算术·均输》第19题良马驽马题就是一例[②]

题意是说，木星在合伏时间$t_1=16.9$(日)内运行角距$\theta_1=3.9$(度)接着就顺行，共时间$t_2=113$(日)，运行角距$\theta_2=17.83$度。求合伏段初速ω_0，合伏段终速ω_1，此即顺行段初速及顺行段终速ω_2[③]。

---

① 所求各数，这里有删、改。

② 见本《大系》第二卷 pp. 404～405

③ ω_0，ω_1，ω_2分别是一日内平均角速度。

解法：在圆周运动中对于连续变量 t，初角速度 ω_0，均匀角加速度 α，角速度 $\omega(t)=\omega_0+\alpha t$，而角距 $\theta(t)=\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$（图 4.3.17 左）对于 t 以一日为间距的离散变量，角速度 $\omega=\omega_0+\alpha(t-1)$，$\theta=\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t(t-1)$。（图 4.3.17 右）

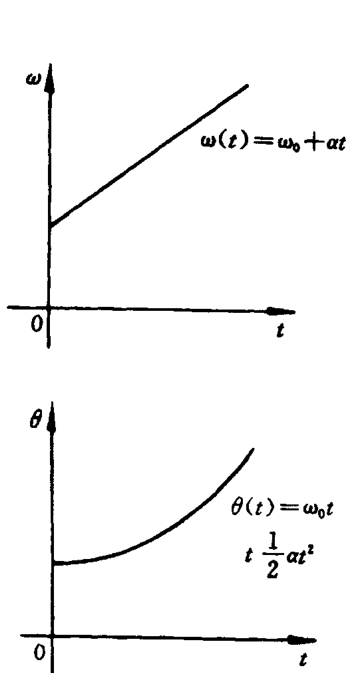


图 4.3.17 左

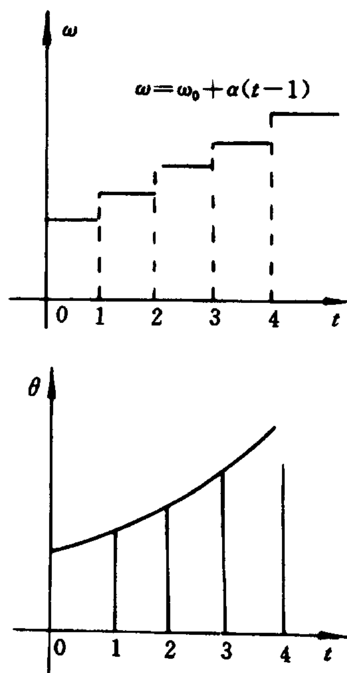


图 4.3.17 右

照此说法，在合伏段($t_1=16.9$)

$$\theta_1=\omega_0 t_1+\frac{1}{2}\alpha t_1(t_1-1)。\qquad (*)$$

在合伏以及顺行段($t_1=16.9$ 又 $t_2=113$)

$$\theta_1+\theta_2=\omega_0(t_1+t_2)+\frac{1}{2}\alpha(t_1+t_2)(t_1+t_2-1)。\qquad (**)$$

以题给数据代入，α 显然将是负值。为使 α 是正值，可以写成与(*)，(**)等价的另二方程[①]

$$\theta_2=t_2\omega_2+\frac{\alpha}{2}t_2(t_2-1),\qquad (1)$$

$$\theta_2+\theta_1=\omega_2(t_2+t_1)+\frac{1}{2}\alpha(t_2+t_1)(t_2+t_1-1)。\qquad (2)$$

(2)式减去(1)式，就得到

$$\theta_1=t_1\omega_2+\frac{\alpha}{2}t_1(t_1+2t_2-1)。\qquad (3)$$

这正是本题术文所说："以方程求之。置见日(t_2)减一，余半之，为见率$\left(\frac{t_2-1}{2}\right)$，以伏日($t_1$)并见日为初行法($t_1+t_2$)。以法半之，加见率，共为伏率$\left(\frac{t_1+t_2}{2}+\frac{t_2-1}{2}=\frac{t_1+2t_2-1}{2}\right)$。以伏日乘伏率为伏差$\left(\frac{1}{2}t_1(t_1+2t_2-1)\right)$，以见日乘见率为见差$\left(\frac{1}{2}t_2(t_2-1)\right)$。以见日乘伏差于上，以伏日乘见差，减上。余为法$\left(\frac{1}{2}t_1t_2(t_1+t_2)\right)$。以见日乘伏度 $t_2\theta_1$ 为泛。以伏日乘见度($t_1\theta_2$)。减泛，余为实。满法而一，为度。不满，退除为分秒，即得日差(α)。"

上面一段术文，秦氏细致地述说二元(ω_2,α)一次方程组的解之一——α 与已给数 t_1，t_2，θ_1，θ_2 的关系是

---

① 把题设末速 ω_2 作为初速，反过来把初速 ω_0 作为末速。

$$\alpha=\frac{t_2\theta_1-t_1\theta_2}{\frac{1}{2}t_1t_2(t_1+t_2)}。\tag{4}$$

在草文中秦氏并未把数据代入(1)(3)两式，列出类似于

$$\begin{cases}16.9\omega_2+2\ 044.055\alpha=3.9,\\113\omega_2+6\ 328\alpha=17.83\end{cases}$$

的算筹图式以求 α 值①，而是直接从(1)(3)两式经过相当于含字母的系数的代数恒等变换，消去未知数 ω_2 以得到 α 与 t_1，t_2，θ_1，θ_2 的关系。何以见得？以消元知识说，对于(1)，(3)两式当要消去 ω_2 这一元时，必定是以 t_2 乘(3)式，以 t_1 乘(1)式两端然后做减法：就得到(4)式。注意上引术文："以见日(t_2)乘伏差于上…，以伏日(t_1)乘见差…" 不正是这完全相同的变换吗？得到公式(4)之后，在草文中可看到秦氏一一代入题给数据，得到

$$\alpha=\frac{113\times3.9-16.9\times17.83}{\frac{16.9\times113}{2}\times(16.9+113)}=0.001\ 123\ 66(度)。$$

原著说："为日差一十一秒二十三小分六十六小秒"结果精确到一亿分之一。

再据公式(*)、(**)计算题所求合伏段初行率

$$\omega_0=\frac{\frac{1}{2}(t_2+t_1)(t_2+t_1-1)\alpha+\theta_1+\theta_2}{t_2+t_1}=0.2397(度),$$

末行率

$$\omega_1=\omega_0-t_1\alpha=0.220\ 7(度)。$$

本题是秦氏解二元一次方程组之例。所以术文说："以方程求之"他的解题有特色：以他娴熟的代数运算从(1)(2)变换到(1)，(3)，再消去用古汉语写出的字母系数的 ω_2 元。再一次证实他非凡

① 宋元数学史论文集，北京：科学出版社，1966：92～93

的代数运算和建立方程的能力。

四库馆臣读书至此，评论说："此求逐日之递差为日差也。术曰：'方程'，非也。其所谓见数者，乃徒设一数，宛转附会，使合于方程之行利也：……特多立名目，故为曲折颠倒，使人不易辨耳。"后世已有好几位学者反思：馆臣之非议是不恰当的。馆臣"求逐日之递差为日差"之说虽可取[①]，但秦氏的设想简易可行，不能说是"故为曲折颠倒，使人不易辨耳。"

秦氏经过解方程组所给出的日差(行星加速度)与$t_1, t_2, \theta_1, \theta_2$的关系有一般意义，与唐代僧一行(683～727年)日差公式是一致的，读者可在本《大系》第四卷第五编第一章查阅。

2. 推求物价

问：榷货务[②]三次，支物准钱[③]各一百四十七万贯文。先拨沈香[④]三千五百裹，玳瑁[⑤]二千二百斤，乳香[⑥]三百七十五套。次拨沈香二千九百七十裹，玳瑁二千一百三十斤，乳香三千五十六套四分套之一。后拨沈香三千二百裹，玳瑁一千五百斤，乳香三千七百五十套。欲求：沈乳香、玳瑁、裹、斤、套各价几何？

(答数:沈香每裹300贯文,乳香每套64贯文,玳瑁每斤180贯文,卷17第1题)

参考译文：国家专卖局发放物资三种，各折合现金147万贯文。先拨沈香300裹，玳瑁2 200斤，乳香375套；其次拨沈香2 970裹，玳瑁2 190斤，乳香3 056$\frac{1}{4}$套。后拨沈香3 200裹，玳瑁1 500

---

① 李俨. 中算家的内插法研究. 北京：科学出版社，1957

② 榷货务，设在京师的处理官卖商品机关。

③ 准钱，折合现金。

④ 沈香，药材原产印度，主治哮喘、呕吐。

⑤ 玳瑁，爬虫类动物产热带。其甲为中药材，解毒定惊。

⑥ 乳香，药材，原产红海沿岸一带。

斤，乳香3 750套。求：沈香、乳香、玳瑁每裹、斤、套各值多少钱？

解法：原著草文以14个图式实录筹算运算过程，其“首图”相当于列出增广矩阵。遵照《九章算术·方程》方程术，先右、次中、后左行，常数居顶层，沈香其次，玳瑁在后，乳香殿后，即

$$\begin{matrix}\text{钱贯}\\ \text{沈香}\\ \text{玳瑁}\\ \text{乳香}\end{matrix}\begin{bmatrix}147\ 000 & 1\ 470\ 000 & 1\ 470\ 000\\ 3\ 200 & 2\ 970 & 3\ 500\\ 1\ 500 & 2\ 130 & 2\ 200\\ 3\ 750 & 3\ 056\frac{1}{4} & 375\end{bmatrix}$$

图4.3.18上段为　首图　注意其分数表示方法。把中行四个数都扩大4倍，就成为次图(图4.3.18书影中段)

接着秦氏对　次图　作各种处理：右行有最大公约数25，以此约简全行。求出中行，以分母4乘各元素，化为整数。最大公约数15，以此约简全行，左行有公约数50，以此约简全行。于是得到“定率图”：(书影下段)

$$\begin{bmatrix}29\ 400 & 392\ 000 & 58\ 500\\ 64 & 792 & 140\\ 30 & 568 & 88\\ 75 & 815 & 15\end{bmatrix}$$

为消去左右行乳香元素前者各元素乘75，后者乘15，做减法后，又以公约数30相约简。其次消去中、右行乳香元素。前者各元素乘15，后者乘815，又以公约数10相约，得“卦图”：

$$\begin{bmatrix}29\ 400 & 543\ 900 & 132\ 300\\ 64 & 724 & 318\\ 30 & 1\ 815 & 205\\ 75 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

再用互乘相消，消去玳瑁元素，得“干图”：

其中行乳香有四分套之一便以母四通中行諸數只
內子一入乳香段內積得五百八十八萬貫沉得一萬
一千八百八十斤瑇得八千五百二十斤乳得一萬二
千二百二十五套　以右行求等得二十五俱約之積得
五萬八千八百貫沉得一百四十斤瑇得八十八斤乳

图 4.3.18

$$\begin{bmatrix} 29\,400 & 543\,900 & 12\,862\,500 \\ 64 & 724 & 428\,750 \\ 30 & 1\,815 & 0 \\ 25 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

进一步约简右行，得“曜图”。

继续变换得“支图”、“闰图”，其“闰图”为

$$\begin{bmatrix} 10\,200 & 180 & 300 \\ 0 & 0 & 1 \\ 30 & 1 & 0 \\ 75 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最后得系数矩阵为单位矩阵的“终图”

$$\begin{matrix}\text{钱贯文}\\ \text{沈香}\\ \text{玳瑁}\\ \text{乳香}\end{matrix}\begin{bmatrix}64 & 180 & 300\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

本题运算过程中未出现负数。对于同一方程中的分数和最大公约数秦氏都作了合理处理。层次分明，井井有条。

3. 均货摊本

问：有海舶赴务[①]抽[②]毕。除纳主家货物外，有沈香五千八十八两，胡椒[③]一万四百三十包(包四十斤)，象牙二百十二合(大小为合，斤两俱等)系甲乙丙丁四人合本博到[④]。缘昨来凑本，互有假借。甲分到官供称：甲本金二百两，盐四袋钞[⑤]一十道。乙本银八百两，盐三袋钞八十八道，丙本银一千六百七十两，度牒一十五道；丁本度牒五十二道，金五十八两八铢。以上共估值四十二万四千贯。甲借乙钞，乙借丙银，丙借丁度牒，丁借甲金。今合拨各借物归原主名下为率，均分上件货物。欲知原金、银、袋盐、度牒原价，及四人各分得香、椒、牙几何？

(答数：甲金、每两 480 贯文，本、124 000贯文合得沈香1 488两，胡椒3 050包 11 斤 5 $\frac{7}{53}$两，象牙 62 合。乙盐，每袋 250 贯文，本 76 000贯文。合得沈香 912 两，胡椒1 869包 21 斤 2 $\frac{6}{53}$两，象牙 38

① 务、管理机关，这里指市舶司。

② 抽，纳税。

③ 胡椒，调味品，原产热带亚洲。

④ 博到，南宋时，海外贸易专用词，参见第三编第三章第四节。

⑤ 盐袋钞，代货(专卖盐)纸券。计量单位为三袋或四袋。四袋钞一十道，即可卖盐 4 袋的代货券 10 张。共可卖盐 40 袋。

合。丙银每两 50 贯文，本123 500贯文。合得沈香1 482两，胡椒3 037包 39 斤 5 $\frac{23}{53}$两，象牙 61 $\frac{3}{4}$合。丁度牒、每道1 500贯文。合得沈香1 206两，胡椒2 472包 8 斤 3 $\frac{17}{53}$两，象牙 50 $\frac{1}{4}$合。卷 17 第 2 题)

题文大意：我国宋代海运事业发达，海船直达西亚、东非、南洋。元祐二年(1087 年)设立福建市舶司，浙路市舶司与广南市舶司以管理三省海运事业。本题是说四人出海经商。归航向海关纳税后，赢余沈香、胡椒、象牙等进口物资。出海前四人入股资本计：甲：黄金 200 两，盐 4×10=40 袋；乙：白银 800 两，盐 3×88=284 袋；丙：度牒 15 张，白银 1670 两，丁：度牒 52 张，黄金 58 $\frac{1}{3}$两。四人入股资本各值钱10 600贯文。题文又转了一个弯：丁的黄金从甲借来，丙的度牒从丁借来，乙的白银从丙借来，甲的盐从乙借来。也就是说自有财产甲仅持黄金，乙持白银，丙、丁各持盐、度牒纸券。题意要回答：①黄金(两)、白银(两)、度牒(张)、盐(袋)各值多少？②四人各持财产折钱多少？③按入股前自持财产分配赢余物资，各人应得多少？

解法：我们把第①题归入本章。第②、③题已归入第一章第四节[①]。秦氏术文与上题推求物价大同小异，而列出筹算图式 15 幅并认真写出运算细节的草文达1 500字，是自刘徽注《九章算术·方程》第 18 题以来罕见珍品。如设度牒每张值 x 贯文，白银每两值 y 贯文，盐每袋值 z 贯文，黄金每两值 w 贯文，按题意列出方程组

① 第二段分配比例叙说。

$$\begin{cases} 58\dfrac{1}{3}w+52x=106\ 000 \\ 1\ 670y+15x=106\ 000 \\ 264z+800y=106\ 000 \\ 200w+40z=106\ 000 \end{cases}$$

用矩阵表示正是秦氏所作“首图”“次图”(图 4.3.19)现用阿拉伯数字表示原著中国数码字

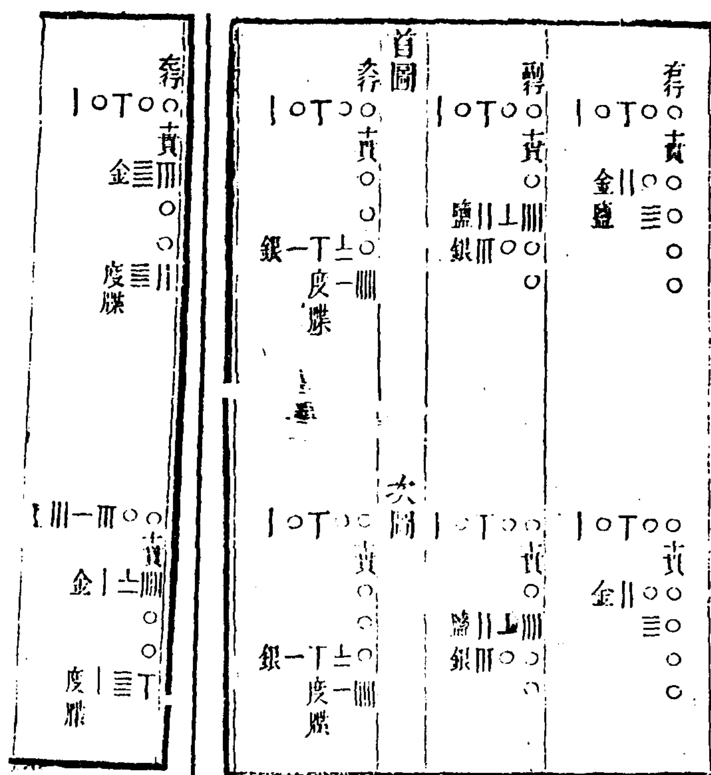


图 4.3.19

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{左} \quad \text{次(③)} \quad \text{副(②)} \quad \text{右} \\
\text{(i)} & \begin{array}{l} \\ \text{金} \\ \text{盐} \\ \text{银} \\ \text{度牒} \end{array} & \begin{bmatrix} 106\,000 & 106\,000 & 106\,000 & 106\,000 \\ 58\frac{1}{3} & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 264 & 40 \\ 0 & 1\,670 & 800 & 0 \\ 52 & 15 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{左}\times 3}
\end{array}
$$

草文说:"金带八铢,是三分之一两,乃以分母通乘左行诸数…为次图。"

$$
\text{(ii)} \quad \begin{bmatrix} 318\,000 & 106\,000 & 106\,000 & 106\,000 \\ 175 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 264 & 40 \\ 0 & 1\,670 & 800 & 0 \\ 156 & 15 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{右}\div 40]{②\div 8,\ ③\div 5}
$$

草文说:"验次图四行,皆可求等。副行约得八,约之。次行约得五,约之。右行行得四十,约之。…各得数,为定率图。"

$$
\text{(iii)} \quad \begin{bmatrix} 318\,000 & 21\,200 & 13\,250 & 2\,650 \\ 175 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 33 & 1 \\ 0 & 334 & 100 & 0 \\ 156 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[③\times 156]{\text{左}\times 3}
$$

草文说:"乃以定图次行之度牒三因左行。…,次以左下度牒一百五十六乘次行。…,得维图。"

$$
\text{(iv)} \quad \begin{bmatrix} 954\,500 & 3\,307\,200 & 13\,250 & 2\,650 \\ 525 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 33 & 1 \\ 0 & 52\,104 & 100 & 0 \\ 468 & 468 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{左}\div 3]{③-\text{左}}
$$

草文说："乃验维图左及次行之下，度牒等。当相减之…当以左之少积，减次之多积，…乃成音图。"

$$
\begin{array}{c}
\quad\quad 左 \quad\quad 次(③) \quad\quad 副(②) \quad 右 \\
(\mathrm{v})\begin{bmatrix}
318\,000 & 2\,353\,200 & 13\,250 & 2\,650 \\
175 & -525 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 33 & 1 \\
0 & 52\,104 & 100 & 0 \\
156 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}\xrightarrow{右\times 105}
\end{array}
$$

草文说："今视音次行之负金，当以右行之正金补之，而其数不等，先以右金五，约次金，…得一百五，以乘右行毕…，其副次左三行如音图，故乃成爻图。"

$$
(\mathrm{vi})\begin{bmatrix}
318\,000 & 2\,353\,200 & 13\,250 & 278\,250 \\
175 & -525 & 0 & 525 \\
0 & 0 & 33 & 105 \\
0 & 52\,104 & 100 & 0 \\
156 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}\xrightarrow[右\div 105]{③+右}
$$

草文说："今视爻图右行之金正，与次行之金负，适等。即用右行直加次行…而成政图。"

$$
(\mathrm{vii})\begin{bmatrix}
318\,000 & 2631\,450 & 13\,250 & 2\,650 \\
175 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 105 & 33 & 1 \\
0 & 52\,104 & 100 & 0 \\
156 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}\xrightarrow[③\times 11,\ ②\times 35]{\substack{(33,105)=3\\ 33\div 3=11\\ 105\div 3=35}}
$$

草文说："今视政图，从省，乃择其诸行本色，可求等，首金可、盐亦可，盖金多盐少，乃以政图副次两行盐数三十三与一百五求等，得三，故以三约三十三，得十一，以乘次行，又以三约一百五，得三十五，以乘副行毕…列成卜图。"

左　　次(③)　　副(②)　　右

$$(\text{viii})\begin{bmatrix}318\,000 & 28\,945\,950 & 463\,750 & 2\,650\\ 175 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 1\,155 & 1\,155 & 1\\ 0 & 573\,144 & 3\,500 & 0\\ 156 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{③-②}$$

草文说："乃视卜图副行积少，次行积多，即以副行求减次行…既毕…列为宫图。"

$$(\text{ix})\begin{bmatrix}318\,000 & 28\,482\,200 & 13\,250 & 2\,650\\ 175 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 33 & 1\\ 0 & 569\,644 & 100 & 0\\ 156 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{③\div 569\,644}$$

草文说："验宫图次行下，只有银…独一数以为法，次行积为实，实如法而一，得五十贯，为银一两价，而成干图。"

$$(\text{x})\begin{bmatrix}318\,000 & 50 & 13\,250 & 2\,650\\ 175 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 33 & 1\\ 0 & 1 & 100 & 0\\ 156 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{②-③\times 100}$$

草文说："乃以干图副行银一百两乘两价…以减干图副行之积…，讫…而成曜图。"

$$(\text{xi})\begin{bmatrix}318\,000 & 50 & 8\,250 & 2\,650\\ 175 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 33 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 156 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{②\div 33}$$

草文说："乃以曜图副行之积为盐实，以其下盐三十三袋为法

除之，得…盐一袋价，而成支图。”

$$
(\text{xii})\begin{bmatrix} 318\,000 & 50 & 250 & 2\,650 \\ 175 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 156 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{右}-②}
$$

草文说：“乃以支图右行盐一袋遍乘副行毕，其副积只得二百五十贯，次以副行直减右行毕，右积余二千四百贯，金五两、盐空，而成闰图。”

左　次（③）　副（②）　右

$$
(\text{xiii})\begin{bmatrix} 318\,000 & 50 & 250 & 2\,400 \\ 175 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 156 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{左}-(\text{右}\div 5)\times 175]{\text{右}\div 5}
$$

草文说：“乃以闰图右积二千四百贯为实，金五两为法，除之，得四百八十贯，为金一两，成定图。”

$$
(\text{xiv})\begin{bmatrix} 234\,000 & 50 & 250 & 480 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 156 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{左}\div 156}
$$

草文最后说：“今验定图左积…，以左下度牒一百五十六道为法，除之，得一千五百贯为一道价，以成终图。”

(xv)

	1500	50	250	480
金	0	0	0	1
盐	0	0	1	0
银	0	1	0	0
度牒	1	0	0	0

本例在矩阵变换过程中多处出现负数,例如音图次行金列为负,经过变换,终化政图次行金列为空,这在草文中已有交代,互乘相消。秦氏在得政图后说:“从省”(化简)。当出现有三处有最大公约数,他的选择原则是从小(约数)到大,在卜图中(2 631 450,13 250)=50,(52 104,100)=4,(105,33)=3,他挑选后者,是最佳选择。终图系数矩阵为单位矩阵(图 4.3.20 为书影)

图 4.3.20

第四章 不定分析

第一节 一次同余式组(大衍术)

《数书九章》把大衍类列于九类之首，四库本又把大衍术置大衍类最前列，起到提纲絜领作用，可见是术的重要意义。

一 数学原理

为叙述和读者阅读方便，现在先用现代数学语言整理与大衍术有关的数学命题，然后述其历史发展。下文以记号$(a,b,\cdots,c)$，$\{a, b, \cdots, c\}$分别记自然数a，b，…，c的最大公约数和最小公倍数。

最大公约数和最小公倍数

将a，b作欧几里得算法，运算

$$\frac{a}{b}=q_1+\frac{r_1}{b}\quad(0<r_1<b),$$

$$\frac{b}{r_1}=q_2+\frac{r_2}{r_1}\quad(0<r_2<r_1),$$

…………

$$\frac{r_{n-1}}{r_n}=q_{n+1}+\frac{r_{n+1}}{r_n}\quad(0<r_{n+1}<r_n)。$$

定理1(更相减损术) 如果上述运算中$r_{n+1}=0$，那么$r_n=$

$r_{n-1}=(r_{n-1},r_n)=\cdots=(r_1,b)=(a,b)$[①]

定理 2.1 当$(a,b)=1$，记连分数

$$q_1+\frac{1}{q_2+}\frac{1}{q_3+}\cdots\frac{1}{+q_n}=\frac{k_n}{j_n},$$

那么 ①$k_n=q_nk_{n-1}+k_{n-2}$，$k_0=1$，$k_1=q_1$，$k_{n+1}=a$；

②$j_n=q_nj_{n-1}+j_{n-2}$，$j_0=0$，$j_1=1$，$j_{n+1}=b$。

定理 2.2 $k_nj_{n-1}-k_{n-1}j_n=(-1)^n$。

定理 3.1 $(a,b,c,\cdots,d)=((a,b),\ c,\ \cdots,\ d)$。

定理 3.2 如果 $a=a_1g$，$b=b_1g$，…，$c=c_1g$，那么

$$(a,b,\cdots,c)=g(a_1,b_1,\cdots,c_1)。$$

定理 4 $\{a,\ b,\ c,\ \cdots,\ d\}=\{\{a,\ b\},\ c,\ \cdots,\ d\}$。

定理 5 (少广术)设有 n 个自然数 m_1，m_2，…，m_n。如果其中最大一个，不妨设是 m_n。取(m_i,m_n)以约简相应的 $m_i(i=1,2,\cdots,n)$。得到另一组自然数 p_1，p_2，…，p_{n-1}，1。如果其中最大一个是，不妨设为 p_{n-1}。取(p_i,p_{n-1})，约简相应的 $p_i(i=1,2,\cdots n-1)$，得到另一组自然数 q_1，q_2，…，q_{n-2}，1，1。反复这一手续，直至 n 个自然数全都既约为止，那么：

$$\{m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n\}=m_np_{n-1}q_{n-2}\cdots。$$[②]

定理 6.1 如 a，b 的素因数标准分解式为

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k},\ b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k},\ \alpha_i,\ \beta_i\geqslant 0,\ 那么$$

$$(a,b)=p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\cdots p_k^{\gamma_k},$$

$$\{a,\ b\}=p_1^{\delta_1}p_2^{\delta_2}\cdots p_k^{\delta_k},\ 其中\ r_i=\min(\alpha_i,\beta_i),\ \delta_i=\max(\alpha_i,\beta_i)$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k,\ 因此$$

---

① 当 $r_n=r_{n-2}-q_nr_{n-1}=0$ 时，自《九章算术》成书以来，我国数学界习惯于，也由于计算工具的原因，计算 $r_n=r_{n-2}-(q_n-1)r_{n-1}=r_{n-1}$。故称 r_n，r_{n-1}为等数，而改使 $r_{n+1}=r_n-r_{n-1}=0$。

② 详节见本《大系》第二卷第二编第二章第三节。

定理 6.2 $(a,\ b)\{a,\ b\}=ab$。

定理 7(秦九韶定理) 设有 n 个自然数 m_1, m_2, …, m_n。

定理 7.1 如果它们不两两互素，按照下面手续，求出各自定母 μ_1, μ_2, …, μ_n, 那么

① $\prod_{i=1}^{n}\mu_i=\{m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n\}$;

② $\mu_i \mid m_i$;

③ $(\mu_i,\mu_j)=1$, 其中 $1\leqslant i,\ j\leqslant n$。

在 m_1, m_2, $\cdots m_n$ 中取定一数，不妨说是 m_n, 又取 $(m_{n-1},\ m_n)=d_1$。如果 $\left(\frac{m_{n-1}}{d_1},\ m_n\right)=d_2=1$, 就把 $\frac{m_{n-1}}{d_1}$, m_n 作为各自的准定母。如果 $d_2>1$, 而 $\left(m_{n-1},\ \frac{m_n}{d_1}\right)=d_3=1$, 就把 m_{n-1}, $\frac{m_n}{d_1}$ 作为各自的准定母，如果 $d_2>1$, 又 $d_3>1$, 而 $\left(\frac{m_{n-1}}{d_3},\ \frac{m_n}{d_1}d_3\right)=d_4=1$, 就取 $\frac{m_{n-1}}{d_3}$, $\frac{m_n}{d_1}d_3$ 作为准定母。如果 $d_4>1$, 照同样手续继续运算下去。由于 m_{n-1}, m_n 是有限的数，一定存在 k 使 $\left(\frac{m_{n-1}}{d_3d_4\cdots d_k},\ \frac{m_n}{d_1}d_3d_4\cdots d_k\right)=1$, 就取 $\frac{m_{n-1}}{d_3d_4\cdots d_k}$, $\frac{m_n}{d_1}d_3d_4\cdots d_k$ 作为 m_{n-1}, m_n 的准定母 μ'_{n-1}, μ'_n。

使 μ'_n 继续依次与 m_{n-2}, m_{n-3}, …, m_2, m_1 进行上述同样运算，这些运算的结果记为 μ'_1, μ'_2, …, μ'_{n-1}, μ_n 其中第 n 个与其他各数都已互素，已是定母，其余都是准定母。

在 μ'_1, μ'_2, $\cdots\mu'_{n-1}$ 中取定一数，不妨取 μ'_{n-1}, 作上述同样运算，其结果记为 μ''_1, μ''_2, …, μ''_{n-2}, μ_{n-1}, μ_n。除末尾两数已是定母外，其余都是准定母。

关于 μ''_{n-2} 对 $\mu''_i(i=n-3,n-4,\cdots,2,1)$ 作上述同样运算。得 μ'''_1, μ'''_2, …, μ'''_{n-3}, μ_{n-2}, μ_{n-1}, μ_n 除去末尾三数已是定母外，其余都是准定母……，经过 $n-1$ 回运算，结果记为 μ_1, μ_2, …,

μ_{n-1}，μ_n。这就是 m_1，m_2，…，m_{n-1}，m_n 各自的定母。

在第四段大衍术今释中将进一步作出证明。

定理 7.2 如果它们不两两互素，且有公约数。设其最大公约数是 g：$m_1=gm'_1$，$m_2=gm'_2$，…，$m_n=gm'_n$，则把 m'_1，m'_2，…，m'_n 按定理 7.1 求出各自定母 μ_1，μ_2，…，μ_n。在其中任意取一定母，不妨设 μ_n，则 μ_1，μ_2，…，$g\mu_n$ 是所求 m_1，m_2，…，m_n 各自的定母。

定理 7.3(高均定理) 如果它们不两两互素，按照下面手续可以简便求出定母及其衍母。

把 m_1，m_2，…，m_{n-1}，m_n 自前而后(或自后而前)排成左列。右列首行记 m_n。按照"连环求等，约彼存此"法则，m_n 不变，m'_{n-1} 成为准定母。记入相应的左一列。右列第二行记 $m_nm'_{n-1}$。又按照连环求等、约彼存此法则对 $m_nm'_{n-1}$，m_{n-2}运算，m_{n-2}成为准定母 m'_{n-2}，记入左一列第三行。右列第三行记 $m_nm'_{n-1}m'_{n-2}$，后者又与 m_{n-3}作同一运算，又得准定母 m'_{n-3}。那么左一行依次是 m_n，m'_{n-1}，m'_{n-2}，…，m'_2，m'_1，依次作续等变换：约此乘彼，使两两互素，记在左二列，这就是所求定母。而右列末一数 $\prod_{i=1}^{n} m'_i$ 就是所求衍母。

左二列	左一列	左列	右列
μ_n	m_n	m_n	m_n
μ_{n-1}	m'_{n-1}	m_{n-1}	$m_nm'_{n-1}$
μ_{n-2}	m'_{n-2}	m_{n-2}	$m_nm'_{n-1}m'_{n-2}$
μ_{n-3}	m'_{n-3}	m_{n-3}	
⋮	⋮	⋮	
μ_2	m'_2	m_2	

续表

左二列	左一列	左列	右列
μ_1	m'_1	m_1	$m_n m'_{n-1} m'_{n-2} \cdots m'_2 m'_1 = \{m_n, m_{n-2}, m_{n-3}, \cdots, m_2, m_1\}$

定理 8(张丘建法则) 分数周期$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$，…，$\frac{e}{f}$的公共周期是$\frac{\{a, b, \cdots e\}}{(a,b,\cdots f)}$。

一次同余式

定理 9 $ax \equiv c \pmod b$有解的充分必要条件是$(a,b)|c$。

定理 10(大衍求一术)

$ax \equiv 1 \pmod b$，其中$(a,b)=1$的解是

$$x_0 = j_n = q_n j_{n-1} + j_{n-2}。$$

这里q_n是对$\frac{a}{b}$做欧几里得算法第n次商，相应的$r_n=1$，$r_{n+1}=0$，且n是奇数。[①]

从定理2.2得$k_{n+1}j_n - k_n j_{n+1} = 1$，又$(a,b)=1$，得$k_{n+1}=a$，$j_{n+1}=b$，易知命题为真。

定理 11.1 如果$ax \equiv 1 \pmod b$，而$a>b$，取$0<a_1<b$，而$a \equiv a_1 \pmod b$，那么$ax \equiv 1 \pmod b$与$a_1 x \equiv 1 \pmod b$等价。

定理 11.2 如果$ax \equiv 1 \pmod b$的解是x_0，那么$ax \equiv c \pmod b$的解是$x \equiv c x_0 \pmod b$

定理 12 当x除以$\frac{a}{b}$，有余数$\frac{c}{b}$，记为

$$x \equiv \frac{c}{b} \left(\bmod \frac{a}{b} \right)。$$

① 如果$r_m=1$，而m是偶数。可以调整，使$q_{m+1}=r_{m-1}-1$，那么$r_n=r_{m+1}=r_{m-1}-q_{m+1}r_m=1$；而$n$为奇数，这时$r_m$和$r_{m+1}$来说是等数。

此式与　$bx\equiv c(\mathrm{mod}\ a)$同解。

一次同余式组

定理 13　$\begin{cases}x\equiv r_1(\mathrm{mod}\ m_1),\\ x\equiv r_2(\mathrm{mod}\ m_2)\end{cases}$

有解的充分必要条件是$(m_1,m_2)\mid |r_1-r_2|$。

定理 14(孙子定理或中国剩余定理)[1]

如果$(m_i,m_j)=1$，$1\leqslant i$，$j\leqslant n$，$i\neq j$，那么

$$\begin{cases}x\equiv r_1(\mathrm{mod}\ m_1),\\ x\equiv r_2(\mathrm{mod}\ m_2),\\ \cdots\cdots\\ x\equiv r_n(\mathrm{mod}\ m_n)\end{cases}$$

的解是

$$x\equiv\sum_{i=1}^{n}M_iF_ir_i(\mathrm{mod}\ M)。$$

其中 $M=\prod_{i=1}^{n}m_i$，$M_i=\dfrac{M}{m_i}$，F_i 是同余式 $M_iF_i\equiv 1(\mathrm{mod}\ m_i)$的解。

定理 15. 1　如果 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_j^{\alpha_j}$是 m 的素因数标准分解式，那么同余式

$$x\equiv r(\mathrm{mod}\ m) \tag{1}$$

与同余式组

$$\begin{cases}x\equiv r(\mathrm{mod}\ p_1^{\alpha_1}),\\ x\equiv r(\mathrm{mod}\ p_2^{\alpha_2}),\\ \cdots\\ x\equiv r(\mathrm{mod}\ p_j^{\alpha_j})\end{cases} \tag{2}$$

等价。

设 x_0 是(1)的解，根据同余式的定义 $m\mid |x_0-r|$，因此 $p_i^{\alpha_i}\mid |x_0-r|(i=1,2,\cdots,j)$，反之亦然，因此命题为真。

---

① 《中国大百科全书》p. 668.

定理 15.2 如果 p^{α_1}，p^{α_2}中$\alpha_1>\alpha_2$，那么同余组

$$\begin{cases} x\equiv r_1(\mathrm{mod}\ p^{\alpha_1}), \\ x\equiv r_2(\mathrm{mod}\ p^{\alpha_2}) \end{cases}$$

与同余式 $x\equiv r_1(\mathrm{mod}\ p^{\alpha_1})$等价。

从定理 15.1 得证。

定理 16 如果$(m_i,m_j)=d$，不恒等于 1，$1\leqslant i$，$j\leqslant n$，$i\neq j$，

那么同余组
$$\begin{cases} x\equiv r_1\ (\mathrm{mod}\ m_1), \\ x\equiv r_2\ (\mathrm{mod}\ m_2), \\ \qquad\cdots \\ x\equiv r_n\ (\mathrm{mod}\ m_n) \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} x\equiv r_1\ (\mathrm{mod}\ \mu_1), \\ x\equiv r_2\ (\mathrm{mod}\ \mu_2), \\ \qquad\cdots \\ x\equiv r_n\ (\mathrm{mod}\ \mu_n) \end{cases}$$

等价，其中 μ_i 与 m_i 有以下关系，即 μ_i 是 m_i 的定母，

①$\prod_{i=1}^{n}\mu_i=\{m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n\}$；

②$\mu_i\mid m_i$；

③$(\mu_i,\mu_j)=1$。

从定理 15.1，15.2 可知命题为真。

定理 17(大衍总数术)

定理 17.1 定理 16 中同余式组的通解是

$$x=\sum_{i=1}^{n}M_iF_{i0}r_i(\mathrm{mod}\ M),$$

其中，$M_i=\dfrac{M}{\mu_i}$，F_{i0}是同余式 $M_iF_{i0}\equiv1(\mathrm{mod}\ \mu_i)$的解。

定理 17.2 定理 16 中同余式组的通解也是

$$x\equiv M_1F_{10}r_1+M_2F_{20}r_2+\cdots+\left(M_iF_{i0}\pm\frac{M}{(m_i,m_j)}\right)r_i+\cdots$$

$$\cdots+\left(M_iF_{j0}\mp\frac{M}{(m_i,m_j)}\right)r_j+\cdots+M_nF_nr_n(\bmod M)。$$

从定理 13，$(m_i,m_j)\mid|r_i-r_j|$，那么

$$\left(M_iF_{i0}\pm\frac{M}{(m_i,m_j)}\right)r_i+\left(M_jF_{j0}\mp\frac{M}{(m_i,m_j)}\right)r_j$$

$$=M_iF_{i0}r_i+M_jF_{j0}r_j\mp\frac{r_j-r_i}{(m_i,m_j)}M\equiv M_iF_{i0}r_i+M_jF_{j0}r_j(\bmod M)$$

定理 17.3(张敦仁定理)

$$x\equiv\sum_{i=1}^{n}M_iF_{i0}r_i(\bmod M)\text{与}$$

$$x\equiv\sum_{i=1}^{n}M_iF_{i0}r_i'(\bmod M)\text{等价}$$

其中 $$r_i'\equiv r_i(\bmod m_i)。$$

证明　因为　$\mu_i\mid m_i$，也就是说 $m_i=n_i\mu_i$，又

$r_i=r_i'+p_i\mu i=r_i'+p_in_i\mu_i$，其中 p_i，n_i 都是整数。

那么
$$\sum_{i=1}^{n}n_iF_ir_i'=\sum_{i=1}^{n}M_iF_i(r_i-p_in_i\mu_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}M_iF_ir_i-\sum_{i=1}^{n}p_in_iF_iM_i\mu_i$$
$$=\sum_{i=1}^{n}M_iF_ir_i-\sum_{i=1}^{n}p_in_iF_iM$$
$$=\sum_{i=1}^{n}M_iF_ir_i(\bmod M)。$$

定理 17.4(许莼舫定理)[①]

$x\equiv\sum_{i=1}^{n}M_iF_ir_i(\bmod M)$中如 r_1 为 $\min r_i(i=1,2,\cdots,n)$

① 证明参见第五编第二章第二节，四、许莼舫。

那么 $x\equiv r_1+\sum_{i=2}^{n}M_iF_i(r_i-r_1)(\mathrm{mod}\ M)$。

定理 18 $\sum M_iF_i\equiv 1(\mathrm{mod}\ M)$

我们知道

$$\begin{cases}M_iF_i\equiv 1,\ (\mathrm{mod}\ \mu_i),\\ M_jF_j\equiv 0,\ (\mathrm{mod}\ \mu_i)(i\neq j),\end{cases}$$

那么 $\sum_{i=1}^{n}M_iF_i\equiv 1(\mathrm{mod}\ \mu_i)$，$(i=1,2,\cdots,n)$

这等价于 $$\mu_i\Big|\sum_{i=1}^{n}M_iF_i-1。$$

又由于 $(\mu_i,\mu_j)=1$，$1\leqslant j\leqslant n$，$i\neq j$，那么

$$\sum_{i=1}^{n}M_iF_i=1(\mathrm{mod}\ \prod_{i=1}^{n}\mu_i)=1(\mathrm{mod}\ M)。$$

定理 19 （黄宗宪定理）[1]

对于定理 16 中的同余式组可以用代入法逐步获解，不妨设模数 $m_1>m_2>\cdots>m_{n-1}>m_n$。先解：

$$x\equiv r_1(\mathrm{mod}\ m_1)\equiv r_2(\mathrm{mod}\ m_2)$$

二者的解是 $x=r_1+\mu_1j_{n-1}(r_1'-r_2)(\mathrm{mod}\ \mu_1\mu_2)$ （＊）

其中 μ_1，μ_2 是 m_1，m_2 的定母，$r_1'\equiv r_1(\mathrm{mod}\ \mu_2)$，

j_{n-1}是 $\mu_1x\equiv-1(\mathrm{mod}\ \mu_2)$的解，而 $r_{n-1}=1$，$r_n=0$，n 是单数。

再把同余式（＊）与 $x\equiv r_3(\mathrm{mod}\ m_3)$联立，同法求解，照此运算，直至与 $x\equiv r_n(\mathrm{mod}\ m_n)$联立，所得结果就是所求通解。

二 大衍术历史回顾

远在先秦时期我国对求几个数的最大公约数和最小公倍数已有完整的认识和明确的算法。与西方不同的是，当时我国没有素

---

[1] 证明参见第五编第二章第一节，六、黄宗宪。

数概念，不把所求数分解为素因数幂，而直接参予运算，有其特色和长处。

更相减损术(定理1)与欧几里得《原本》卷11命题2同义，还有刘徽言简意赅的证明，这种算法对于大数、对于求几个数的最大公约数，长处尤为突出，举例说用此术：(1008,1260,882,1134)=(1008−882,1260−1134,882,1134−882)=(126,126,882−126×6,292−126)=(126,126,126,126)=126立刻得到等数，最大公约数。这种算法比分别把四个数分解为素因数，或逐次两两求最大公约数显然要简便得多。张德馨在所著《整数论》卷1(科学出版社,1956,p.53)介绍这种方法，并在序文中说：是他在德国柏林大学数学系听许尔(I. Schür,1875～1941)博士数论课时学来的。其实我国在二千多年前已熟谙其法。

少广术(定理5)求几个数的最小公倍数也有其特色和长处，举例说，要求几个单位分数之和，只需

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$$
$$=\left(\frac{7}{2}+\frac{7}{3}+\frac{7}{4}+\frac{7}{5}+\frac{7}{6}+1\right)\div 7$$
$$=\left(21+14+\frac{21}{2}+\frac{42}{5}+7+6\right)\div 7\div 6$$
$$=\left(105+70+\frac{105}{2}+42+35+30\right)\div 7\div 6\div 5$$
$$=(210+140+105+84+70+60)\div 7\div 6\div 5\div 2$$
$$=\frac{669}{420}=1\frac{249}{420}。$$

当时用算筹为工具，其优点更为显著。即使在今日小学教学中，仍不失为可以推荐的运算方法。

求几个周期的公共周期(定理8)最早出现在《孙子算经》和《张丘建算经》中，前者为整数，后者进而为分数，这是当时制订历法所必需，与此同时也牵涉到解同余式组问题。《孙子算经》卷

下物不知数题已具解题(一般情况)的雏形(定理14)。之所以称为孙子定理或中国剩余定理，是推崇他在时间上领先，而且以所附解法为线索就可以解同类问题①。但毕竟当时命题初成，远远谈不上完整，其主要缺陷在于：①对形如定理14的同余式组的解只凭猜测，无一般解法。②对一组同余式 $M_iF_i\equiv 1(\mathrm{mod}\ m_i)$的解法也未总结为一般形式。③模数 m_i 仅限于两两互素的正整数，未涉及一般情况，而后者恰是生活、生产中无法回避，特别是在制订历法时就要遇到以小数、分数以及不两两互素，甚至有公约数的模数。④未及深入讨论命题的证明，同余式、同余式组有解的条件等理论问题。

前人丰硕的奠基工作为秦九韶准备了良好条件，在《数书九章》所创大衍术是孙子数学论点的继续和发展，完整地解决了上述①至③三项，而且已接触到弥补第④项缺陷的契机。

大衍术及其有关问题因各种原因长期湮没，直至四库开馆，才逐渐为学者们重视。其中四库馆臣(1772)以及张敦仁(1754～1834)，焦循(1763～1820)，李锐(1773～1817)，骆腾凤(1770～1841)，时曰醇(1807～1880)，黄宗宪(活动在19世纪下半叶)的研究成果几乎已足以解释秦氏全部理论。

三 大衍术

本术共855字。以下分段、标点并编段号和添句码，照录原文。括弧内字系笔者添入，非秦氏原文。

第1段(模数分类)

1. 置诸问数，类名有四。一曰元数。谓尾位见单零者，本门揲蓍、酒息、斛粜、失米之类是也。二曰收数。谓尾位见分厘者，假令冬至三百六十五日二十五刻，欲与甲子六十日为一会，而求

① 参见第六编第四章第三节.

积日之类。三曰通数，谓通数各有分子、母者，本门问一会积年是也。四曰复数。谓尾位见十或百及千以上者，本门筑堤并急足之类是也。

第2段(求模数的定母)

第2.1段(元数)

2. 元数者，先以两两连环求等，约奇弗约偶，或约得五，而彼有十，乃约偶、而弗约奇。

3. 或元数俱偶，约毕，可存一位见偶。

4. 或皆约，而犹有类数存，姑置之，俟与其他约遍，而后乃与姑置者求等，约之。

5. 或诸数皆不可尽类，则以诸元数命曰复数，以复数格入之。

第2.2段(收数)

6. 收数者，乃命尾位分厘作单零。以进所问之数。定位讫，用元数格入之。

7. 或如意立数为母，收进分厘，以从所问，用通数格入之。

第2.3段(通数)

8. 通数者，置问数，通分纳子，互乘之，皆曰通数。

9. 求总等，不约一位，约众位，得各元法数，用元数格入之

10. 或诸分母数繁，就分从省通之者，皆不用原各母。仍求总等。存一位，约众位，亦得元法数，亦用元数格入之。

第2.4段(复数)

11. 复数者，问数尾位见十以上者。以诸数求总等，存一位，约众位，始得元数。

12. 两两连环求等，约奇弗约偶，复乘偶，或约偶。或约奇，复乘奇。

13. 或彼此可约，而犹有类数存者、又相减以求续等。以续等约彼，则必复乘此，乃得定数。

第2.5段(一般注意事项)

14. 所有元数、收数、通数三格，皆有复乘求定之理，悉可入之。

15. 求定数，勿使两位见偶。

16. 勿使见一太多。见一多，则借用繁。不欲借，则任得一。

第 3 段(大衍求一术)

第 3.1 段(衍母、衍数、奇数)

17. 以定母相乘为衍母。

18. 以各定母约衍母，各得衍数。或列各定母于右行，各立天元一为子于左行。以母互乘子，亦得衍数。

19. 诸衍数各满定母，去之。不满曰奇。

第 3.2 段(列式、求解)

20. 以奇与定用大衍求一入之，以求乘率。或奇得一者，便为乘率。

21. 大衍求一术云：置奇右上，定居右下。与天元一于左上。先以右上除右下，所得商数，与左上一相生[①]，入左下。然后乃以右行上下，以少除多，递互除之，所得商数随即递互累乘，归左行上下。须使右上末后奇一而止。乃验左上所得，以为乘率。

22. 或奇数已见单一者，便为乘率。

第 4 段(大衍总数术)

第 4.1 段(论用数)

23. 置各乘率，对乘衍数，得泛用。

24. 并泛，课衍母，多一者为正用。

25. 或泛多衍母倍数者，验元数，奇偶同类者，损其半倍。或三处同类，以三约衍母，于三处损之。各为正用数。

26. 或定母得一，而衍数同衍母者，为无用数，当验元数同类者、而正用至多处借之。以元数两位求等，以等约衍母为借数

① 焦循在其《天元一释》中说："相生即相乘"。

损有、以益其无，为正用。

27. 或数处无者，如意立数为母，约衍母、所得以如意子乘之，均借补之。

28. 或欲从省，勿借，任之为空，可也。

第 4.2 段(求答数)

29. 然后其余各乘正用、为各总。

30. 并总，满衍母去之，不满为所求率数。

四　今　释

现把大衍术中 30 句话，与大衍类中有关的 9 个算题、术文、草文、对照第一节数学原理中 19 组定理作今释，分六个部分。引文(秦氏原作)加引号、并用方括号记句码。

对于小数及分数模数的处理

整数论中所讨论的同余式都取整数模。由于实践需要，特别是为古代天文历法计算需要，在模数中很自然会出现小数或分数模数。

“收数，谓尾位见分厘者，假令冬至三百六十五日二十五刻…… [1]”可见秦氏所说收数，即今之小数。处理方法是：“收数者，乃命尾位分厘作单零，收进所问之数。定位讫用元数格入之。[6]”其处理方法即定理 12 的特殊情况，$b=10^n$。
相当于

$$x\equiv\frac{a}{10^n}\left(\mathrm{mod}\ \frac{b}{10^n}\right)$$

与

$$10^n\cdot x\equiv a(\mathrm{mod}\ b)$$

等价。
这在卷 2 第 5 题(余米推数)，据题意如以石为单位，设所求每箩容米 y 石，应列出

$$\begin{cases} y\equiv 0.001(\text{mod } 0.019), \\ y\equiv 0.014(\text{mod } 0.017), \\ y\equiv 0.001(\text{mod } 0.012)。\end{cases}$$

此题术文、草文改以合(0.001)为单位，改解同余式组

$$\begin{cases} x\equiv 1(\text{mod } 19), \\ x\equiv 14(\text{mod } 17), \\ x\equiv 1(\text{mod } 12)。\end{cases}$$

显然 $y=1\,000x$，x 以合为单位。

"通数，谓各有分子、母者 [1]"，所以通数即今称分数；处理办法是："置问数，通分纳子，互乘之，皆曰通数 [8]。"通分纳子指 $c+\frac{a}{b}=\frac{cb+a}{b}$，化带分数为假分数。此句处理办法就是定理 12。这在卷 3 第 3 题(治历演纪)就有典型应用，其中有一同余式据题设要求是

$$365\,\frac{4\,108}{16\,900}x\equiv 11\,\frac{7\,540}{16\,900}-1\,\frac{12\,769}{16\,900}\left(\text{mod } 29\,\frac{8\,907}{16\,900}\right)。$$

原题草文说："以置岁日(365)以日法(16 900)通之，得61 687 500，并斗定分(4 108)得6 172 608。""月朔$\left(1\,\frac{12\,769}{16\,900}\right)$以日法乘之，得29 669。为朔定骨数：岁骨 $11\,\frac{7\,540}{16\,900}$以乘日法得193 440为气定骨。以朔定骨减气定骨、余(163 771)为闰泛骨。""次以日法通朔策 29 日得490 100。增入朔余得499 067为朔率。"经过通分，上述分数模数的同余式已化为同解的整数模同余式

$$6\,172\,608x\equiv 193\,440-29\,669=163\,771(\text{mod } 499\,067)$$

从以上两例可见小数和分数模数都借助于定理 12 的处理方法化为整数模："用元数格入之"；而且遇到特殊情况，还可以借助于分数为过渡，化小数为整数，秦氏说："或如意立数为母，收进分厘，以从所问，用通数格入之 [7]。"

由此可知秦氏对定理 12 的认识是深刻的。

对于不两两互素整数模数的处理

不两两互素整数模数必须分为两类。其一，有公约数，因此有最大公约数。其二，无公约数。因此在模数分类中也有相应考虑，前者称为复数："谓尾位见十或百及千以上者。[1]，[5]" 事实上秦氏的理解，公约数不限于 10 的幂，已拓广到一般公约数，例如卷 1 第 3 题("推计土功")模数为 54，57，75，72，而第 2 卷第 5 题(积尺寻源)则为 130，120，110，100，60，50，25，20。公约数分别为 3，5。秦氏认为复数应按一定方法处理，化为元数格，即化为后者：然后"用元数格入之 [10]"

至于后者，即无公约数而不两两互素的模数，怎样化为两两互素的模，且满足前后两同余式组等价，即定理 16。秦氏深思熟虑，在无素数概念条件下作出能经受今日数论检验而无可指责的创作。

当整数模不两两互素时，直接把数据代入孙子定理(定理 14)，就会遇到困难，因为$(M_i,m_i)=d>1$，因此 $M_iF_i\equiv1 \pmod{m_i}$就不能满足定理 9 的要求，解题就受阻。但另一方面，这不等于说问题无解。肯定秦氏遇到过类似的麻烦。为解除和走出困境，秦氏在第 2. 3 段言简意赅地作出相当于定理 7. 1 的处理手续，使一组元数相当于 m_1，m_2，…，m_n 化为具备三个条件即① $\prod_{i=1}^{n}\mu_i=\{m_1, m_2, \cdots, m_n\}$，② $\mu_i|m_i$，③ $(\mu_i,\mu_j)=1$　$1\leqslant i$，$j\leqslant n$ 的相应定母 μ_1，μ_2，…，μ_n。他在第 2. 3 段中(还在其他各段)反复、明确地给出运算程序：求最大公约数，约简，反乘，…以获取这些定数。在没有素数概念条件下，他稳扎稳打、步步为营，重视每一个环节，每一环节所得准定数全都符合上述三个条件，致使全过程的结果也符合这三个条件。对元数 m_1，m_2，…，m_n 运算的具体步骤是：

(i)“先以两两连环求等，约奇弗约偶。[2]，[3]，[12]”前面一句话是说，取$(m_i, m_n)=d_1$，$i=1, 2, \cdots, n-1$，所以是“两两求等”从后续步骤可知：不但是“两两”，而且是“两两连环”，对具体工作的描摹，可谓周到、恰当。

后面一句话："奇"，"偶"两字应怎样理解？在本术 855 字中出现过多处同字异义以及同义异字现象。例如奇字作“单”解；作“同余”解，而“诸衍数各满定母，去之，不满曰奇。[19]”；也可以作“其余”解。又如偶字作“双”解；作具有公约数解；“求定数，勿使两位见偶。[15]”偶又通隅，[①] 作“一边”、“一旁”解。而具有公约数可以称为偶，也可以称为类，“或彼此可约，而犹有类数存者[13]。”我们理解奇为其余，隅为隅，那么后者是说：那d_1约其余的m_i，例如$\frac{m_{n-1}}{d_1}$，而不约取定在一旁(隅)的m_n，即以$\frac{m_{n-1}}{d_1}$，m_n作为准定数。

(ii)(i)的运算是有条件的。秦氏自注说：“如约得五，而彼有十。”一般说，只有在$\left(\frac{m_{n-1}}{d}, m_n\right)=1$，二者才是$m_{n-1}$，$m_n$的准定母[②]，当$\left(\frac{m_{n-1}}{d_1}, m_n\right)=d_2>1$时，秦氏指出：“乃约偶，而弗约奇。[2]”，即以$m_{n-1}$，$\frac{m_n}{d_1}$为准定母。当然必须$\left(m_{n-1}, \frac{m_n}{d_1}\right)=d_3=1$[③]

(iii)有可能$d_2>1$，同时$d_3>1$：“或皆约，而犹有类数存”有两种处理方案。

①“姑置之。俟与其他约遍，而后乃与姑置者求等，约之。

---

① 《汉语大词典》注释偶字第 15 条：“偶通隅。”

② 注意此时$\frac{m_{n-1}}{d_1}=\mu'_{n-1}$，$m_n=\mu'_n$已满足定母三条件。

③ 这种运算相对于(i)的正约，在草文中秦氏称为反约。

[4]” 这是说，搁一下，以后再处理。如果必须要处理，就：

②“或彼此可约，而犹有类数存者。又相减以求续等。以续等约彼，则必复乘此，乃得定数。[13]，[12]，[14]。”

这是说，在(ii)中 m_{n-1}，$\frac{m_n}{d_1}$之间有最大公约数 d_3(续等)>1，就取$\frac{m_{n-1}}{d_3}$(续等约彼)，$\frac{m_n}{d_1}d_3$(则必复乘此)作为 m_{n-1}，m_n 准定母。这种手续当 $\left(\frac{m_{n-1}}{d_3},\frac{m_n}{d_1}d_3\right)=d_4>1$，继续下去，直至 $\left(\frac{m_{n-1}}{d_3d_4\cdots d_n}\cdot\frac{m_n}{d_1}d_3d_4\cdots d_k\right)=1$ 止，就取$\frac{m_{n-1}}{d_3d_4\cdots d_k}$，$\frac{m_n}{d_1}d_3d_4\cdots d_k$ 作为二者的准定母 μ'_{n-1}，μ'_n。显然经过“约彼、乘此”，所得每两个准定母都符合作为定母的三个条件。就这样，使 μ'_n继续与 m_{n-2}，m_{n-3}，…，m_2，m_1进行同样运算，这些运算结果是 μ'_1，μ'_2，…，μ'_{n-1}，μ_n。μ_n不再参加运算，已是所求 m_n的定母。这些运算全体称为一变。当 μ'_{n-1}作为偶，μ_i，$i=1$，2，…$n-2$ 作为奇，运算的全体称为二变，每一变获得一个定母，经 $n-1$ 变得到定母的全部：μ_i ($i=1$，2，…，n) 在第二节范题分析第 8 题(“积尺寻源”)我们列表说明按定理 7.1 化元数为定母的具体过程，其中出现二次反约，未出现“约彼、乘此”运算。而在第 5 题(推计土功)我们也列表说明，按定理 7.2 所运算的全过程。其中(54,24)=6，而(9,24)=3>1，(54,4)=2>1，于是“约彼”24，而“复乘此”9，取 27，8 作为 54，24 的定数。

上面已把秦氏化元数为定母的运算法则在第一节数学原理中作为定理 7，并称为秦九韶定理，因为这是秦九韶的创造发明。元数 m_1，m_2，…，m_n 经过两两连环求等，又经步骤(i)正约，(ii)反约，或(iii)约彼乘此，凡 $n-1$ 变得到 n 个定母 μ_1，μ_2，…，μ_n。它们是符合定理 7.1 所说的三个条件，首先在繁复的步骤中，所有准定母，我们记其中一对为 υ_h，υ_k，自始至终

$$v_h \mid m_h, \quad v_k \mid m_k,$$

$$(v_h, v_k) = 1。$$

因此所有的 $\mu_i \mid m_i$，$(\mu_i, \mu_j) = 1$。这就是："求定数，勿使两位见偶。[15]"

此外当第一变运算结束，获得准定母 μ'_1，μ'_2，…，μ'_n 由于所有 $m_i (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 是与取定的 m_n 两两连环求等及(i)～(iii)三项运算，μ'_i 之间公约数情况还很复杂不得而知，而(μ'_i, μ'_n)则已做到处处是 1，即互素。因此，μ'_n 有其特殊性，这就是：

$$\{\mu'_1, \mu'_2, \cdots, \mu'_{n-1}, \mu'_n\} = \{\mu'_1, \mu'_2, \cdots, \mu'_{n-1}\} \mu'_n。$$

从第二变开始，它不再参予运算，我们就记 μ'_n 为 μ_n，它已由准定母，上升为定母。另一方面从定理 4.1 在众多的第一变运算步骤，无非是两两求最小公倍数，因此

$$\{m_1, m_2, \cdots, m_n\} = \{m_1, m_2, \cdots, \{m_{n-1}, m_n\}\} = \cdots = \{\mu'_1, \mu'_2, \cdots, \mu'_{n-1}, \mu'_n\} = \{\mu'_1, \mu'_2, \cdots, \mu'_{n-1}\} \mu'_n = \{\mu'_1, \mu'_2, \cdots, \mu'_{n-1}\} \mu_n。$$

同样的理由，在第二变结束时

$$\{\mu'_1, \mu'_2, \cdots, \mu'_{n-1}\} = \{\mu''_1, \mu''_2, \cdots, \mu''_{n-1}\} = \{\mu''_1, \mu''_2, \cdots, \mu''_{n-2}\} \mu''_{n-1}。$$

我们记 μ''_{n-1}为 μ_{n-1}，已成为定母，不再参予第三变及以后的运算……。综合说

$$\{m_1, m_2, \cdots, m_n\} = \{\mu'_1, \mu'_2, \cdots \mu'_{n-1}\} \mu_n = \{\mu''_1, \mu''_2, \cdots, \mu''_{n-2}\} \mu_{n-1} \mu_n = \cdots = \prod_{i=1}^{n} \mu_i。$$

至于有公约数的不两两互素模数，即复数，秦氏认为应按一定方法处理：化为元数格后，才可以借助于定理 7.1 运算。他提出的方法是："以诸数求总等，存一位，约众位，始得元数。[12]，[9]，[10]" 这相当于说如果$(m_1, m_2, \cdots, m_n) = g$，又 $m_1 = gm'_1$，$m_2 = gm'_2$，…，$m_n = gm'_n$ 那么，不妨存第一位，

$$\{m_1, m_2, \cdots, m_n\} = \{gm'_1, m'_2, \cdots, m'_n\}。$$

这一处理方案是谬误的，将在第二节范题分析第2题“程行计地”，第4题“程行计及”，第5题“推计土功”中举出反例，四库馆臣对此也很有见地，在“推计土功”中按语说：“等数可以度尽四数，必先求总等，约之，然后可以为元数。”这说明复数必须区别于元数，在“程行相及”中按语对秦氏复数化元数的方法批评说：“按复数求元数，用总等法，尚属未密。”按语还提出正确的修正方案：“今少为变通，凡复数皆见十者，先以十为总等，遍约之(百千万同)为元数，俟连环求等毕，复以总等乘一数，然后再求续等，以得定数。”如果把十拓广为一般的最大公约数，馆臣这一修正方案就是定理7.2，以后将在第二节范题分析中有关题中作具体应用。

解一次同余式

对于形如

$$ax \equiv 1 \pmod b \tag{1}$$

的同余式，$(a,b)=1$，秦氏首创大衍求一术，提出一般解法，井然有序。他称a为衍数，b为定母，并规定：“诸衍数各满定母，去之，不满曰奇。[19]。”这就是定理11，当(1)中$a<b$时，就称a为奇数，他说：“以奇与定用大衍求一入之，以求乘率”，即用大衍求一术求解，他称所得解为“乘率”，接着他指出其特殊情况：“或奇得一者，便为乘率 [20]，[22]”即，当$a=1$，$x \equiv 1 \pmod b$，在第 [21] 句他系统地讲述大衍求一术算法：叙述非常简炼，我们借助于卷1“蓍卦发微”，卷3“治历演纪”两题对有关一次同余式的求解草文及笔写原始记录，可以如实复原此术真谛，其程序为：

(i)	
$j_1=1$	a
	b

(ii)	
j_1	a
j_2	r_2
	q_2

(iii)	
	q_3
j_3	r_3
j_2	r_2

(iv)	
j_3	r_3……
j_4	r_4
	q_4

(v)	
	q_n
j_n	$r_n=1$
j_{n-1}	r_{n-1}

(i)"置奇(a)右上，定(b)居下，立天元一(j_1 恒等于 1)，入左上"。

(ii)"先以右上除右下($b\div a$)，所得商数(q_2)与左上一相生(乘，q_2，$j_1=j_2$)，入左下"。

(iii)"然后乃以行右上(a)、下(r_2)，以少除(去)多，递互除之($r_3=a_1-q_3r_2$)，所得商数(q_3)，随即递互累乘($q_3q_2+j_1=j_3$)，归左行上(j_3)下(j_2)。

(iv)重复程序(iii)，例如

$$r_4=r_2-q_4r_3,\text{ 而 } q_4j_3+j_2=j_4。$$

……

(n)运算结束，秦氏提出有关键意义的一着："须使右上末后奇(余下)一($r_n=1$)而止，乃验左上所得，以为乘率(j_n)"。

秦氏所拟程序得力于更相减损术，在《九章算术·方田》约分术已有完整介绍，但当时仅限以求两数的最大公约数(定理 1)，秦九韶借用这一传统工具以解一次同余式是可以理解的。他所拟上述程序的科学性可以接受定理 10 的检验，而不爽毫发。特别是在运算过程中他安排：把双数号余数记在右下(如 $r_2,r_4,\cdots,r_{2m}$)，而把单数号余数(如 $r_3,r_5,\cdots,r_{2m+1}$)记在右上，他所说"右上末奇一而止"，正是说：$r_n=1$，$r_{n+1}=0$，且 n 是奇数，满足这三条件的 j_n，才是(1)的解。

解一次同余式组

对定理 14 的数学内容，秦氏思路清晰，较《孙子算经》物不知数题解就事论事地仅就余数二、三、二，互素模三、五、七解题，显然已有质的飞跃，在大衍总数术以及散见各题的术文、草

文可以看到他在解一次同余式组方面的能力，与现代大学用整数论教科书讲授系统并无差异①。他的解题程序是：

(i)当一组元数 m_i，化为 $\mu_i(i=1,2,\cdots,n)$之后，“以定母相乘为衍母。[17]” 这是说 $M=\prod_{i=1}^{n}\mu_i$。

(ii) “以各定母约衍母，各得衍数。[18]” $M_i=\frac{M}{\mu_i}$。

(iii)对 M_i 作同余处理，即：“诸衍数各满定母去之”不满曰奇。[19]”，使 $0\leqslant M'_i<\mu_i$ 而 $M_i\equiv M'_i(\bmod\ \mu_i)$，然后“以奇与定用大衍求一入之，以求乘率。[20]” 这就是用大衍求一术解 n 个同余式：$M'_iF_i\equiv1(\bmod\ \mu_i)$，设所求解为 $F_{i,0}$。

(iv) “置各乘率，对乘衍数，得泛用。[23]”，求出 $M_iF_{i,0}$。

(v) “然后其余(r_i)各乘正用为各总 [29]”，求出 $M_iF_{i,0}r_i$。

(vi) “并总，满衍母去之，不满为所求率数。[30]” 所求数是

$$x=\sum_{i=1}^{n}M_iF_{i,0}r_i(\bmod\ M)。$$

显然这就是定理 17.1。

对某些理论问题的探讨

秦氏不只满足于能够完整解各种模数的一次同余式组而且还在第 4.1 段探讨有关理论问题。

正用

在所求得各泛用 $M_iF_{i,0}$ [23] 中，秦氏定义：“并泛，课(比较)衍母(M)，多一者为正用。[24]。” 就是说

$$\sum_{i=1}^{n}M_iF_{i,0}\equiv1(\bmod\ M),$$

其中 $\sum_{i=1}^{n}M_iF_{i,0}=M+1$ 时，所有 $M_iF_{i,0}$才称为正用。我们列表

① 张德馨. 整数论第一册. 北京：科学出版社，1957

说明在大衍类九题中满足正用条件的只有卷 1 第 5 题卷 2 第 1 题，现记泛用之和为 $\sum_{i=1}^{n} M_i F_{i,0} = qM + 1$。

表 4.4.1

卷	题	题名	M	$\sum_{i=1}^{n} M_i F_{i,0}$	q	秦氏处理方法
1	1	蓍卦发微	12	37	3	反而加 M 后，取为正用
	2	古历会积	2 087 476 800	4 174 953 601	2	损泛用为正用
	3	推计土功	102 600	205 201	2	不满足定义，仍取为正用
	4	推库额钱	27 720	55 441	2	同上
	5	分粜推原	246 510	246 511	1	满足定义，取为正用
2	1	程行计地	3 000	3 001	1	满足定义，取为正用
	2	程行相及	3 000	6 001	2	$M_i - \frac{M}{3}(i=1,2,3)$
	3	积尺寻源	85 800	171 601	2	不满足定义，仍取为正用
	4	余米推数	3 876	7 753	2	同上

从表 4.4.1 事实，说明秦氏自己也不重视履行正用的定义，可有可无，好些题把泛用径作为正用。

在 [24] 说："并泛，课衍母，多一者为正用，" 因为秦氏觉察 $\sum M_i F_{i,0} = M + 1$，有时 $\sum M_i F_{i,0} = 2M + 1$，有时 $\sum M_i F_{i,0} = 3M + 1$，也就是说 $\sum M_i F_{i,0} \equiv 1 \pmod{M}$，才提出和为 $M+1$ 的称为正用。

$\sum_{i=1}^{n} M_i F_{i,0} \equiv 1 \pmod{M}$ 是真实的，这就是定理 18，我们已给证

明，或者说 $$\sum_{i=1}^{n} M_iF_{i,0}+qM=1。$$

当 $q\neq1$，怎样调整泛用为正用，秦氏有具体措施，我们将在下一个问题中讨论。

借用(对同余式组有解条件的认识)

为解决解题中的实际困难，秦氏把不两两互素的模数化为定母，使同余式组顺利得解，但是在元数中适当约去一些因数后，有时元数被约简到1，即定母为1衍数等于衍母，秦氏称为空位，对此他放心不下。他认为："或定母得一，而衍数同衍母者，为无用数。当验元数同类者，而正用至多处借之：以元数两位求等，以等约衍母为借数，损有，以益其无；为正用。[26]"这里的正用也包括泛用，这一段命题相当于定理17.2，这是说，当出现定母为一的情况，就失落一个同余式，我们举例说，如 $\mu_i=1$，秦氏意是在用数 $M_1F_{1,0}$，$M_2F_{2,0}$，$M_{i-1}F_{i-1,0}$，$M_{i+1}F_{i+1,0}\cdots$，$M_nF_{n,0}$中找最大一个，如为 $M_jF_{j,0}$，那么计算 $\frac{M}{(m_i,m_j)}$，就取 $\left(M_j-\frac{M}{(m_i,m_j)}\right)F_{j,0}$，$\left(M_i+\frac{M}{(m_i,m_j)}\right)F_{i,0}$分别为 M_j，M_i 新的正用，应当指出，从此可以说明秦氏熟谙定理13，即对所有 $1\leqslant i,j\leqslant n$，$(m_i,m_j)\ |r_2-r_1|$，正因为如此所以才满足新、旧正用与余数对乘，并不影响关于 M 的同余 $\left(M_jF_{j,0}-\frac{M}{(m_j,m_i)}\right)r_j+\left(M_iF_{i,0}+\frac{M}{(m_j,m_i)}\right)r_i=M_jF_{j,0}r_j+M_iF_{i,0}r_i+\frac{M}{(m_i,m_j)}(r_i-r_j)=M_jF_{j,0}r_j+M_iF_{i,0}r_i \pmod M$在他所拟与同余式组有关十个问题中除个别(如卷1第2题)外，全部满足这个条件，同样说明这一事实。

某些值得商榷的命题

为了把泛用调整为正用，秦氏采用"或泛多衍母倍数者，验

元数，奇偶同类者，损其半倍，或三处同类者，以三约衍母，于三处损之，各为正用数。[25]”这是说，当发现

$$\sum_{i=1}^{n} M_i F_{i,0} = qM + 1。$$

当 $q=2$ 时，就找 i，j，当 $(m_i, m_j)=d>1$ 时，就取 $M_iF_{i,0}-\frac{M}{2}$，$M_jF_{j,0}-\frac{M}{2}$ 作为 $M_iF_{i,0}$，$M_jF_{j,0}$ 新的用数，由于经过如此调整，泛母已符合正用的定义，在卷 1 第 2 题，他确实是这样运算的。但这样做，一般是谬误的，只要 r_i，r_j 中有单数，2 不能整除 $|r_i-r_j|$ 那么同余式组的解就不真。

秦氏又认为当 $q=3$ 时，如出现 i，j，k 三者有公约数，就取 $M_iF_{i,0}-\frac{M}{3}$，$M_jF_{j,0}-\frac{M}{3}$，$M_kF_{k,0}-\frac{M}{3}$ 作为三者的新用数，虽然正用的定义是满足了，但同余式的解一般不真。清代学者在卷 2 第 2 题有关计算中就提出批评意见，将在范题分析中详述。

当定母为一时，此时同余式已成为恒等式，只要保留定母不是一的同余式，求解。由定理 17.1 保证，同样是原同余式组的解，秦氏的借用设想：并无理论上的过失，但是避轻就重，自找麻烦，是治数学大忌。清代学者对此颇有微词。其实秦氏在求定母时已打过预防针，“勿使见一太多，见一多，则借用繁。[16]”也不坚持要借。最后，他也正确地打了退堂鼓：“或欲从省，勿借，任之为空，可也。[16]，[28]。”

还需指出，秦氏所说：“或数处无者(空位)，如意立数为母，约衍母，所得以如意子乘之，均借补之。[27]”这种做法显然也是谬误的。

以上已把大衍总数术 4 段 30 句话都作了今释，在范题分析中再据具体问题进一步阐述。

五　大衍总数术算法程序

从大衍术可以明确地给出运算流程，脉络清晰。以下分为(i)～(viii)八个步骤，在下两节范题分析中就遵此，用现代数学语言解释。

清代学者时曰醇《求一术指》弁言中对秦氏大衍总数术有较透彻的理解，对算法全过程拟有求一歌诀，说法深合算法本旨，我们加注步骤序号，以为印证，歌诀云：

(i)列全数为泛母。

(ii)约泛母为定母，定母连乘为衍母。

(iii)定母各除得衍数。

(iv)衍数满定母去之，为奇数。

(v)奇数除定母，定余除奇数，奇余、定余、互除毕，凡几除数终奇一。天元除数用连乘，递加前数为乘率。

(vi)乘率乘衍数，所得为用数。

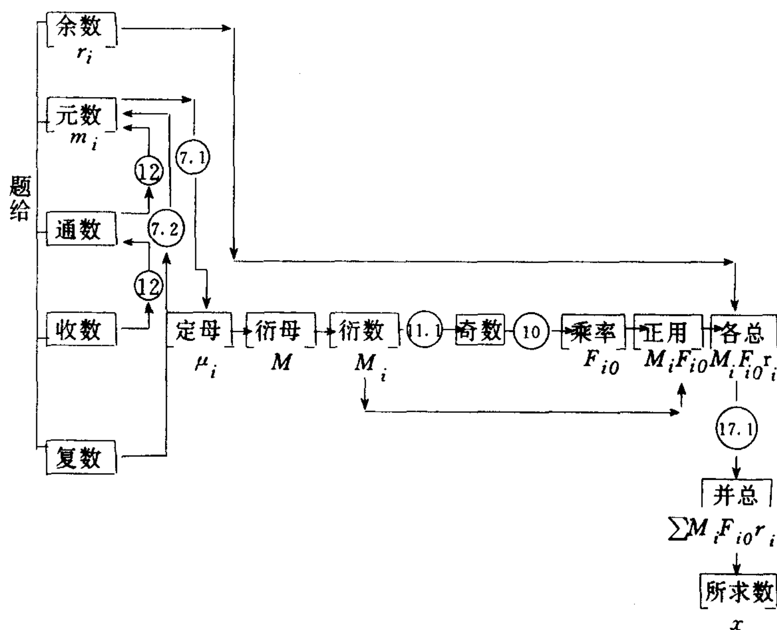
(vii)用数乘賸数，所得为各总。[①]

(viii)各总并之为总数，满衍母去之，得求数。

我们作表4.4.2以明此程序，并加注第一段数学原理所对应的定理。

① 原著为“总数”，据意改。

表 4.4.2



解题步骤

(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(vii)
列出同余式组	化元数为定母	求衍数	列出同余式	求乘率	求用数	求各总	并总得所求数

第二节 一次同余式组(大衍类范题分析上)

据第一节秦氏对一次同余式组的理论我们将就《数书九章》大衍类中九个问题及其解法作系统介绍、分析和讨论。按各问题难易、简繁为序，给出参考译文、忠实于原著解法的现代数学语言解释和述评。为节约篇幅，但另一方面使读者能品尝秦氏原书著

原汁原味，少数题及解还附原著书影：

1. **余米推数**

〇餘米推數

問有米鋪訴被盜去米一般三籮皆適滿不記細數今左壁籮剩一合中間籮剩一升四合右壁籮剩一合後獲賊係甲乙丙三名甲稱當夜摸得馬杓在左壁籮滿舀入布袋乙稱踢着木屐在中籮舀入袋丙稱摸得漆椀在右邊籮舀入袋將歸食用日久不知數索到三器馬杓滿容一升九合木屐容一升七合漆椀容一升二合欲知所失米數計賊結斷三盜各幾何

图 4.4.1a

原著问题见书影(图 4.4.1)，参考译文：

一米铺失窃，告官：原来一样大小的三个箩筐，装满着米。被

列右行具圖如后

(i) 定數　右行

(ii) 衍數　左行

各滿定母去衍數得奇數甲得一十四乙得七丙得一十一

定母

(iv) 奇數

各以奇定用大衍求一各得乘率甲得一十五乙得五丙得一十一各爲乘率列右行對寄左行衍數具圖如后

(v) 乘率　衍數

(vi) 用數　右行

餘米　左行

旣得用數始驗問題三籮剩米列左行對三人所用以兩行對乘之甲得三千六十乙得一萬五千九百六十丙得三千五百五十三

(vii)

(viii)

图 4.4.1b

窃后左箩余米 1 合，中箩余 1 升 4 合，右箩余 1 合。后来甲乙丙三贼被捉拿归案。甲贼供称，当夜摸得马杓，在左箩舀米。乙供，用木鞋在中箩舀米，丙供，拿漆碗在右箩舀米。三贼回家后，已将所窃脏米吃完，日久忘确数。官验现场三器，马杓容 1 升 9 合，木鞋 1 升 7 合，漆碗 1 升 2 合。问：三贼各窃米多少？答数：共失米 9 石 5 斗 6 升 3 合；甲窃米 3 石 1 斗 9 升 2 合，乙、丙各 3 石 1 斗 7 升 9 合，3 合 1 斗 9 升 2 合(卷 2 第 4 题)。

解法：

以下将按照第一节对大衍术所作算法程序流程步骤介绍原著解法(以下九题同此)图 4.4.1*b* 为原著筹算图式。(其上端的罗马数字系笔者所加)

(i)设三罗筐各含米为 x 合，据题意立出同余式组

$$\begin{cases} x\equiv 1 \pmod{19}; \\ x\equiv 14 \pmod{17}, \\ x\equiv 1 \pmod{12}. \end{cases}$$

本题三模数两两互素，毋须“连环求等”，求出衍毋 $=19\times 17\times 12$

$=3\ 876$。迳可写出独立三同余式

(iii)　　$12\times17F_1\equiv1(\text{mod } 19)$，

$19\times12F_2\equiv1(\text{mod } 17)$，

$19\times17F_3\equiv1(\text{mod } 12)$。

由于三同余式分别有系数 $12\times17=204$，$19\times12=228$，$19\times17=323$ 分别减去各自元数的倍数，得

(iv)　　$14F_1\equiv1(\text{mod } 19)$，

$7F_2\equiv1(\text{mod } 17)$，

$11F_3\equiv1(\text{mod } 12)$。

用大衍求一术分别解这三个同余式，得各自乘率

(v)$F_1=15$，$F_2=5$，$F_3=11$[①]。分别计算泛用

(vi)$204\times15=3\ 060$，$228\times5=1\ 140$，$323\times11=3\ 553$再求各总

(vii)$204\times15\times1=3\ 060$，$228\times5\times14=15\ 960$，$323\times11\times1=3\ 553$。

(viii)并总：$3\ 060+15\ 960+3\ 553=22\ 573$。在步骤(i)已求出衍母是3 876，所求数 $x=22\ 573\equiv3\ 193$[②] $(\text{mod } 3\ 876)$。再从现场各米箩中余米，做减法运算，就得各贼实窃米数。

经验算，本题所有数据全准确无误，三个模数两两互素就不存在同余式组无解的问题。本题为全书模数两两互素孤例，与《孙子算经》卷下第 26 题三三数之题最为接近。如用孙子口吻，本题实在就是：

“今有物不知数，十九、十九数之，剩一；十七、十七数之，剩十四；十二、十二数之，剩一。问：物几何？”但是秦氏迈出可喜而难能的一步：孙子有答却缺少步骤(iv)。秦氏却穷根究底，作

---

① 为排印方便，我们简记 $F_{i,0}$为 F_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 下文同此

② 答数都取最小正数，以下九题同。

出完整解法。当《数书九章》在清中叶被发现后，维杨焦循在《天元一释》卷下最先指出："循按大衍之术即《孙子算经》三三五五七七之术也。此术《九章》所无，而见于《孙子》。今则妇人孺子或以为戏。《孙子》虽详其术，而秦氏则阐其微而畅发之。其三三置七十，则大衍求一术也。"

本题泛用之和$\sum_{i=1}^{3}M_iF_i=3\ 060+1\ 140+3\ 553=2M+1=2\times 3\ 876+1$。与总数术所论："置各乘率，对乘衍数，得泛用并泛，课衍母，多一者为正用"相左。而秦氏在草文中仍称三泛用为正用。可见张敦仁对求正用的看法："废而不用"，是明智之举[①]。

作为数学专著的《数书九章》理应由浅入深，从易而难。秦氏书却把最简易的"余米推数"题放在第二卷之末，而把最最隐晦的"蓍卦发微"题作为开卷首题，使人望而却步。这对启迪后学、循循善诱的中国传统教育思想扞格不入。秦氏为什么如此安排，令人费解。

2. 分粜推原

问：有上农三人，力田所收之米，系用足斗[②]均分。各往他处出粜。甲粜与本郡官场，余三斗二升。乙粜与安吉乡民，余七斗。丙粜与平江[③]揽户[④]，余三斗。欲知共米及三人所分各粜石数几何？

（答数：共米738石，三人各246石。甲粜折合官斛[⑤]296石，乙

---

① 参见第五编第二章第一节有关论述。

② 足斗，国家标准量器。

③ 平江，今江苏苏州市。

④ 揽户，南宋特殊商人，见第三编第三章："在《数书九章》所见南宋社会。"

⑤ 官斛，各地地方政府自己规定的量器。参见章节同③，在本题术文中还给出三地量器一斛折合国家。

粜折合安吉斛 223 石，丙粜折合平江斛 182 石[①]，卷 2 第 1 题）

参考译文：有富农三人用国家标准量器平均分配劳动所得米粮，然后分赴三地出售。甲售给本县官府粮站，按官斛量米，余米 3 斗 2 升。乙售给安吉乡民，按安吉斛量米，余 7 斗。丙售给平江揽户，按平江斛量米，余 3 斗。问：他们共有多少米？三人各分得多少？如用三地不同量器折算各粜出多少米？

解法：

(i)设每人分得米粮 x 升，据题意列出同余式组

$$\begin{cases} x\equiv 32 \pmod{83}, \\ x\equiv 70 \pmod{110}, \\ x\equiv 30 \pmod{135}. \end{cases}$$

(ii)对于三个元数 83，110，135 因不两两互素，秦氏用连环求等求出各自的定母，其运算步骤相当于说

83　　83

110 ─┐② 110

135 ─┘　27

求得各自定母为 83，110，27，并计算衍母为246 510。

(iii)求出衍数 $27\times110=2\,910$，$83\times27=2\,241$，$83\times110=9\,130$。

(iv)列出三个同余式

$2\,970F_1\equiv1 \pmod{83}$，$2\,241F_2\equiv1 \pmod{110}$，$9\,130F_3\equiv1 \pmod{27}$，化简为 $65F_1\equiv1 \pmod{83}$，$41F_2\equiv1 \pmod{110}$，$4F_3\equiv1 \pmod{27}$。

(v)运用大衍求一术求得乘率 $F_1=23$，$F_2=51$，$F_3=7$，原著

---

① 标准量器分别为：官斛 8 斗 3 升、安吉斛 1 石 1 斗、平江斛 1 石 3 斗 5 升。

② 草文说："连环求等。其安吉率一百一十与平江率一百三十五，求等，得五，以约平江率，得二十七…各得定数(母)"

草文中未列求乘率过程。

(vi)求相应用数2 970×23＝68 310，2 241×51＝114 291，9 130×7＝63 910。

(vii)各总2 970×23×32＝2 185 920，2 241×51×70＝8 000 370，9 130×7×30＝1 917 300。

(viii)并总得12 103 590，所求

$$x\equiv 12\ 103\ 590\equiv 24\ 600 \pmod{246\ 510}。$$

至此，秦氏再计算各人应得数，并分别折成三地地方量器石数。

南宋社会不稳定，经济尤其紊乱，各地度量衡制度尤甚。秦九韶以此社会背景编造算题，也是入情入理的。这一记录：在方圆不足千里的江浙三县，量器大小相差竟如此之多。

本题三元数不两两互素。秦氏对 110，135 二元数，视 110 为偶，135 为奇，因此取 110，27 为定数。本题元数(110,135)＝5，而相应余数 70，30。(110,135)|70－30，所以本题有解。此外三泛用之和68 310＋114 291＋63 910＝246 511＝M＋1，符合正用定义，秦氏在草文中迳称用数。

3. 程行计地

问：军师获捷，当早点[①] 差急足三名，往都下节节走报。其甲于前数日申末到。乙后数日未正到。丙于今日辰末到。据供：甲日行三百里，乙日行二百四十里，丙日行一百八十里。问：自军前至都里数及三人各行日数几何？

(答数：前线到京城3 300里，甲行 11 日，乙行 13 日 4.5 时辰，丙行 18 日 2 时辰。卷 2 第 2 题)

参考译文：前线部队打了胜仗。在清晨点名时派遣三名快速通信员到京城接力报捷。已知甲通信员于前几日申末(相当于现在下午 5 时)到达。乙于后几日未正(下午 2 时)到达，丙于今天辰末

① 早点，早点名，于一日的开始(卯初)进行。

(9时)到达。又已知甲日行300里，乙240里，丙180里。问：前线到京城有多远？三人各行几日？

解法：

本题以三通信员传递捷报：同一时刻出发，各各行速不一，到达目的地时间不一。从已知三人最后一日不及一日的分数倍，求解前线与京城的距离。显然这是《九章算术·均输》行程问题的深入。

我国古代每日等分12个时辰：每一时辰又等分为二，中点称为正，始时为初，终了为末。古人“日出而作，日入而息”。白天的工作时间规定为6个时辰：每日从卯初(即丑末)上班，申末下班。黑夜从申末(即酉初)开始到次日丑末止，也含6时辰。部队早操、收操，京城晨钟、暮鼓都以此为准。现列(表4.4.3)如下，今古可以对照。

表4.4.3　古今时间对照

日夜	白天													黑夜										
小时(正)	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4
时辰	寅末(卯初)	卯正	卯末(辰初)	辰正	辰末(巳初)	巳正	巳末(午初)	午正	午末(未初)	未正	未末(申初)	申正	申末(酉初)	酉正	酉末(戌初)	戌正	戌末(亥初)	亥正	亥末(子初)	子正	子末(丑初)	丑正	丑末(寅初)	寅正
已过时辰	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11	

(i)据题意如设前线到京师距离为x里，列出同余式组

$$\begin{cases} x\equiv 0 \pmod{300}, \\ x\equiv 180 \pmod{240}, \\ x\equiv 60 \pmod{180}, \end{cases}$$

其中 180，60 分别是乙、丙最后一日行路数：$240\times\frac{3}{4}$，$180\times\frac{2}{6}$。

(ii)同余式组中三个元数有最大公约数(300,240,180)＝60。秦氏认为这应入复数格："存甲三百，乃约乙二百四十，得四。次约丙一百八十，得三。各为元数，连环求等。"相当于作如下运算求出定母。

甲	300	100	100	25
乙	4	4	4	16
丙	3	3×3	3×3＝9	

定母为 25，16，9 衍母为3 600。

(iii)以定母约衍母，得三个衍数：144，225，400。

(iv)把衍数化简，得三个同余式

$$19F_1\equiv 1 \pmod{25},$$

$$F_2\equiv 1 \pmod{16},$$

$$4F_3\equiv 1 \pmod{9}。$$

(v)求出乘率，分别为 4，1，7。

(vi)秦氏称 144×4＝576，225×1＝225，400×7＝2 800为用数。

(vii)(viii)秦氏从 $r_1=0$，$r_2=180$，$r_3=60$。算出各总：0，405 00，168 000，他从总数获得答数，所求距离

$$x\equiv 40\ 500+168\ 000=208\ 500\equiv 3\ 300 \pmod{3\ 600},$$

然后以算术运算进一步求甲、乙、丙三人行程日数。

本题以快速传递信息的实际问题编写算题，是够得上引人入胜，寓教于乐。

在数学运算上值得提出的几点：其一，本题为复数格。三个

模数有最大公约数 60，而模数两两的最大公约数都能整除相应余数之差，在设题数据上无可指责。

前面已在第一节指出秦氏对于复数格的处理："以诸数求总等不约一位，约众位，得各元法数，用元数格入之"是错误的，但我们还提出修改方案，事实上复数格必须尽约(总等)，否则不可以以元数格方式两两连环求等约彼、复乘等手续。本题秦氏存 360 约 240，180，凑巧得到准确答数。很容易看出如果存 240 或 180，约众位，衍母不再是3 600了，这就是反例。其二，当 $m_1=dm'_1$，$m_2=dm'_2$，…，$m_n=dm'_n$ 对 m'_1，m'_2，…，m'_n 两两连环求等，经过约彼，复乘手续后，获得相应的定数 μ_1，μ_2，…，μ_n。对于 μ_i（任取一个 i）$\{m_1, m_2, \cdots, m_n\}=d\prod_{i=1}^{n}\mu_i$ 是正确的。例如本例 $\{300, 240, 180\}=60\{3, 4, 5\}=3\,600$。

4. 程行相及

问：有急足三名，甲日行三百里，乙日行二百五十里，丙日行二百里。先差丙往他处下文字，既两日又有文字遣乙追付。已半日复有文字续令甲赶付乙。三人偶[1]相及，乃同时俱至彼所。先欲知乙果及丙、甲果及乙得日并里，次欲知彼处去此里数各几何？

（答数：8 日，2 000里乙追到丙；2.5 日，750 里，甲追到乙。两地相距3 000里。卷 2 第 3 题）

参考译文：快速通信员三人，各行日速 300，250，200 里。先差遣丙去某地送文书。2 日后另有文书差乙交丙。$\frac{1}{2}$日后又有文书差甲交乙。三人在途中偶而相遇，最后同到某地。问：乙确实追到丙、甲确实追到乙所行日数及行程。又问出发点与某地相距多少里？

---

[1] "偶不相及"据意改为"偶相及"这样就与下文两个"果"字前后呼应。

解法：

秦氏原著术文对解此题分两步走："以均输入之，大衍入之。"

秦氏先以均输入之，认为这是《九章算术·均输》第12问，(善行百步)题解法的变通，解法相当于说，如设甲、乙、丙日速依次为$v_{甲}$，$v_{乙}$，$v_{丙}$，乙后于丙$t_{乙}$，甲后于乙$t_{甲}$日出发，则乙、甲分别追到丙、乙所行行程(里)为

$$s_{乙}=t_{乙}\frac{v_{丙}v_{乙}}{v_{乙}-v_{丙}},$$

$$s_{甲}=t_{甲}\frac{v_{甲}v_{乙}}{v_{甲}-v_{乙}}。$$

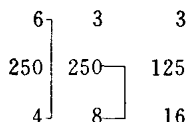
得到$s_{乙}$，$s_{甲}$后就易于求出所行日数。

秦氏次以大衍入之。问题的第二部分与答数有矛盾。《四库全书》馆臣据术文"以大衍入之"及答数作了解释："既及之后，三人不能同行。及各至彼处之时刻，皆与各起程之时刻相同。盖言自此至彼所行皆为整日数也。"这种看法很有见地。意即这一场特定意义下的三人接力赛跑；在乙丙相遇前，丙前乙后；在甲出发后与乙相遇前，乙前甲后……适当时间之后，甲在前，乙居中，丙在后。永不相遇。四库馆臣是说，求出$\{300，250，200\}=3\ 000$。甲到达3 000里外(需$3\ 000\div300=10$日)某地就停止前进，踏步等候乙和丙。那么乙在出发后$3\ 000\div250=12$日，丙在出发后$3\ 000\div200=15$日都达某地，三人相遇。秦氏术文及草文确是在此思路下列式解题的。

(i)如设三人在x里处相遇，则

$$\begin{cases}x\equiv0(\mathrm{mod}\ 300),\\x\equiv750(\mathrm{mod}\ 250),\\x\equiv2\ 000(\mathrm{mod}\ 200)。\end{cases}$$

(ii)$(300,250,200)=50$，则三元数的定母依次是6，250，4



求得定母为3，125，16。衍母为6 000。

(iii)衍数　2 000，48，375。

(iv)解　$2F_1\equiv 1\pmod{3}$，

$48F_2\equiv 1\pmod{125}$，

$7F_3\equiv 1\pmod{16}$。

(v)求乘率得，2，112，7。

(vi)计算泛用：2 000×2＝6 000，48×112＝5 376，375×7＝2 625。由于$\sum M_iF_i=2M+1$，秦氏在这里改为正用1 000，2 376，2 625。

(vii)，(viii)秦氏在本题术文说："以二余各乘本用，并之，为总。满衍(母)去之，不满为彼去此里。"这就是说，所求$x\equiv 750\times 2\,376+2\,000\times 2\,625=7\,032\,000\equiv 6\,000\pmod{6\,000}$ $6\,000\div 2=3\,000$，这是答数。

本题因题文叙述不够清楚，某些运算环节交待又不严密。两个世纪来有许多争鸣材料。无疑对数学史乃至数论的研究都有裨益，归纳起来有以下几方面：

三人不能相遇

如作一图解，取三人出发点为x的O点，取丙出发时刻为t，那么丙、乙、甲三人的位置与时间的关系，当如

$$x_{丙}=200t,$$

$$x_{乙}=250(t-2),$$

$$x_{甲}=300(t-2.5)。$$

他们在途中两两相遇各一次：$A(5,750)$，甲、乙相遇，$B(7.5,1\,500)$，甲、丙相遇，而$C(10,2\,000)$，丙、乙相遇(图4.4.2)，此

后再无交点。清代黄宗宪在其《求一术通解》(卷上,1874 年)说“原题矛盾已甚，今改之。”他将乙、甲出发时间推迟：丙出发后 3 日令乙追丙，又 2 日后令甲追乙。即把上面三直线方程改为

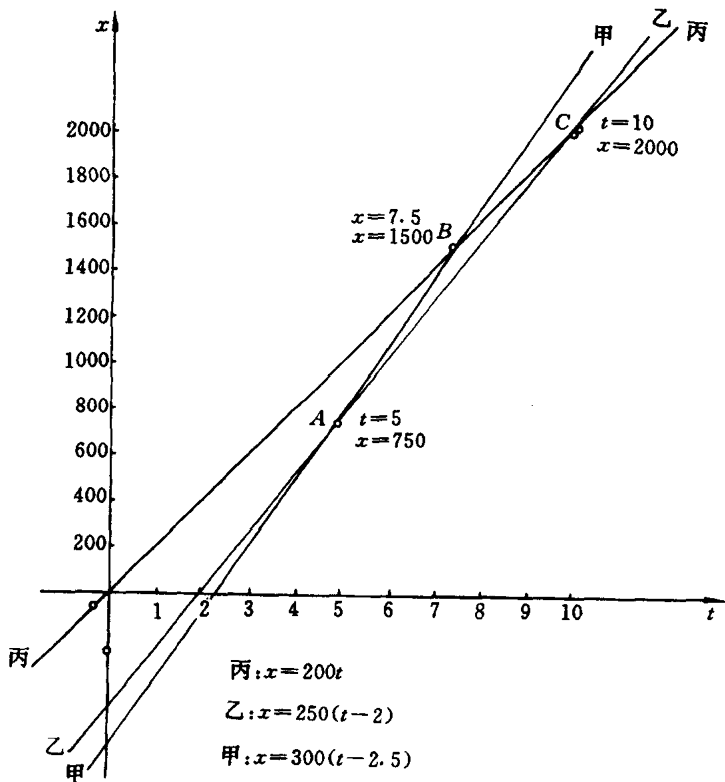


图 4.4.2

$$x_{丙}=200t,$$

$$x_{乙}=250(t-3),$$

$$x_{甲}=300(t-5)。$$

显然三直线共点于(15,3 000)。这样改动答数3 000是凑对了，但

正如黄宗宪自己说："在大衍类中无庸杂入均输。"可见这种改动是不妥当的。

公共周期

已有多篇论文或专著指出，"这类问题(公共周期)"与《张丘建算经》卷上第10题类型相同。只须求出最小公倍数……不应用大衍术来解决。"[①] 事实上从秦氏术文、草文可见他对问题的研究已提高到解同余式组的要求。当 $r_i(i=1,2,\cdots,n)=0$ 时，问题的答案就是 $M=\prod_{i=1}^{n}\mu_i$。他按大衍类算题常规方法的特殊情况来考虑，借以解决实际问题向数学提出的进一步要求。如求上元积年，不正就是某几周期的公共周期吗，这是数学的进步。

零余数

上面解法中秦氏列出 $x\equiv750 \pmod{250}$，$x\equiv2\,000 \pmod{200}$，称750为乙率，2 000为丙率。[②] 也属多余，不如径取 $x\equiv0 \pmod{300}\equiv0 \pmod{250}\equiv0 \pmod{200}$ 直截了当。

复数格化为元数

在大衍总数术中对复数格化为元数格采取："求总等，存一位，约众位"不可取。本题中300，250，200的总等是50。秦氏"存一位"，取250；约众位的结果是6，4。也就是说"始得元数"：6，250，4。下面的手续便是：连环求等，约彼，在所引解法(ii)中，他对于6，4在求等后，以"约彼复乘"代替"约彼"。对于8，250也有类似情况。这样做无异先承认6，250，4已是定母。实际上不论存哪一位，再约众数势必引起混乱。因为 $\{4,250,6\}=1\,500$，$\{360,5,4\}=360$，而 $\{200,5,6\}=600$。四库馆臣对此议论

① 宋元数学史论文集．北京：科学出版社，1966：76

② 原著术文说："视甲及乙里为乙率，见乙及丙里为丙率。以乙日行减去乙率，不满为乙余，以丙日行满去丙率，不满为丙余。"

说："按复数求元数，用总等法，尚属未密。盖总等约后，有当连环术等者，有当即求续等者，其法不能也。今少为变通：凡复数皆见十者，先以十为总等，遍约之（百、千、万同），为元数俟连环求等毕，复以总等十乘一数（百、千、万同），然后再求续等，以得定母。"如果把"为变通"的运算中把十（百、千、万同）拓广为最大公约数，馆臣的见解就是定理 7.2。

泛用与正用

虽然秦氏误用6 000为衍母，但他还在泛用如何调整为正用做文章："并三泛得一万二千零零一，乃多泛母一倍。当半衍母得三千，以消甲四千，余一千；又消乙五千三百七十六，余二千三百七十六。丙不消，各为定用数。"经过如此调整，1 000＋2 376＋2 625＝6 001三者就是正用。但是正因为三处余数 r_i 都是 0，调整与不调整没有什么作用。即使 r_i 都不是 0，调整泛用为正用对问题答数也并无影响。

5. 推计土功

问：筑堤起四县夫，分给里步皆同齐，阔二丈，里法三百六十步，步法五尺八寸。人夫以物力差定。甲县物力一十三万八千六百贯，乙县物力一十四万六千三百贯，丙县物力一十九万二千五百贯，丁县物力一十八万四千八百贯。每力七百七十贯，科一名。春程人功平方六十尺。先到县先给。今甲乙两县俱毕；丙县余五十一丈，丁县余一十八丈，不及一日全功。欲知：堤长及四县夫所筑各几何？

（答数：堤全长 19 里 235 步 5 尺，各县造堤千里 368 步 5 尺 6 寸卷 1 第 3 题）

参考译文：为修建土堤动员四县劳动力：平均分给各县同宽 2 丈、同高、同长长方形截面的堤段。按照各县纳税定额派工[①]：甲

① 工，我国至今仍用的计工作量单位：每人每日所作功。

县138 600贯，乙县146 300贯，丙县192 500贯，丁县184 800贯，每770 贯派工 1 人。春天每一工造堤 60 平方尺(以堤基为准)。四县按甲、乙、丙、丁序造堤。已知甲、乙两县劳动若干日后，所分堤段刚好造完，丙、丁两县劳动若干日后，都留下不足一日的堤段长：丙长 51 丈，丁长 18 丈。问：堤全长多少里？各县造堤长多少里？1 里作 360 步，1 步作 5.8 尺计(卷 1 第 3 题)

解法：术文先计算每县每日能造堤段长度，据题意算出甲、乙、丙、丁四县分别是 54，57，75，72 丈。

(i)设各县所造堤段长为 x 丈，列同余式组

$$\begin{cases} x\equiv 0 \pmod{54}, \\ x\equiv 0 \pmod{57}, \\ x\equiv 51 \pmod{75}, \\ x\equiv 18 \pmod{72}。\end{cases}$$

(ii)对于复数求定母，秦氏运算程序如下：

甲	54	54			9	9	9	27
乙	57	19		19	19	19	19	19
丙	75	25	25	25	25	25	25	25
丁	72	24	24	24	24	24	24	8
	求总等、存一位，约众位	已化为元数		常规约简			甲、丁约丁，得 8，乘甲为 27.	已得四定母

$$衍母=27\times19\times25\times8=102\ 600$$

(iii)求衍数

$$19\times25\times8=3\ 800,$$

$$27\times25\times8=5\ 400,$$

$$27\times19\times8=4\ 104,$$
$$27\times19\times25=12\ 825。$$

(iv)建立同余式：

$$20F_1\equiv1(\bmod 27),$$
$$4F_2\equiv1(\bmod 19),$$
$$4F_3\equiv1(\bmod 25),$$
$$F_4\equiv1(\bmod 8)。$$

(v)用大衍求一术求得 $F_1=23$，$F_2=5$，$F_3=19$，$F_4=1$。

(vi)计算泛用87 400，27 000，77 976，12 825。

(vii)，(viii)求各总得：0，0，3 976 776，230 850。并总，得4 207 626。所求各县造堤段长4 207 626≡1 026(mod 102 600)。

本题要解四个同余式的同余式组。

本题出现有最大公约数 3 的复数组 54，57，75，72。秦氏坚持其“存一位，约众位”，这里，他存的是 54，约其余三位成为 19，25，24，凑巧得准确结果。如果改存他位：{18，57，25，24} ={18，19，75，24} =34 200而 {18，19，25，72} =68 400。本题应先按定理 7.2，从复数格计算总等 3 后，对 18，19，25，24 四元数求 {18，19，25，24} = {13，19，25，24} =34 200，则 {54，57，75，72} =3×34 200=102 600。为进一步求四数相应的定母，按定理 7.2 可以在 3，19，25，24 中任取一位扩大“总等”的倍数后，再经过“约彼，则必乘此”的运算都可得到同一结果。这就是 {18，19，25，24} = {3，57，25，24} = {3，19，75，24} = {3，19，25，72} = {27，19，25，8}。

本题 $\sum_{i=1}^{4}F_iM_i=87\ 400+27\ 000+77\ 976+12\ 825=205\ 201=2M+1$。按正用定义，应予减少，但秦氏却在草文中说：“乘率对乘……衍数，甲得八万七千四百，……各为用数。”可见秦氏自己也认为把泛用调整为正用并非必要。

本题四模数非两两互素，但其两两最大公约数都整除相应同余式余数之差，故同余式组有解。

6. 推库额钱

问：有外邑七库，日纳息足钱适等。递年成贯整纳。近缘现钱稀少，听各库照当处市陌[①]，准解旧会[②]。其甲库有零钱一十文[③]，丁庚二库，各零四文，戊库零六文。余库无零钱，甲库所在市陌一十二文，递减一文，至庚库为止，欲求：诸库日息、元纳足钱、展省[④]及今纳旧会、并大小月份[⑤]各几何？

(答数:各库每日实税收26 950个钱,即 26 贯 950 文,展省 35 贯。其中甲库每日税收折旧会 224 贯 510 文,大月共6 737贯 500 文,小月共6 512贯 902 文。(乙库至庚库未录)卷 1 第 4 题)

参考译文：外县有七个地方金库，每日税收相同。近来现钱稀少，准许地方金库按当地行情把税收铜钱每“百”穿串成贯上交。已知甲库当地 12 文当 100 文，自乙库至庚库依次递减 1 文当 100 文。各库照此折合率逐日穿串成贯。又知穿串后甲库余钱 10 文，丁库余 4 文，戊库余 6 文。其余乙、丙、己三库无余数。问：各库每日税收多少？按各库当地行情合多少贯？每大月每小月各共收入多少贯？

穿“陌”一词直至《数书九章》成书一百多年后仍流行使用。例如严恭《通原算法》(1372)第 28 题：“今有散钱不知其数，作七十七陌穿之，欠五十文揍穿，若作七十八陌穿之，不多不少。问：

---

① 市陌：陌，一百个钱穿成一串称一陌，十陌为阡或称贯。由于南宋经济制度混乱，各地一陌含钱数不一样，称为市陌从题意看有的 12 个钱作为一陌，甚至减少到 6 个钱为一陌。

② 旧会：旧的会子，参见第三编第三章第四节。

③ 文：古代称一个铜钱为一文。

④ 展省：省是节省、偷工减料之意。展省 77 陌就是以现钱 77 折合官价 100。

⑤ 阴历小月 29 日，大月 30 日。

钱数若干?”严恭在题后特别指出:“此系[剪]管数，却非不足、适足。”(答数:2 106 文)他的解题术文说:“列七十八自乘得六千八十四，又以七十七减欠五十，余二十七，乘头位得一十六万四千二百六十八为实。别以七十八、七十七相乘，得六千六，减除头位。实不满法，却合前问[若以七十八数有零，当五千九百二十九乘]。”

解法:贯是古代常见钱币单位:千钱为贯。到南宋偏安杭州，穿钱成贯，也徇私舞弊。本题正反映这一时代背景。题意七个金库每日税收铜钱数相同而甲至庚七个库依次把12，11，10，9，8，7，6个钱当作陌(100钱)。如设各库每日税收钱数为x，本题就借以列出含七个同余式的同余组

$$\text{(i)}\qquad \begin{cases} x\equiv 10 \pmod{12}, \\ x\equiv 0 \pmod{11}, \\ x\equiv 0 \pmod{10}, \\ x\equiv 4 \pmod{9}, \\ x\equiv 6 \pmod{8}, \\ x\equiv 0 \pmod{7}, \\ x\equiv 4 \pmod{6}。 \end{cases}$$

(ii)经两两连环求等方式求出相应定数为1，11，5，9，8，7，1，并得衍母为$M=27\ 720$(图4.4.3为原著从元数化为定母、衍母书影)

(iii)(iv)从衍数2 520，5 544，3 080，3 465，3 960，27 270列出五个同余式:$F_2\equiv 1 \pmod{11}$，$4F_3\equiv 1 \pmod{5}$，$2F_4\equiv 1 \pmod{9}$，$F_5\equiv 1 \pmod{8}$，$5F_6\equiv 1 \pmod{7}$。其中F_1，F_7由于对应的定母是1，当是恒等式。

(v)计算乘率F_2，F_3，F_4，F_5，F_6分别是1，4，5，1，3。

(vi)泛用$Y_1=Y_7=0$，$Y_2=2\ 520$，$Y_3=22\ 176$，$Y_4=15\ 400$，Y_5

十爲丙庫陌九爲丁庫陌八爲戊庫陌七爲己庫陌六
爲庚庫陌得諸庫元陌

甲	乙	丙	丁	戊	己	庚
12	11	10	9	8	7	6 元陌

以連環求等約訖甲得一乙得一十一丙得五丁得九
戊得八己得七庚得一各爲定母立各一爲子

右行	1	11	5	9	8	7	1 定母
左行	1	1	1	1	1	1	1 天元

互乘

先以諸定相乘得二萬七千七百二十爲衍母次以諸

數書九章卷一　宜稼堂叢書

图 4.4.3

$=3\ 465$，$Y_6=11\ 880$。虽然$\sum_{i=7}^{7}Y_i=2M+1$，原著不给调整，迳称用数。

由于$Y_1=Y_7=0$，秦氏想方设法，在不影响答案前提下，在其

他各用数中通融的借，使在七处各有用数，有“完整、和谐”的“好”处。其调整原理即定理 17.2。本题甲、庚用数为零，他就在与二者有公约数的元数的相应用数中酌借。到底到哪里借，也经过推敲选择。例如甲、庚的元数 10，6 与丙、戊的元数 10，8 都有公约数 2。但戊的用数3 465本身已较小，不作为对象。而元数为 10 的丙有用数22 176，是用数中的最大者，就决定从此借用。其中$(m_1,m_3)=2$，就从 Y_3 中取 $M_3\div(m_1,m_3)=13\ 860$作为借用总数。其中 $Y_3-13\ 860=22\ 176-13\ 860=8\ 316$作为 Y_3'(丙的用数)然后把13 860适当地分配给甲、庚、秦氏取 2 与 1 之比，即 $Y_1'=13\ 860\div3=4\ 620$ （甲的用数）$Y_7'=13\ 860\div3\times2=9\ 240$（庚的用数）。而乙、丁、戊、己的用数，不改动。

(vii)(viii)调整过后，全不等于零的七个用数对乘相应的余数分别得各总：46 200，0，0，61 600，20 790，0，36 960。最后并总得 $\sum_{i=1}^{7}F_iM_ir_i=16\ 550\equiv 26\ 950 \pmod{27\ 720}$ 其中26 950即所求各库每日税收钱数，而26 950÷770=35 贯为展省数。再计算每月折合旧会数。

表 4.4.4

元数	一变			二变三变			四变
12				12		3	1
11				11		11	11
10				10	5	5	5
9			9	9	9	9	9
8		8	(反)	8	8	8	8
7	7	(反)		7			7
6	8	3	1	1			1

本题为含七个同余式的同余组。模数不两两互素，且无公约数，是标准元数格。按理说秦氏在草文中应作为典型例子详草，示运算过程，但原著缺此要着。所以四库馆臣也颇有微词：“按此法

之要，在于求定(母)，而术中独略之。”我们按元数格化定母的规范法则，运算如表。(表 4.4.4)

本题草文从某用数中借出衍母的分数倍以分配给其他等于零的用数，使原题无缺损感：完整、和谐、整齐划一。这种借用运算，从本题开始。在草文中原先：“今视甲一十二、庚六、皆与丙一十、戊八，俱偶，为同类。其戊用数三千四百六十五，其数少，不可借。唯丙之用数为最多，当以借之。乃以等数二约衍母，得一万三千八百六十为借用。乃减丙用，余八千三百一十六为丙用数。乃以借出之数，以等数二除之，得六千九百三十为甲用数，余为庚用数。今不欲使甲庚之借数同。乃验借出数一万三千八百六十，可用几约如意。乃立三。取三分之一，得四千六百二十，为甲用。取三分之二，得九千二百四十为庚用。”于此可见，他为补全七个同余式，为甲、庚借用，但他是有目的、有方向地借用。可见对定理 17.2 内容及性质，了如指掌：

——原先打算自戊借用，以太小作罢。

——次取自丙，Y_3 借出$\frac{M}{2}=13\ 860$，即取 $Y_3'=8\ 316$。用$(m_1, m_7)=(12,6)=2$ 除，$13\ 860\div 2=6\ 930$借给甲，其余6 930借给庚。如此做，甲、庚用数从无到有，七处用数齐全。可是中看不中用。甲、庚各取$\frac{M}{4}$，无异是说取 $4\neq d=(m_1,m_7)$，$4\nmid(r_1-r_7)$，这里$\frac{r_1-r_7}{4}=\frac{3}{2}$，那么$\frac{3}{2}M$ 非 M 的整倍数。也就是说从 Y_3 减去$\frac{M}{2}$并不影响答数，而 $Y_1r_1-\frac{M}{4}r_1+Y_7r_7+\frac{M}{4}r_7=Y_1r_1+Y_7r_7+M\ \frac{r_7-r_1}{4}\not\equiv Y_1r_1+Y_7r_7 \pmod M$。这里他说：“不欲使甲庚之借数同”，并不单是不欲，而是不能。于是他就另想他法：

——把从丙借来的13 860，三分之一给甲，三分之二给庚。他说：“可用几约如意，乃立三”。对这一具体问题，相当于说

$$\left(Y_1+13\ 860-\frac{1}{3}13\ 860\right)r_1+(Y_3-13\ 860)r_3+\left(Y_7+\frac{1}{3}13\ 860\right)r_7$$

$$=Y_1r_1+Y_3r_3+Y_7r_7+13\ 860(r_1-r_3)+\frac{13\ 860}{3}(r_7-r_1)$$

$\equiv Y_1r_1+Y_3r_3+Y_7r_7 \pmod{27\ 720}$。这是因为$13\ 860=\frac{1}{2}M$。而$(m_1,m_3)=2|r_1-r_3$，$(m_1,m_7)=6|r_1-r_7$。所以秦氏说："可用几约如意"并不如意，正因为所立三，$\frac{d}{2}$；而$d=(m_1,m_7)=(12,6)|M=27\ 720=2\times13\ 860$，上述等式才成立。清代的李锐对"如意"两字有议论说："甲、丙之等二，于丙借甲，以等二约衍母为借数。甲庚之等六，于甲借庚，当以等六约衍母为借数。今甲用本为二约衍母之数，又以三约之，便是六约衍母。云：如意立三，虽合其数，于率不通。"

7. 积尺寻源

问：欲砌基一段。现管[①] 大小方砖、六门、城砖四色。令匠取便。或平、或侧，只用一色砖砌，须要适足。匠以砖量地计料，称：用大方料，广多六寸，深少六寸。用小方，广多二寸，深少三寸。用城砖，长、广多三寸，深少一寸，以宽、深少一寸，广多三寸；以厚、广多五分，深多一寸。用六门砖，长、广多三寸，深多一寸。以宽、广多三寸，深多一寸。以宽、广多一寸，深多一寸。皆不匼匝[②]，未免修破砖料裨补[③]。其四色砖：大方、方一尺三寸，小方、方一尺一寸，城砖长一尺二寸、宽六寸、厚二寸五分，六门、长一尺、宽五寸、厚二寸。欲知：基深、广几何？

---

① 管，义：把。

② 匼匝，义：围绕，转义：凑合。

③ 裨补，义：添补。

(答数:深3丈7尺1寸,广1丈2尺3寸。卷2第8题)

参考译文：要铺砌地基一段。把四种砖：大方砖、小方砖、六门砖、城砖交付泥水匠随便取用。但限定只用一种砖铺砌，或平放，或侧放，要求恰好砌齐。匠人用砖量地计料，说：用大方砖量，地面的宽度多出6寸，进深则少了3寸。用小方砖量，地面的宽度多出2寸,进深少了3寸。用城砖的长度量,宽度多出3寸,进深少了1寸。用宽度量，地面宽度多出3寸，进深少了1寸，用厚度量，宽度多出5分，进深多出1寸。用六门砖的长度量，宽度多出3寸，进深多出1寸，用宽度量，地面的宽度多出3寸，进深多出1寸，用厚度量，宽度多出1寸，进深多出1寸。地面宽度、进深都不能恰好量尽，难免要用残砖嵌补。四种砖的尺寸已给：

大方砖边长1尺3寸，小方砖边长1尺1寸。城砖边长1尺2寸，宽6寸，厚2寸5分。六门砖边长1尺，宽5寸，厚2寸。

问：地面进深及宽度［最小值］是多少？

解法：

(i)秦氏以不同尺寸砖块量地基广、深为由，设计出另一个有八个同余式的同余组，是数学史首见，形制奇特，匠心独具。如设地基的宽和进深分为x，y(分)，据题意应列两个同余式组。

$$\begin{cases}x\equiv 60 \pmod{130},\\ x\equiv 30 \pmod{120},\\ x\equiv 20 \pmod{110},\\ x\equiv 30 \pmod{100},\\ x\equiv 30 \pmod{60},\\ x\equiv 30 \pmod{50},\\ x\equiv 5 \pmod{25},\\ x\equiv 10 \pmod{20}.\end{cases}\qquad \begin{cases}y\equiv -60 \pmod{130},\\ y\equiv -10 \pmod{120},\\ y\equiv -30 \pmod{110},\\ y\equiv 10 \pmod{100},\\ y\equiv -10 \pmod{60},\\ y\equiv 10 \pmod{50},\\ y\equiv 10 \pmod{25},\\ y\equiv 10 \pmod{20}.\end{cases}$$

各含八个模数，应入复数格。它们虽非两两互素，可以验证各都

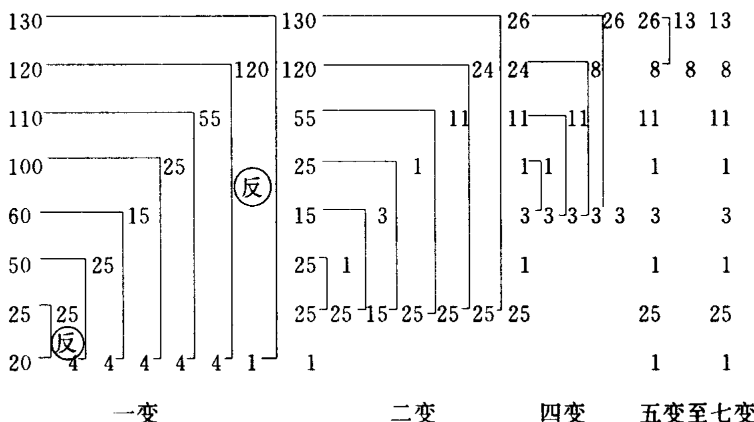
满足有解的充分必要条件。本题还出现负的余数，秦氏的化负为正处理过程正确无误，为节约篇幅只记原著第一组同余组的解法。

(ii)对于八个模数，自大而小为序排列。虽有公约数并不按复数格处理。以元数格两两连环求等反复相约得定母13，8，11，1，3，1，25，1。衍母为85 800。

(iii)求衍数6 600，10 725，7 800，0，28 600，0，3 432，0。

(iv)列出五个同余式(衍数为0者,无同余式)。

(v)求得相应的乘率 $F_1=3$，$F_2=5$，$F_3=F_5=1$，$F_7=18$。



(vi)衍数与相应的乘率对乘，得泛用。虽然 $\sum_{i=1}^{8} Yi=2M+1$，秦氏并未按正用定义调整，迳称之为用数：

$Y_1=19\ 800$，$Y_2=53\ 625$，$Y_3=7\ 800$，$Y_5=28\ 600$，$Y_7=61\ 776$。

为保持解题的完整、和谐，秦氏保证不影响答数前提下，在大的用数内分一些，借给用数为零的地方。在草文中，他相当于说，从 Y_7 中借给

$$Y_4=Y_6=\frac{M}{(m_4,m_7)}=\frac{M}{(m_6,m_7)}=\frac{85\ 800^{①}}{25}=3\ 432,$$

$$Y_8=\frac{M}{(m_8,m_7)}=\frac{85\ 800}{5}=17\ 160。$$

因为 Y_7 为用数中之最大者。于是从定理 17. 2，计算所求。

$$\text{(viii)}x\equiv Y_1r_1+Y_2r_2+Y_3r_3+\frac{M}{(m_4,m_7)}r_4+Y_5r_5+\frac{M}{(m_6,m_7)}r_6+$$

$$\left(Y_7-\frac{M}{(m_4,m_7)}-\frac{M}{(m_6,m_7)}-\frac{M}{(m_8,m_7)}\right)r_7+\frac{M}{(m_8,m_7)}r_8(\text{mod } M)。$$

从题设条件知 $(m_4,m_7)|r_4-r_7$，$(m_6,m_7)|r_6-r_7$，$(m_8,m_7)|r_8-r_7$。原著算出各总：1 188 000，156 000，1 608 750，858 000，205 920，51 480，51 480，171 600，然后并总，得4 291 230。最后得答数1 230分。

本题模数应入复数格，约去最大公约数 5 后对元数 26，24，22，20，12，10，5，4 按定理 7. 1 常规两两连环求等，相约即得准定母，13，8，11，1，3，1，5，1，从定理 7. 2 即得同一组定母，13，8，11，1，3，1，25，1。

从上引范例“推库额钱”和“积尺寻源”，秦九韶在求全责备的要求指引下，以补全用数为乐事。其实是做了“傻事”。在编四库全书时，馆臣在“积尺寻源”作按语，指出：“按无用数，则此条(指借用)可省。借数转生烦扰，非法也”清黄宗宪《求一术通解》卷上以分解模数为因数乘积解题。把本题化为只含四个同余式的同余组：$9F_1\equiv1(\text{mod } 13)$，$23F_2\equiv1(\text{mod } 4)$，$F_3\equiv1$

---

① 原著误为 $Y_4=Y_6=1\ 716=\frac{M}{(m_4,m_6)}=\frac{8\ 500}{(100,50)}$

(mod 11)，$7F_4\equiv 1 \pmod{25}$。黄氏称其余无用数四式为“废位”，并说“此自然之理也。”对秦氏借用的做法持反对意见：“秦书于求得各用数后，视某位空者，则借同类之用数，以补之，法嫌赘设，是编不采。”

第三节　一次同余式组(大衍类范题分析下)

我们把《数书九章》大衍类九题中涉及自然科学现象《历法》一题及社会哲学《周易》一题归入本节。

1. 古历会积

我国古代制订历法有个传统，先假定历法计时的起点。这个时刻称为上元。古历是指先秦时代的历法，当时这个时刻规定是月朔(新月的开始,太阳、地球、月亮在一直线上,而月亮居中)刚好那时是冬至(太阳达到黄道的极南点)。那一天又刚好是甲子日子夜(零时零分零秒)。历法计时从此开始。因三者(月、日、甲子)运行周期不一样，就互相错开，不太容易重遇。但毕竟公共周期是存在的，若干时间后它们还有相遇时刻。从运动的开始到最近一次相遇所需时间称为会积。制历那一年冬至距上元时间称为历过，距下次相遇所需时间称为未至。本节所引古历会积以及下一节治历演纪二题都涉及历过、未至等计算问题。

问：古历[①]冬至[②]以三百六十五日四分日之一。朔策[③]以二

---

① 我国先秦六历总称古历：黄帝、颛顼、夏、殷、周、晋。其中岁实 $365\frac{1}{4}$ 日，朔策 $29\frac{499}{940}$ 日，亦称四分历。

② 阳历12月22日前后太阳达最南点，那一天地球北半球的白昼最短。

③ 朔策：四分历规定19年气(冬至)朔(月朔)相遇。期间置7个闰月。因此19年 $=365\frac{1}{4}\times 19=6\,939\frac{3}{4}$ 日，1月 $=6\,939\frac{3}{4}\div(12\times 19+7)=29\frac{499}{940}$ 日(朔策)

十九日九百四十分日之四百九十九。甲子[①]六十日，各为一周。假令至淳祐丙午(年)十一月丙辰朔，初五日庚申冬至，初九日甲子。欲求：古历气、朔、甲子一会，积年、积月、积日及历过、未至各几何？

(答数：会积18 240年、22万5 600月、6 662 160日。历过9 163年，未至9 077年。卷1第2题)

参考译文：古历以 $365\frac{1}{4}$ 日为一年、$29\frac{499}{940}$ 日为一月。60日为甲子一周。如果淳祐丙午(1246年)11月丙辰那一日为月朔，初五日庚申那一日为冬至，初九是甲子。求：古历会积是多少年(折合月、日)？历过、未至各是多少？(图4.4.4)

解法：

原著假设冬至、月朔都发生在当日子夜，于是据题意

(i)列出同余式组。设制历年上距上元为 x 日，则

$$\begin{cases} x\equiv 4\left(\bmod\ 365\frac{1}{4}\right), \\ x\equiv 8\left(\bmod\ 29\frac{499}{940}\right), \\ x\equiv 0(\bmod\ 60)。\end{cases}$$

① 我国从古以来以天干(甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸)地支(子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥)中各取其一，两两按序排年、月、日。这种传统可以上推到殷商时代，绵延未有间断。其序为：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
甲子	乙丑	丙寅	丁卯	戊辰	己巳	庚午	辛未	壬申	癸酉	甲戌	乙亥
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
丙子	丁丑	戊寅	己卯	庚辰	辛巳	壬午	癸未	甲申	乙酉	丙戌	丁亥
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
戊子	己丑	庚寅	辛卯	壬辰	癸巳	甲午	乙未	丙申	丁酉	戊戌	己亥
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
庚子	辛丑	壬寅	癸卯	甲辰	乙巳	丙午	丁未	戊申	己酉	庚戌	辛亥
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
壬子	癸丑	甲寅	乙卯	丙辰	丁巳	戊午	己未	庚申	辛酉	壬戌	癸亥

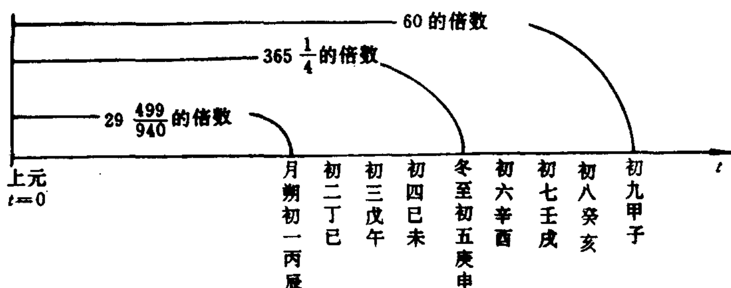


图 4.4.4

(ii)这里的模数 $365\frac{1}{4}$，$29\frac{499}{940}$，60 为通数，按通数格(定理12)化为元数1 373 340，111 036，225 600。用定理 7.1 化为定母 487，19，225 600，得衍母2 087 476 800

(iii)再计算相应的衍数4 286 400，109 867 200，9 253

(iv)列出三个同余式

$313F_1\equiv1(\mathrm{mod}\ 487)$，

$4F_2\equiv1(\mathrm{mod}\ 19)$，

$9\ 253F_3\equiv1(\mathrm{mod}\ 225\ 600)$。

(v)借以求相应的乘率 $F_1=473$，$F_2=5$，$F_3=172\ 717$。

(vi)计算三个泛用 2 027 467 200，548 336 000，1 596 150 401。$\sum_{i=1}^{3}F_iM_i=4\ 174\ 953\ 601=2M+1$，就在各泛用内减去衍母的分数倍。还是按照$(m_i,m_j)|r_i-r_j$这一性质调整，原著在 F_1M_1，F_3M_3 内各减去$\frac{M}{2}$，F_2M_2 不变，即以983 728 800，549 336 000，554 412 001为正用。

(vii)计算各总，并总，得所求 $x=8\ 329\ 603\ 200\equiv 2\ 067\ 172\ 800(\mathrm{mod}\ 2\ 087\ 476\ 800)$，按照复名数聚传历过应是9 163年。

在数学发展史上一般都称誉成功的记录，而略去失误。事实上，成功是在更多次失误中诞生的。本题从题文本身到运算过程中出现多次错误，秦氏不仔细审校，让之传世，这是有失严肃之处，此题已引起后世学者关切并设法正误。例如：

其一，原著所列同余式组与题文矛盾，术文说："气不及四，朔不及八。"以至大谬不然。

其二，从题文入手检查，就发现原著所列同余式组无解。清人李锐在不改动原题数据下发现："依问题以丙辰至庚申相距四日，为朔余，以庚申至甲子相距四日，转减纪法六十，余五十六日，为纪余，推纪总、朔总，以求历过年，亦不得其数。"其同事毛岳生为作注解，相当于说，对于分数模的同余组

$$x\equiv0\left(\mathrm{mod}\ 365\frac{1}{4}\right)\equiv4\left(\mathrm{mod}\ 29\frac{499}{940}\right)\equiv56(\mathrm{mod}\ 60),$$

化为整数模

$4\times940x\equiv0(\mathrm{mod}\ 1\ 373\ 340)\equiv4\times940\times4(\mathrm{mod}\ 111\ 036)\equiv56\times940\times4(\mathrm{mod}\ 225\ 600)$，其中$(225\ 600,111\ 036)=12\nmid(56-4)\times940\times4$。因此不满足有解条件。

其另一同事沈钦裴在李锐思想指引下更改秦九韶题文数据，使有解。宋景昌《数书九章札记》说："沈氏钦裴用四分术推之，以正其误，法最详尽，今附录于此。"

"问：四分术冬至三百六十五日四分日之一，朔策二十九日九百四十分日之四百九十九，甲子六十日，各为一周。假令天正朔甲戌日九百四十分日之四百一十，冬至丁酉日四分日之三。欲求：气朔甲子一会积年、积月、积日及历过、未至年数各几何？

（答数：一会积年1 520，积月18 800，积日555 180。历过年1 115未至年 405）

沈钦裴所改题、设所求历过为x日，则据题意可列同余式组：

$$x\equiv0\left(\mathrm{mod}\ 365\frac{1}{4}\right)\equiv33\frac{3}{4}\ (\mathrm{mod}\ 60\ )\equiv33\frac{3}{4}-$$

$10\dfrac{410}{940}\left(\bmod 29\dfrac{499}{940}\right)$，化为正整数模：

$940\times 4x\equiv 0\ (\bmod\ 1\ 373\ 340)\equiv 126\ 900\ (\bmod\ 225\ 600)\equiv$ $87\ 660(\bmod\ 111\ 036)$，

检验　$(225\ 600,111\ 036)=12\,|\,126\ 900-87\ 660$，且

$(1\ 373\ 340,225\ 600)=2\ 820\,|\,1\ 269\ 600$

$(1\ 373\ 340,111\ 036)=5\ 844\,|\,87\ 660$。同余式组有整数解。按大衍术解就得上面答案。

其三，秦氏原答历过为9 163年。按照题文检验，把9 163年化为日数后，代入同余式组，它们与余数之差应分别是 $365\dfrac{1}{4}$，$29\dfrac{499}{940}$，60的整数倍。但这一基本要求也达不到，所以在《数书九章》收入四库全书时，馆臣已抱怨说："题已不合，既法合，数亦不能合也。"又说，"算家终以得数为准，得数不合，则无以取信于人矣。"馆臣在揭人之短的同时，"今改设一题于后，以明其法焉)"

"假令十一月平朔辛巳日四百七十分日之一百一十三，冬至癸卯日子正初刻。问：距前后甲子日、子正初刻合朔冬至之年数各几何？"

设订历年冬至与上元距 x 日，馆臣据题意(图 4.4.5)相当于列出同余式组

$$x\equiv 0\left(\bmod 365\frac{1}{4}\right)=17\frac{113}{470}\ (\bmod 60)=39-$$

$17\dfrac{113}{470}\left(\bmod 29\dfrac{499}{940}\right)$。又把原式化为整数模同余式组

$3\ 760x\equiv 0\ (\bmod\ 1\ 373\ 340)\equiv 146\ 640\ (\bmod\ 225\ 600)\equiv$ $81\ 816(\bmod\ 111\ 036)$各自满足$(36\ 760,225\ 600)=20\,|\,146\ 640$，$(3\ 760,111\ 036)=4\,|\,81\ 816$且$(225\ 600,111\ 036)=12\,|\,146\ 640-$

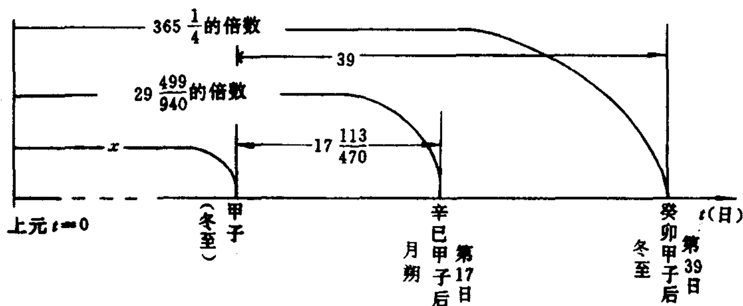


图 4.4.5

81 816=64 824。

最终获解，所求 x 为319 959(日)折合 876 年。

经过历代学者的认真讨论，"古历会积"题的失误已全面修正。

2. 蓍卦发微

"蓍卦发微"题列为秦氏书首题，应有其特殊重要意义。由于题意十分隐晦，令人百思不得其解，成为读此书的栏路虎。"牵强附会，毫无意义"之说，油然而生。

我国古代用蓍草① 占卜，肇自先秦，以祈求神祗，预示将要发生事物的吉凶。《周易》是占卜专籍，列六十四卦象征各种自然现象和社会现象及其变化。其占卜手续"易・系辞上"："大衍之数五十，其用四十有九，分而为二，以象两［仪］。挂一以象三［才］、揲以为四，以象四时，…，十有八变而为卦。"占卜的具体做法是②：在木盒中盛放蓍草 50 根(大衍之数五十)。筮者(占卜人)从中只取 49 根(其用四十有九)分三次(每次为一变)分揲(抽取)

① 蓍草为多年生草本植物，《尚书・洪范》说它百年生一本，被视为神灵之物，和龟甲一样，同是占卜用具。

② 详参见本《大系》第一卷第二编第四章第一节。

第一变：将 49 根蓍草随机分为两部分，二者非奇即偶。奇数象征阴（－－爻），偶数象征阳（一爻）。（分而为二以象两[仪]）两部分中又分出 1 根。（挂一以象三[才]）。这样，如果第一部分有 n 根，其余二部分分别有 $48-n$，1 根，分揲的办法是在 n，$48-n$ 中分别 4 根 4 根地抽取。余数前者必然是 1，2，3 或 4；后者必然是 3，2，1 或 4。连同“挂一”的那一根，把余数 4 或 8 根甩去。

第二变：将余下的 40 或 44 根蓍草再随机分成两部分各按第一变分揲办法，4 根 4 根抽取，再次甩去余数，二者总和非 4 即 8。

第三变：将上次余下的 32，36 或 40 根蓍草又随机分成两部分，仍各分揲，4 根、4 根抽取，再次甩去余数、二者蓍草总数有四种可能。

24 根，4 的 6 倍，《周易》称为老阴；

28 根，4 的 7 倍，称为少阳；

32 根，4 的 8 倍，称为少阴；

36 根，4 的 9 倍，称为老阳。

这就得第一爻（或阴或阳）。反复第一爻的做法，获取其他五爻（或阴、或阳）（十有八变而成卦）。古人用这种占卜方法获得一卦。64 个卦[①] 在《周易》各有卦辞，借以猜度事物吉凶，以定行止。例如第 23 卦（困），陷入困境，为凶卦，而第 62 卦（大有），象征丰收。

秦九韶攀附《周易》，以《孙子算经》物不知数题及其解法为主线，以余数反求原数作出另一种可以画爻作卦的占卜方式。《易》据六经之首，儒家奉为圭臬、秦氏创立新的分揲手续，与《周易》挂钩，且以此题列为开宗明义第一，借以提高所著书的名望，其心情可以理解。在我们看来从余数反求原数，此举舍近求远，避轻就重，通过此途径求阴或阳数，岂非笑话？对儒家看来，

---

① 卦象参见本《大系》第一卷 p. 200.

秦氏此举标新立异，离经叛道有违正统，所以四库馆臣对此有按语说："欲以新术改《周易》揲蓍之法，殊乖古义"。"按此法强援蓍卦。牵附衍数，致本法反晦。今以本法列于前，则其弊自见矣！"

问：《易》曰：大衍之数五十，其用四十有九。又曰：分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四，以象四时。三变而成爻。十有八变而成卦。欲知：所衍之术及其数各几何？

(答数:衍母12,衍法3。一元衍数24,二元衍数12,三元衍数8,四元衍数6。以上四位衍数计50。一揲用数12,二揲用数24,三揲用数4,四揲用数9。以上四位用数计49。卷1第1题)

题文大意：秦氏自创的揲法也用50根蓍草，也只取其中49根。也随机分为两部分，对其中任一部分按一、一抽取($m_1=1$)，二、二抽取($m_2=2$)，三、三抽取($m_3=3$)，四、四抽取($m_4=4$)。以各次抽数所得余数(秦在术文、草文中所举例,取$r_1=1$,$r_2=1$,$r_3=3$,$r_4=1$,反算(用大衍术)原有蓍草多少根？如果答案最小正整数解是x_0，他又按以下法则，取相当于《周易》所说老阳、少阴、少阳、老阴

$$N=\frac{x_0}{3}$$

当$0<\frac{x_0}{3}\leqslant 1$，$N$取1，$1<\frac{x_0}{3}\leqslant 2$，$2<\frac{x_0}{3}\leqslant 3$，$3<\frac{x_0}{3}\leqslant 4$，$N$分别取2，3，4。

而
$$N=\begin{cases}1\ \text{老阳}\\2\ \text{少阴}\\3\ \text{少阳}\\4\ \text{老阴}\end{cases}$$

每经三变[①]获得一个N，相应得一爻(阴或阳)，经十八变得一卦。

① 在一一、二二、三三、四四 四揲中，秦氏认为"自一、一揲之，必奇(余)一，故不繁，揲而乃迳挂一…谓揲二、揲三、揲四者凡三变，…故曰三变而成爻。"

解法：

仿照上面各题，我们把秦氏本题解法也分八个步骤，用现代数学语言说明：

(i)据题意立出同余式组

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 1, \\ x \equiv 1 \pmod 2, \\ x \equiv 3 \pmod 3, \\ x \equiv 1 \pmod 4。\end{cases}$$

(ii)从元数1，2，3，4求定母、对这几个很简单的模数原著求定母、图式合乎两两连环求等法则(定理7.1)，他说：“以两两连环求等约之，先以一与二求等，一与三求等、一与四求等，皆得一。各约奇弗约偶，数不变。次以二与三求等，亦得一，约奇弗约偶，数亦不变。及以二与四求等，乃得二，此二只约副数二，变为一，而弗约四。次以三与四求等，亦得一、约奇、亦不变。所得一、二、三、四，各为定数。”求得各自定数为1、1、3、4，衍母为12

1	1	1	1			1
2	2	2	2	2	1	1
3		3	3	3		3
4		4	4		4	4

(iii)计算衍数，得12，12，4，3

(iv)常规从相应模数简化各同余式的系数，分别得奇数1，1，1，3，即得四个同余式

$$F_1 \equiv 1 \pmod 1,$$
$$F_2 \equiv 1 \pmod 2,$$
$$F_3 \equiv 1 \pmod 3,$$
$$3F_4 \equiv 1 \pmod 4。$$

(v)在上面四个同余式中前面三个的解都是1，原著说：“凡奇数得一者，便为乘率。”须运用大衍求一术的只是最后一式。原著说：“今左下衍是三，乃与本母四，用大衍求一术入之，列衍奇三

于右上，定母四于右下。立天元一于左上，空其左下(①)先以右上少数三，除(去)右下多数四，得一为商，以商一乘左上天元一，只得一，归左下，其右下余一(②)次以右下少数一，除右上多数三，须使右上必奇一算乃止。遂于右行最上，商二，以除右衍，必奇一。乃以上商，命右下定(数)余一，除之，右衍余一(③)。次以商二与左下归数相乘，得二。加入左上天元一内，共得三。今验右上衍余，得一当止，乃以左上三为乘率。(④)

①		②		③		④	
					q_3 2		q_3 2
j_1 1	a 3	j_1 1	a 3		r_3 1	j_3 3	r_3 1
	b 4	j_2 1	r_2 1	j_2 1	r_2 1	j_2 1	r_2 1
			q_2 1				

虽然入算数字小且少，但大衍求一术运用准确，特别是“右上…衍余，得一而止，”交待周到。

这就是说已求出 $F_1=F_2=F_3\ 1$，$F_4=3$

(vi)求用数 按常规计算，应分别为 12，12，4，9。(按正用定义，此处$\sum_{i=1}^{4}F_iM_i=37=3M+1$)秦氏为附合《周易》“其用四十有九”的需要，非但不减小，反而又增多一个 M，即令第二个用数成为 24。虽然对答数没有影响。这是答数所说一楪用数 12，二楪用数 24，三楪用数 4，四楪用数 9 的由来。

(vii)计算各总，分别得 12，24，12，9，并总，得 57，所求 $x_0=57(\mathrm{mod}\ 12)\equiv 9$。

按照秦九韶的说法：$\frac{9}{3}=3$，N 取 3，属于少阳，应划阳爻。

秦氏为附会“大衍之数五十”甚至还把第(iii)步的衍数也不惜更改，他以单位分数$\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$求和，分子、分母齐同原理

求衍数，四者分别表示衍数(图 4.4.6)1×2×3×4，1×1×3×4，1×2×4，1×2×3 即 24，12，8，6。这就是答数所说："一元衍数 24，二元衍数 12，三元衍数 8，四元衍数 6" 以上四位衍数和计 50。

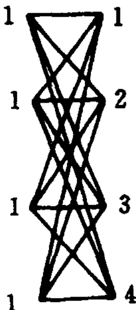


图 4.4.6

秦氏也知这仅是表面文章好看，对解题毫无用处，所以他在具体解法中又说："算理不可以此五十为用…遂乃复以一、二、三、四之元数求等数，约定。按前术，以两两连环求等约之。" 即变换为定母后，另取 12，12，4，3 为衍数，一如上面第(ii)步骤所记。

这是一道穿凿附会的数学游戏，藏首露尾，使后人很难读懂，而且游戏本身也编得不很高明。例如泛用之和如取 12+12+4+9=37，不增加为 37+12=49，在 37 根蓍草中分为两部分，每部分蓍草不过二十余根，不必通过繁复的分揲解同余式组，去求这部分有多少根，直接去数，不就得出结果吗？秦氏自己也说："四十九名曰用数，用为蓍草数，故《易》曰其用四十有九是也。假令用蓍四十九，信手分之为二，则左手奇，右手必偶；左手偶，右手必奇……就其三十七泛为用数。但三十七无意义，兼蓍少太露、是以用四十有九。凡揲蓍求一爻之数，欲得一、二、三、四，出于无为，必令揲者不得知。"

现以下表(表 4.4.4)比较《周易》、秦氏取爻的数学意义

表 4.4.4

文献	《周易·系辞上》	《数书九章·蓍卦发微》
起头	$50\begin{cases}1\\49\end{cases}$	$50\begin{cases}1\\49\end{cases}$，$49\begin{cases}x\\49-x\end{cases}$

续表

文献	《周易·系辞上》	《数书九章·蓍卦发微》
一变	$49\begin{cases}1\\ x\dot{\equiv}r_1\pmod{4}\\ 48-x\dot{\equiv}r_2\pmod{4}\end{cases}$① $r_1+r_2=4$ 或 8。余下 44 或 40 根	$x\dot{\equiv}r_1\pmod{2}$
二变	$44\begin{cases}y\dot{\equiv}r_3\pmod{4}\\ 44-y\dot{\equiv}r_4\pmod{4},\end{cases}$ 或 $40\begin{cases}y\dot{\equiv}r_3\pmod{4}\\ 40-y\dot{\equiv}r_5\pmod{4},\end{cases}$ $r_3+r_4=r_3+r_5=4$ 或 8 余下 32，36 或 40 根	$x\dot{\equiv}r_2\pmod{3}$
三变	$40\begin{cases}z\dot{\equiv}r_6\pmod{4}\\ 40-z\dot{\equiv}r_7\pmod{4},\end{cases}$ $36\begin{cases}z\dot{\equiv}r_6\pmod{4}\\ 36-z\dot{\equiv}r_8\pmod{4},\end{cases}$ 或 $32\begin{cases}z\dot{\equiv}r_6\pmod{4}\\ 32-z\dot{\equiv}r_9\pmod{4},\end{cases}$ $r_6+r_7=r_6+r_8=r_6+r_9=4$ 或 8	$x\dot{\equiv}r_3\pmod{4}$

① $a\dot{\equiv}r\pmod{b}$ 与 $a\equiv r\pmod{b}$ 同义，当 $b\nmid a$，但 $a\dot{\equiv}b$，当 $b|a$，不同处在于 $a\dot{\equiv}a\pmod{a}$，而 $a\equiv a\equiv 0\pmod{a}$。

续表

文献	《周易·系辞上》	《数书九章·蓍卦发微》
画爻	三变后余下 36,32,28 或 24 根,则 24　老阴－－ 28　少阳—— 32　少阴－－ 36　老阳——	解同余式组 $x\equiv r_1 \pmod 2 \equiv r_2 \pmod 3 \equiv r_3 \pmod 4$ 设其解为 $x_0\equiv \sum_{i=1}^{3} F_iM_ir_i \pmod{12}$ 取 $N=\left[\dfrac{x_0+2}{3}\right]=$ $\begin{cases} 1\ (0<x_0\leqslant 3)\ \text{老阴－－} \\ 2\ (3<x_0\leqslant 6)\ \text{少阳——} \\ 3\ (6<x_0\leqslant 9)\ \text{少阴－－} \\ 4\ (9<x_0\leqslant 12)\ \text{老阳——} \end{cases}$
作卦	经十八变六爻而成卦	

第四节　一次同余式组(治历演纪术)

一　数学原理

问题的提出：设制历年是甲子年，回归年周期为 $365+\frac{a}{b}$ 日，朔望月周期为 $29+\frac{c}{b}$ 日，制历那一年冬至点在十一月甲子日子正后 r_1 日，最近一次月朔在甲子日子正后 r_2 日(图 4.4.7)。求制历年冬至到上元时距有多少年？

设制历年上距上元有 x 年，即历过年数或上元积年，则据题意列出同余式

$$\left(365+\frac{a}{b}\right)x\equiv r_1 \pmod{60}$$

$$\equiv r_1-r_2\left(\bmod\ 29+\frac{c}{b}\right)$$

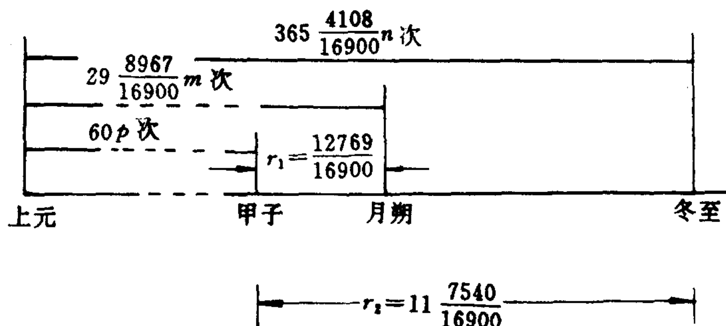


图 4.4.7

化简分数模为整数模

(i)$(365b+a)x\equiv r_1b \pmod{60b}$

$$\equiv(r_1-r_2)b \pmod{29b+c}$$

记为　$Ax\equiv R_1 \pmod{B}$，　(1)

$Ax\equiv R_1-R_2 \pmod{C}$，　(2)

其中 $A=365b+a$，$B=60b$，$R_1=r_1b$，$R_2=r_2b$，$C=29b+c$

当 A，B，R_1，R_2 相当大时，不便[①] 用大衍总数术解题，改用代入法，并不断运用同余性质只取系数的余数，以简化运算，并且用大衍求一术解同余式："治历演纪"术的关键是以(1)的解代入(2)式求解，这种解法就称为治历演纪术。

(ii)解(1)式，由于 $60|x$，就设 $x=60X$，又取 $L=\left[\frac{R_1}{H}\right]$或 $L=\left[\frac{R_1}{H}\right]+1$[②]，其中 $H=60$

把(1)式变换为

$$FX\equiv L_1 \pmod{E}^{③} \qquad (3)$$

① 一般说，非但不便，甚至不能。

② 这是近似值，显然是在影响答数不太大的变通，使同余式有解。

③ E 就是 b。

用大衍求一术解 $FX\equiv 1 \pmod E$，设其解为 X_0。简化 $X_0L\equiv Q \pmod E$ 使 $0\leqslant Q<E$，则所求 $x\equiv 60Q \pmod{60E}$。又设 $60Q=M$，$60E=N$，

改记为
$$x=Ny+M, \tag{4}$$

(iii)把(4)式代入(2)式，得
$$A(Ny+M)=R_1-R_2 \pmod C, \tag{*}$$

简化 A，取 $A\equiv J \pmod C$ 使 $0\leqslant J<C$，于是
$$JNy+JM=R_1-R_2 \pmod C,$$

简化 JM，取 $JM\equiv S \pmod C$，使 $0\leqslant S<C$。于是(*)变换为
$$JNy\equiv R_1-R_2-S \pmod C。$$

如果 $R_1-R_2-S=0$，取 $y=0$，则(2)的解是 $x=M$。

如果 $R_1-R_2-S>0$，取 $D=R_1-R_2-S$；$R_1-R_2-S<0$，取 $D=R-R_2-S+C$

解 $JNy\equiv D \pmod C$，

简化 JN，取 $JN\equiv G \pmod C$，使 $0\leqslant G<C$，于是(*)，同时(4)就进一步变换为
$$Gy\equiv D \pmod C。 \tag{5}$$

设 $(G,C)=d$，(5)等价于
$$F'y\equiv L' \pmod{E'} \tag{6}$$

其中 $F'=\frac{G}{d}$，$E'=\frac{C}{d}$，$L'=\left[\frac{D}{d}\right]$或$\left[\frac{D}{d}\right]+1$。

(iv)运用大衍求一术解，$F'Y\equiv 1 \pmod{E'}$，设其解为 Y_0，简化 $Y_0L'=K \pmod{E'}$，使 $0\leqslant K<E'$，则所求
$$y=K。$$

那么最终得所求解
$$x=Ny+M=NK+M=Y+M。$$

二 范题分析

我们紧接上面所揭示的数学原理，以秦氏及后人研究的算题

进一步追迹先辈严谨构思，在这一领域内的具体操作全过程。

1. 治历演纪

问：开禧历积年七百八十四万八千一百八十三，欲知推演之原：调日法[①] (b)、求朔余[②] (c)、朔率(C)、斗分(a)、岁率(A)、岁闰(J)、入元岁(Q)、入闰(S)、朔定骨(R_2)、闰泛骨(L')、闰缩(D)、纪率(B)、气元率(N)、元闰(G)、元数(K)及气等率 (d)、因率(X_0)、蔀率(E)、朔等数(d)、因数(Y_0)、朔积年(Y)、积年(x)二十三事各几何？

(答数：日法($b=16\ 900$)，朔余($c=8\ 967$)，朔率($C=499\ 067$)，斗分($a=4\ 108$)，岁率($A=6\ 172\ 608$)，岁闰($J=183\ 604$)，入元岁($Q=9\ 180$)，入闰($S=474\ 260$)，朔定骨($R_2=29\ 669$)，闰泛骨($L'=163\ 771$)，闰缩($D=188\ 578$)，纪率($B=1\ 014\ 000$)，元闰($G=377\ 873$)，元数($Y_0=402$)，气等率($d=52$)，因率($X_0=144$)，蔀率($E=325$)，朔等数($d'=1$)，因数($Y_0=457\ 999$)，蔀数($E'=499\ 067$)，气元率($N=19\ 500$)，朔积年($Y=7\ 839\ 000$)，积年($x=7\ 848\ 183$)卷 3 第 3 题)

本题大意：开禧历以365.243 069 2日为一回归年，以29.530 591 71日为一朔望月，在南宋嘉泰四年(甲子、1204 年)制订此历，已知那年冬至发生在甲子日后11.446 154日，最近冬至那次月朔发生在甲子后后1.755 62日。问：用治历演纪术计算那年冬至上距上元时间(历过)是多少？又在推演过程中上列各种中间数据(共 23 个)各是多少？

解法：

本题以 20 页篇幅(全卷共 46 页)作出详解，如果说秦氏在

---

① “法”指分母。“日法”是朔望月不足一日的分数的分母。“调日法”即调整日法，是指用适当的分数近似地表示这个不足一日的数。

② 天文术语后的字母即第一节第一段数学原理中所用的相应名称。

“古历会积”一题中在命题和解法上出了疵漏，那么他在本题中的既严谨又灵活地综合运用各种理论和周到、踏实的计算足以补偿前者的失误，足征他对同余知识的熟练掌握，为便于读者深入理解，在上一段数学原理基础上，下面采用术文与具体数据对照方式介绍原著。

表 4.4.5

术文及草文	今　义
以历法求之，大衍入之，调日法：如何承天术。用强弱母子互乘，得数，并之，为朔余。	刘宋何承天(5 世纪)《元嘉历》最先用加成法取小数的近似分数①。他以 $\frac{26}{4}^{+}$，$\frac{9}{17}^{-}$ 作为朔望月的过剩与不足近似值。在此基础上得精度更高的近似分数：$\frac{399}{752}=\frac{26\times15+9\times1}{49\times15+17\times1}$，其中 752 为日法，399 为朔余。 秦九韶取16 900为日法(b)。其理由之一是16 900＝52×325 适为蔀率(E)，又气等率 $d=$
	52，对约简系数大有好处。另外当取16 900＝49×339＋17×17 时，朔余将是 $c=26\times339+9\times17=8\ 967$。所得近似分数$\frac{8\ 967}{16\ 900}=0.530\ 591\ 7$有最高精度。比取日法为16 600，16 700，16 800，17 000，17 100，17 200都好。
以二十九日通日法，增入朔余，为朔率。	8 967＋16 900×29＝499 067(c)

① 参见本《大系》第四卷第三编第一章第二节。

续表

术文及草文	今　义
又以日法乘…所测冬至气刻分，收弃末位为偶数，得斗分。	$16\ 900\times0.243\ 069\ 2\approx4\ 108(a)$
	把 r_1，r_2 也分别化为以16 900为分母的近似分数，其中 $r_1=11.446\ 154\approx11\frac{7\ 540}{16\ 900}$ $r_2=1.755\ 562\approx1\frac{12\ 769}{16\ 900}$ 设所求历过为 n 日，问题就相当于解同余式组(图 4.4.7)

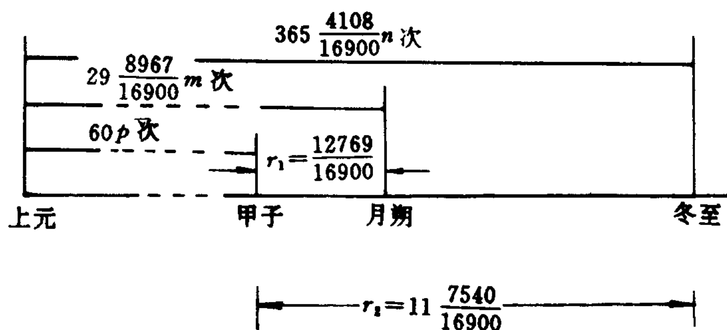


图 4.4.7

续表

术文及草文	今 义
却置本历上课所用嘉泰甲子岁气骨(r_1)十一日四十四刻六十一分五十四秒以乘日法得一十九万三千四百四十为气定骨。次置岁日三百六十五以日法通之，得六百一十六万八千五百，并斗定分四千一百八，得六百一十七万二千六百八，为岁率。	$\begin{cases} n\equiv 11\dfrac{7\,540}{16\,900}\pmod{60} \\ n\equiv 11\dfrac{7\,540}{16\,900}-1\dfrac{17\,671}{16\,900}\left(\bmod\ 29\dfrac{8\,967}{16\,900}\right) \end{cases}$ 化为同解的整数模同余式组 $\begin{cases} 16\,900n\equiv 193\,440\pmod{1\,014\,000} & (*) \\ 16\,900n\equiv 163\,771\pmod{499\,067} & (**) \end{cases}$ 为针对题问，化历过日数为 x 年数(1 年＝$365\dfrac{4\,108}{16\,900}$日)于是(＊)又变换为① $6\,172\,608x\equiv 193\,440\pmod{1\,014\,000}\quad(1)$ 这就是 $Ax\equiv R_1\pmod{B}$
次置本历所用嘉泰甲子岁天正月朔一日七十五刻五十五分六十二秒，以日法乘之，得二万九千六百六十八分…，就近收秒为一分，共为二万九千六百六十九为朔定骨数，然后乃以朔定骨减气定骨一十九万三千四百四十，余一十六万三千七百七十一为闰泛骨。	(＊＊)变换为 $6\,172\,608x=193\,440-29\,669$ $\equiv 163\,771\pmod{499\,067}\quad(2)$ 这就是 $Ax\equiv R_1-R_2\pmod{C}$

① 式号与第一章数学原理相对应。

续表

术文及草文	今　义
以大衍术入之，求得五十二为等数，一百四十四为因率，三百二十五为蓓率。以甲子六十为纪法，乘等数，得三千一百二十为约率。 然后以约率三千一百二十除之，得六十二。以因率一百四十四乘之，得八千九百二十八，满蓓率三百二十五去之，不满一百五十三，以纪法六十乘之，得九千一百八十年，为入、元、岁。	由于式中的数太大，秦氏审时度势，给予简化：其一，制历年与上元年都是甲子，因此 $60\mid x$。其二，从同余式性质考虑，只保留系数关于模的余数。其三，如果系数、常数、模有公约数，就尽量约去这些公约数 从 $6\ 172\ 608=365\times16\ 900+4\ 108\equiv4\ 108\pmod{16\ 900}$ (1)式化简为 $4\ 108\times60X\equiv193\ 440\pmod{1\ 014\ 000}$ 恰好 $(4\ 108\times60,193\ 440,1\ 014\ 000)=52\times60=3\ 120$。于是 简化为　$79X\equiv62\pmod{325}$　(3) 这是　$FX\equiv L\pmod{E}$ 用大衍求一术解　$79X\equiv1\pmod{325}$ 其解 $X_0=144$，简化　$62\times144\equiv153\pmod{325}$ 得所求　$x=153\times60=9\ 180\pmod{19\ 500}$ $x=19\ 500y+9\ 180$。　(4) 这就是　$x=Ny+M$
六百一十七万二千六百八为岁率却以十二月乘朔率四十九万九千六十七得五百九十八万八千八百四，减岁率，余一十八万三千八百四为岁闰。	把 x 值代入(2)式，经变换，得 $6\ 172\ 608(19\ 500y+9\ 180)\equiv163\ 771\pmod{499\ 067}$ 而 $6\ 172\ 608=499\ 067\times12+183\ 804=5\ 988\ 804+183\ 804\equiv183\ 804\pmod{499\ 067}$

续表

术文及草文	今义
以岁闰乘入元岁九千一百八十得一十六亿八千七百三十二万七百二十满朔率去之，不满四十七万四千二百六十为入闰。	秦氏觉察到 $183\ 804\times 9\ 180\equiv 474\ 260 \pmod{499\ 067}$ $183\ 804\times 19\ 500\equiv 377\ 873 \pmod{499\ 067}$
乃以元闰三十七万七千八百七十三与朔率四十九万九千六十七用大衍术求之，得固数四十五万七千九百九十九。蓊数四十九万九千六十七。然后以等数一约闰缩，只得一十八万八千五百七十八，以因数四十五万七千九百九十九乘之，得八百六十三亿六千八百五十三万五千四百二十二。满蓊数四十九万九千六十七去之，不满四百二。乃以乘元率一万九千五百得七百八十三万九千年，为朔积年。并入元岁九千一百八十，共得七百八十四万八千一百八十为嘉泰四年甲子岁积筭。本历系于丁卯岁进呈，又加丁卯三年，共为七百八十四万八千一百八十三筭，为本历积年。	于是(2)式又简化为 $377\ 873y\equiv 188\ 578 \pmod{499\ 067}$ (6) 这就是 $FY\equiv L' \pmod{E'}$ 用大衍求一术解 $377\ 873Y\equiv 1 \pmod{499\ 067}$ 得解 $Y_0=457\ 999$ $y=457\ 999\times 188\ 578$ $\equiv 402 \pmod{499\ 067}$ 代入(4)式 所求 $x=19\ 500\times 402+9\ 180=7\ 848\ 180$ 如果从开禧历进呈年，开禧三年(1207年)，起筭，此年上距上元为 $7\ 848\ 180+3=7\ 848\ 183$(年)

秦九韶这一解题工作是在前人基础上有创造性的成果。所以在冗长、数大的计算全过程结束时他深有体会地说:“数理精微,不易窥识。穷年致志,感于梦寐。幸而得之,谨不敢隐。”联系他在《数书九章·序》中又说:“早岁侍亲中都,因得访习于太史。”可见他命此题有其真实历史背景:《宋史·律历志十七》记:“开禧上元甲子至开禧三年丁卯当积七百八十四万八千一百八十三年”与本题结果完全符合。《宋史》仅记数据而略去计算理论和过程。秦氏在本题中以 20 页篇幅发挥绝学。在此庞大天文数字面前,古人怎样运筹获得准确结果,端赖秦氏在本题中所写下的这一忠实而珍贵的记录才得于传世。

此外本题解法中秦氏还以中国数码字实录运算全过程。使人感到尤为兴趣的是怎样用筹算用大衍求一术解一次同余式。本题在解第(6)式时求

$$377\ 873y \equiv 1 \pmod{499\ 067}$$

做了十一次更相减损。以下还以第一节第四段(今释)解的格式用阿拉伯数字表示秦氏解此题的全过程如下表。图 4.4.8 为原著书影,显示其计算过程的开始和结束,直至得最后答数。见表 4.4.6。

表 4.4.6

j_1 1	a 377 873
	b 496 067

j_1 1	a 377 873
j_2 1	r_2 121 194
	q_2 1

	q_3 3
j_3 4	r_3 14 291
j_2 1	r_2 121 194

j_3 4	r_3 14 291
j_4 33	r_4 6 866
	q_4 8

	q_5 2
j_5 70	r_5 559
j_4 33	r_4 6 866

j_5 70	r_5 559
j_6 873	r_6 158
	q_6 12

	q_7 3
j_7 2 689	r_7 85
j_6 873	r_6 158

j_7 2 689	r_7 85
j_8 3 652	r_8 73
	q_8 1

	q_9 1
j_9 6 251	r_9 12
j_8 3 562	r_8 73

j_9 6 251	r_9 12
j_{10} 41 068	r_{10} 1
	q_{10} 6

	q_{11} 11
j_{11} 457 999	r_{11} 1
j_{10} 41 068	r_{10} 1

图 4.4.8

2. 唐麟德历

问：今有唐麟德术：日法一千三百四十，岁实四十八万九千四百二十八，朔实三万九千五百七十一。实测到麟德元年甲子岁天正冬至日辰甲子，小余二百四十，闰余一万七千七百七十。欲

以甲子岁天正十一月甲子夜半合朔冬至为上元，问：上元距麟德元年岁积几何？

(答数:269 880)

题引自张敦仁《求一算术》(1803年)卷下。

查《新唐书》卷二十六，志第六，历二[①]记："高宗时，戊寅历益疏，淳风作甲子元历以献，诏太史起麟德二年(635年)颁用，谓之麟德历。"后又记有关数据及计算上元积年结果："麟德元年距上元积二十六万九千八百八十算。总法：一千三百四十，期实：四十八万九千四百二十八，朔实：三万九千五百七十一"并略示计算方法："以期实乘积算为期总，如总法而一，为日，六十去之，命甲子算外，得冬至。累加日十五，小余二百九十二，小分六之五，得次气，六乘小余，辰率而一命子半算外，各其加时。"张敦仁以此语焉不详的文献为据编题，借助于《秦九章》演纪术复原唐时算法，所得上元积年正确无误，他的草文列问题后约一千余字，相当于说：

对照本节第一段数学原理，本题(图4.4.9)与开禧历实测有异之处为：甲子在合朔、冬至之间。如设制历年上距上元为X年，应列出同余式

$$\left(365+\frac{a}{b}\right)x \equiv r_1 \pmod{60}$$

$$\equiv r_2 \left(\bmod\ 29+\frac{c}{b}\right)$$

题中已给数据，就是：日法$(b)=1\ 340$，岁实$(365b+a)=489\ 428$，朔实$(29b+c)=39\ 571$，小余$(r_1)=240$，闰余$(r_2)=17\ 770$。张氏考虑到从麟德元年到上元年数是60的倍数，所以他改设$x=60X$，又假设从制历年冬至至上元日数含有Y个纪(每纪为60

① 新唐书第二册(校点本)．北京：中华书局，1977：559～560

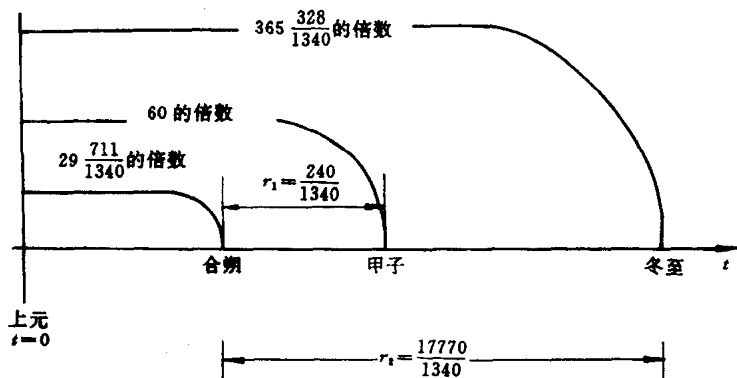


图 4.4.9

日)，于是上面两个同余式可改写为三元不定方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{489\ 428}{1\ 340}\cdot 60X=60Y+\dfrac{240}{1\ 340}, & (1)\\ \dfrac{489\ 428}{1\ 340}\cdot 60X=\dfrac{39\ 571}{1\ 340}Z+\dfrac{17\ 770}{1\ 340}。 & (2)\end{cases}$$

其中 Z 为从制历年冬至附近月朔上距上元月数。

张氏草文相当于对方程(1)：约分、通分，得

$$122\ 357X=335Y+1。$$

以 335 为模，进一步化简，相当于得到

$$82X\equiv 1(\bmod 335)。\tag{3}$$

仿照秦氏术语称 335 为蔀率(E)，82 为奇率(F)。张氏用大衍求一术解得最小正整数解为 143，亦称为因率(X_0)于是

$$x=60X_0\equiv 8\ 580(\bmod 20\ 100)\tag{4}$$

同样，8 580，20 100分别称之为入元岁(Q)，气元率(N)，以 x 值代入方程(2)，得

$$\frac{489\ 428}{1340}\cdot(8\ 580+20\ 100y)=\frac{39\ 571}{1\ 340}Z+\frac{17\ 770}{1\ 340}$$

$$489\ 428\cdot 8\ 580+489\ 428\cdot 20\ 100\cdot y=39\ 571Z+17\ 770。$$

而 $$489\ 428 \equiv 14\ 576 \pmod{39\ 571}$$

等式左边化简为

$$14\ 576 \cdot 8\ 580 = 125\ 062\ 080 \equiv 17\ 720 \pmod{39\ 571}$$

$$14\ 576 \cdot 20\ 100y = 292\ 977\ 600y \equiv 33\ 487y \pmod{39\ 571}$$

同样14 576，17 720，33 487用秦氏演纪术的术语，分别称为岁闰(J)，入闰(S)，元闰(G)，于是

$$17\ 720 + 33\ 487y \equiv 17\ 770 \pmod{39\ 571}$$

$$33\ 487y \equiv 50 \pmod{39\ 571} \tag{5}$$

用大衍求一术解 $33\ 487y \equiv 1 \pmod{39\ 571}$

张氏称解 $Y_0 = 39\ 571$ 为因数，50 为闰缩(D)33 487为元闰(G)。于是同余式(5)的解 $y = 39\ 571 \cdot 50 \equiv 13 \pmod{39\ 571}$，称元限数，即秦氏所称元数($K$)。

因此所求 $x = 13 \cdot 20\ 100 + 8\ 580 = 269\ 880$

运算至此，张氏总结说：“十三为元限数，以乘气元率二万一百，得二十六万一千三百为朔积年，以入元岁八千五百八十加之，得二十六万九千八百八十，即上元甲子至麟德元年甲子积算也。”

唐麟德历上元积年在国家正史仅示实测数据和计算结果，未给计算过程。张敦仁循秦氏演纪术，对之作了算法复原。此外他还对唐大衍历宋崇天、纪元历作了同样工作，足以证明我国历代上元积年计算都用此法完成。

第五节　大衍术数学思想的演进

大衍术牵涉面甚广，结构复杂，理论完整、严谨，算法程序明确。冰冻三尺，非一日之寒，它有漫长的形成过程，我们试作探索。

一 同余记数的逆问题

同余是自然数记数法的特殊变通形式。我中华民族以天干地支纪年是以同余定年序中的应用。其制肇源甚古[①]，殷墟甲骨文已有六十个干支序数完整记载。本《大系》第一卷第二编图文并茂地作了专题介绍(该卷图 2.2.12-16)。确定某年作为历法起算年(上元之年)之后，就按干支为序，命名后继年份。满 60 年又循环反复定序。这是对年序数的同余。制历者同样对月份、日期都用同一概念(干支)取其同余记序。

我国很早就出现同余记数的逆问题。实测某些星象出现在冬至点(年之初始时刻)之后日数(含分数)，反算上元发生在测前最短时间(年数，称为上元积年，月数、日数分别称为上元积月、积日)。推算上元积年成为中国治历重要内容。甚至有人说："一部中国历法史，几乎可以说是上元的演算史。"[②]从现存文献看，求上元积年之举最早是《汉书·律历志》："汉太初元年距上元十四万三千一百二十七年。"这是指汉三统历：以子夜(日之首)、月朔(月之首)、冬至(年之始)会合时刻为上元。此历日、月、年公共周期定为4 617年，"太初元年(公元 104 年)……前十一月甲子、朔旦、冬至，岁在星纪婺女六度。"这是说太初历又从岁星(木星)在冬至时位置推算上元(日、月、年之首以及岁星会合时刻)积年。三统历规定周天(年)12 等分，每等分称为"次"，当时实测岁星每 144 年运转 145 周天，即 12×145 "次"。当时还规定周天 12 "次"与 28 宿距度，婺女 6 度约为 $r=\frac{135}{144}\sim\frac{139}{144}$ "次"，因此所求

---

① 干支纪年文献可以上溯到西周共和行政元年庚甲(公元年 841 年)，绵延至今已近三千年了。我们计算 $841+1\ 999=2\ 840\equiv20 \pmod{60}$。庚申是一纪的最后第 4 年，所以今年是一纪的第 16 年己卯，肖兔。

② 陈遵妫．中国天文学史第三册．北京：中华书局，1988：1391

木星上元积年 N，应是同余式$\frac{145}{144}N=12q+\frac{r}{144}$。$N=4\ 617p$，$p$ 是正整数，也就是说 $N=4\ 617\times145p\equiv r(\mathrm{mod}\ 1\ 728)$，其中，$r$ 选择 135，同余式才有解 $p=31$，而所求

$$N=4\ 617\times31=143\ 137。$$[①]

三统历运用太初元年所测数据，推算上元积年，只要解一个同余式。

发展到魏晋时代，随着测量精度提高，推算上元积年进一步要求解同余式组。魏景初历(公元 237 年)实测当年冬至点在甲子日子夜零点后，我们设为 r_1 日，在月朔后 r_2 日。求景初历上元积年 N，相当于要解同余式组。

$$aN\equiv r_1(\mathrm{mod}\ 60)\equiv r_2(\mathrm{mod}\ b)$$

其中 a，回归年日数，b，朔望月的日数。可见在魏晋时代因天文需要已有、也必须解决，解同余式组的要求。

二　　孙子物不知数题探源

由于魏晋时代制历的需要，数学问题从解一次同余或发展到解一次同余式组。解同余式组问题成为突出的时代需要。“大约在 3 世纪历法工作者开始应用剩余定理计算上元积年。我们认为……物不知数题解法不是作者的向壁虚造，而很可能是依据古代天文学家的上元积年算法写出来的。”[②] 以孙子为代表的中国数学家以

$$x\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)\equiv3(\mathrm{mod}\ 5)\equiv2(\mathrm{mod}\ 7)$$

为例。虽然讲的只是一个特殊问题，而其术文足以指导解一般一次同余组(含 n 个同余式)。南宋杨辉自拟含四个同余式

---

① 李文林. 1979：70～75

② 钱宝琮. 1964，pp. 78～79

$$x\equiv 1 \pmod 2 \equiv 2 \pmod 5 \equiv 3 \pmod 7 \equiv 4 \pmod 9$$

的同余组就忠实模拟孙子术文得解 $x\equiv 3\,307\equiv 157 \pmod{630}$。

孙子解题思想是顺理成章的，他用朴素的语言在术文中说："凡三、三数之，剩一，则置七十。"是指 70 除以 5，7 都无余数，除以 3 则余 1，他抓住这一重要契机，联想到"凡五、五数之，剩一，则置二十一，凡七、七数之，剩一，则置十五。"这就易于推断：70＋21＋15＝106 分别除以 3，5，7 都有余数 1。在此基础上，再进一步解决题文要求："三、三数之，剩二，置一百四十；五、五数之，剩三，置六十三；七、七数之，剩二，置三十。并之，得二百三十二。以二百一十减之，即得。[二十三]。"

随着天文仪器的改进和测量方法的完善，同余式的模数出现分数，模数之间又出现不两两互素问题。经过很多代人的研究，中国数学家终于较完整地得到解决：迄两宋在《宋史》，虽给出实测数据，也给出计算结果，但略去具体算法。幸《秦九章》保存其细节，名为大衍术。欧洲在年序问题上也产生过类似问题，也经过几代人的攻关，经德国高斯(C. F. Gauss，1777～1855 年)总结解法，作为《算术探讨》[1] 第一、二两章名为解同余式组。秦九韶所说虽早于高斯 550 多年，却可以逐句对照高斯解法，并无逊色，我们列表如表 4.4.7

表 4.4.7

《秦九章》大衍总数术	高斯《探讨》第二章命题 31
置诸问数……求定数，勿使两两有偶	z 除以 A，B，C，D，…，余数分别是 a，b，c，d，…。A，B，C，D 互素
以定相乘为衍母	$ABCD\cdots$

[1] 高斯，1801

《秦九章》大衍总数术	高斯《探讨》第二章命题 31
以各定约衍母，各得衍数。以奇与定，用大衍求一入之，以求乘率①	$BCD\cdots$，$ACD\cdots$，$ABD\cdots$，$\cdots$ 求 α，β，γ，$\cdots$，使 $\alpha\equiv1(\mathrm{mod}\ A)\equiv0(\mathrm{mod}\ BCD\cdots)$ $\beta\equiv1(\mathrm{mod}\ B)\equiv0(\mathrm{mod}\ ACD\cdots)$ $\gamma\equiv1(\mathrm{mod}\ C)\equiv0(\mathrm{mod}\ ABD\cdots)$ ………
置各乘率，对乘衍数，得正用	α，β，γ，$\cdots$
其余［数］乘用，为各总	$a\alpha$，$b\beta$，$c\gamma$，$\cdots$
并总	$a\alpha+b\beta+c\gamma+\cdots$
满衍母去之，不满为所求数	$z=a\alpha+b\beta+c\gamma+\cdots(\mathrm{mod}\ BCD\cdots)$

三　处理不两两互素模的思想渊源

秦氏所总结的大衍总数术已能解一次同余式组，但只限于两两互素模，否则将发生不可避免的麻烦，我们已言之数。即以汉代三统历来说，推算上元积年、对 r 的挑选就可以说明：中国远在汉代已认识到 $(a,b)|c$ 是同余式

$$ax\equiv c(\mathrm{mod}\ b)$$

有解的必要条件。在《数书九章》中大量出现形如

$$BCD\alpha'\equiv1(\mathrm{mod}\ A)$$

类型的同余式。如果所给模 A，B，C，D，$\cdots$不两两互素，势必不满足必要条件，同余式无解。而上元积年却客观存在，同余式

① 表中：为简化运算，秦氏取 BCD 关于 A 的余数(奇)$q_{BCD}=BCD(\mathrm{mod}\ A)$，那么 $\alpha' q_{BCD}\equiv1(\mathrm{mod}\ A)$与 $\alpha' BCD\equiv1(\mathrm{mod}\ A)$等价。二者又与高斯同余组 $\alpha\equiv1(\mathrm{mod}\ A)\equiv0(\mathrm{mod}\ BCD)$同义；而高斯同余组与孙子物不知数题术文所说 70，21，15 相对应。秦氏同余式中的解 α' 已缩小 BCD 倍，即 $\alpha=BCD\alpha'$。同理 $\beta=ACD\beta'$，$\gamma=ABD\gamma'$，……这里 α'，β'，γ'秦氏称为乘率。

组应有解。因此化不两两互素模为两两互素模，且要求同余组前后等价，成为解题的关键。矛盾的解决，也推动了数学的进步。正如欧洲为球摆问题引入解三次方程

$$x^3+3ax+2b=0$$

其求根公式为 $x=\sqrt[3]{-b+\sqrt{b^2+a^3}}+\sqrt[3]{-b-\sqrt{b^2+a^3}}$。

而当 $b^2+a^3<0$ 时，$x^2=-1$ 的矛盾必须解决，因为实系数三次方程必然存在实根。数概念从实数扩张到复数，数学取得进步。

不两两互素模化为两两互素且前后同余式组等价的矛盾的解决，牵涉到三方面知识：

其一，最大公约数《九章算术·方田》约分术已明确指出用更相减损求两数的最大公约数(求等)。我国古代虽然没有素数概念，更相减损足以求二数（及以上）的最大公约数。

其二，最小公倍数《汉书·律历志》："五星会终，触类而长之，以乘章岁，为二百六十二万六千五百五十，而与日月会。"说明在公元前 2 世纪我国已能计算大数的最小公倍数。这里是说五星与日、月公共周期。可以验证，三统历所记五行星运行大周，分别是水星9 216年，金星3 456年，火星13 824年木星1 728年，土星4 320年，又以 19 年为一章[①]，因此

$$2\,626\,560=\{9\,216,\ 3\,456,\ 13\,824,\ 1\,728,\ 4\,320\}\times 19,$$

怎样求几个数 a，b，c，…的最小公倍数？在先秦已成书的《九章算术·少广》已有能力胜任，我们已在本《大系》第二卷详述，不赘。[②]

其三，化不两两素的模数为两两互素，秦九韶在解同余式组时深有体会地提醒和告诫人们："求定数，(目的是)勿使两位见偶。

① 李文林，1979，pp. 70～75

② 参见本《大系》第二卷，pp. 152～155

(有公约数)。”估计他从许多特殊情况观察、分析，已认识同余式组有以下性质。

性质1　余数不等，而模数相等的同余式等价，如 $x\equiv r_1(\text{mod } m)$，$x\equiv r_2(\text{mod } m)$等价，因此二者得任意舍弃其一，这在大衍术中归纳为一般："满衍母去之"，在余数中不论舍去多少个模，前后同余式同解。

性质2　余数相等而模数不相等的同余式组，与这些模数乘积作为模的同余式等价，这是说，同余式组

$$x\equiv r(\text{mod } m_1)\equiv r(\text{mod } m_2)\equiv\cdots\equiv r(\text{mod } m_n)$$

与同余式　$x\equiv r(\text{mod } m_1m_2\cdots m_n)$等价。

这一事实，当是受孙子物不知数术文的启示：

$$x\equiv(\text{mod } 3)\equiv1(\text{mod } 5)\equiv1(\text{mod } 7)。$$

答数　$x\equiv1(\text{mod } 3\times5\times7)$。

易于联想和推出

当　$x\equiv a(\text{mod } 3)\equiv a(\text{mod } 5)\equiv a(\text{mod } 7)$，

则　$x\equiv a(\text{mod } 3\times5\times7)$。

从此很自然会引申，认识到：一般说，余数相等而模数是另一同余式模数的倍数时，后者是同语反复，应该舍弃。

就基于上述两性质，以秦氏为代表的中国数学家顺利完成化同余式组中不两两互素模为两两互素模的等价变换，主导思想是：当同余式组中两同余式中的模不两两互素，例如

$$x\equiv r_1(\text{mod } m)\equiv r_2(\text{mod } n)\text{①} \qquad (*)$$

就对 m，n 两两求等，设$(m,n)=d$，使$(*)$化为

$$x\equiv r_1(\text{mod } m_1d)\equiv r_2(\text{mod } n_1d)。\qquad (**)$$

至此，就"约奇弗约偶。"从性质2，把$(**)$视为等价的同余组

$x\equiv r_1(\text{mod } m_1)\equiv r_1(\text{mod } d)\equiv r_2(\text{mod } n_1)\equiv r_2(\text{mod } d)$，又从

① 当$(m,n)=d\mid|r_1-r_2|$时有解

性质 1 知，第二、第四式应舍弃其中一个，不妨说，弃去前者(约奇)，保留后者(弗约偶)，已把(＊)化为等价的互素模同余式组

$x \equiv r_1 (\mathrm{mod}\ m_1) \equiv r_2 (\mathrm{mod}\ n)$，其中$(m_1, n)=1$。

如果$(m_1, n) \neq 1$，就改为“约偶弗约奇”，取等价同余式组$x \equiv r_1 (\mathrm{mod}\ m) \equiv r_2 (\mathrm{mod}\ n_1)$，其中$(m, n_1)=1$ 此为“约一存一。”如果$(m_1, n)=d' \neq 1$，他就“或皆约，而犹有类数存，…又相减以求续等，以续等约彼，则必复乘此，乃得定母。”这里所谓续等，就是指 d'，“约彼”，指$\frac{m}{d'}$，“乘此”，指 $n_1 d'$。如果$\left(\frac{m}{d'}, nd'\right)=1$，则取

$$x \equiv r_1 \left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{d'}\right) \equiv r_2 (\mathrm{mod}\ n_1 d')$$

为(＊)的等价同余式组，此为“约一乘一。”

基于同一思路不借助于素数能获得满足三条件的互素模等价同余式组；对于含 n 个同余式的组用“两两连环求等”，“约一存一”，“约一乘一”，以获得互素模等价同余式组，事实上性质 1，2 是大衍术数学原理定理 15 的原始构思。

四 大衍求一术追迹

当同余式组化为 n 个彼此独立的同余式后，问题就转化为解这些同余式

$$ax \equiv 1 (\mathrm{mod}\ b). \qquad (*)$$

秦氏称解法为大衍求一术，有明确的解法程序(定理 10)此程序应得力于《九章算术·方田》更约减损术，互素两数 a，b 经更相减损(辗转相除)逐次商如为 q_1，q_2，q_3，…，q_n，q_{n+1}，则

$$\frac{b}{a}=q_1+\frac{1}{q_2+}\frac{1}{q_3+}\cdots\frac{1}{+q_n}\frac{1}{+q_{n+1}}。$$

它们对应的余数为 r_1，r_2，r_3，…，$r_n=1$，$r_{n+1}=0$。当 n 是单数时大衍求一术就是分别计算其部分和(渐近分数)的分母

$$q_1,\ q_1+\frac{1}{q_2},\ q_1+\frac{1}{q_2+}\frac{1}{q_3},\ \cdots,\ q_1+\frac{1}{q_2+}\frac{1}{q_3+}\cdots\frac{1}{+q_n}$$

最后一个和的分母就是同余式(*)的解，秦氏称为乘率。我们知道连分数无非是繁分数的简单记法，其化为普通分数的能力，我国自古已很熟悉，《九章算术》称繁分数为重有分。刘徽注方田章经分术，对之已有深入理解。另一方面，在天文历法计算工作中，已多次出现用渐近分数表示真值的例子。如用 3，$\frac{22}{7}$，$\frac{355}{113}$表示圆周率，用 19 年 7 闰(四分历)、391 年 144 闰(大明历)调整一年所含月数，用$\frac{145}{1\ 728}$，$\frac{7\ 855}{13\ 824}$分别表示木星和火星每年运行周天的渐近分数(三统历)。大量繁分数化为普通分数的运算，导致总结为规律，形成大衍求一术。

第六节　二元二次不定方程

这是一个需用二元二次不定方程解决的问题，这种类型的问题《数书九章》仅此一例。

方变锐阵

问：步兵五军，军一万二千五百人，作方阵，人立地，方八尺，欲变为前后锐阵，阵后宽，令多原方面半倍。阵间仍容骑路五丈以上，顺锐形出入。求：方阵面、锐阵长、及前后锐阵各布兵几何？

(答数:方阵边长 200 丈,每边布兵 250 人,正三角形阵侧边长 300 丈,每边列兵 362 人,底边长 300 丈,骑路两条,各宽 5.2 丈,内正三角形阵侧边长 145.6 丈,列兵 182 人,底边长 145.6 丈,共列兵16 653人,外面磬折形底宽各 72 丈,列兵 90 人,共布兵45 847人,卷 15 第 2 题)

参考译文：有步兵 5 个军，每军12 500人，列成方阵。每士兵

占地 8×8 方尺，要把方阵变形为正三角形阵，后者边长为方阵的 1.5 倍，三角形阵内部留出 5 丈宽以上骑道，平行两侧边，以利交通。求：方阵、三角形阵每边长及每边列兵多少人？

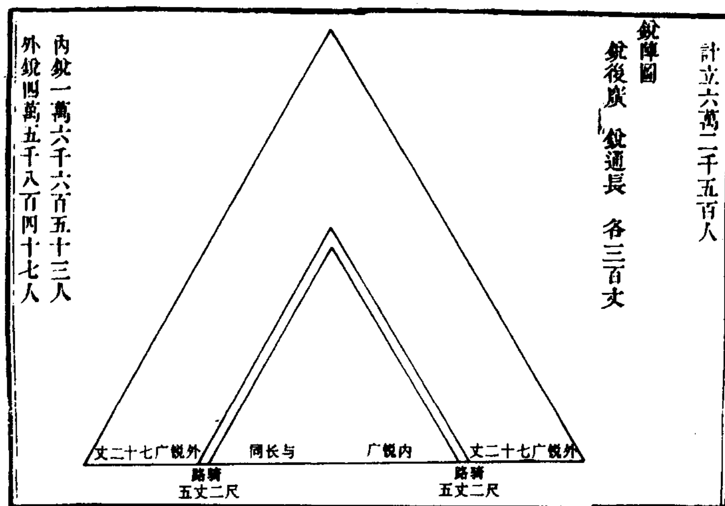


图 4.4.10

解法：本题原著术文相当于说：(图 4.4.10 为书影、图 4.4.11 系改画) 方阵每边有人 $s=\sqrt{5\times12\,500}=250$(人)，边长 $s_1=250\times0.8=200$(丈)，三角形阵边长 $t_1=200\times1.5=300$(丈)，设骑道宽 z_1(丈)。内正三角形边长为 x_1(丈)，列兵 $x=\dfrac{x_1}{0.8}$人。磬折形两底长为 y_1(丈)，列兵 $y=\dfrac{y_1}{0.8}$(人)。那么 $2y_1+2z_1+x_1=300$(丈)。所变形的正三角形底边实列兵人数为$\dfrac{300-2z_1}{0.8}$，这是对的。但是秦氏在后续计算中，取$\dfrac{300-2z_1}{0.8}\div4$　记余数为 r，误以为内三角形底

边人数 $x=2\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{300-2z_1}{0.8}\right]+r$。

其中还估计 $z_1=5.2$，认为 $x=182$。

当底边上有兵 182 人时，三角形拟形数总人数就按公式

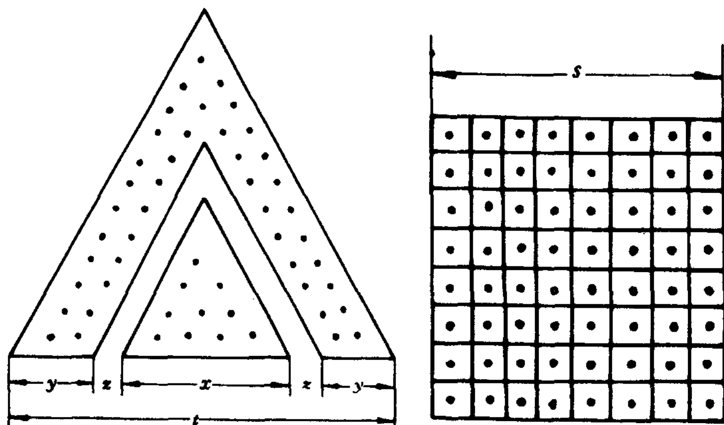


图 4.4.11

$$\frac{x}{2}(x+1)=16\ 653(\text{人})$$

他并没有计算磬折形内确有兵多少，却做了一次减法：说有兵　　$62\ 500-16\ 653=45\ 847$(人)。

四库馆臣最先发现最后那次减法的错误："以内锐阵兵数减前方阵兵数，余为外锐阵兵数，非是。盖无以知两总数为相等也。试以数明之：依求箭法，以总宽求得总三角数七万零五百，以内锐宽求得内三角数一百六千六百五十三人，以每人八尺除之，两骑路宽得十丈零四尺，得一十三人，与内锐宽相加得宽二百，求得内外间三角数二万零一百，置总三角数减内外间三角数、加内三角数，得六万七千零五十三，与前方阵兵数相较，多四千五百五

十三。安得谓之等乎?”虽然四库馆自己的计算也不踏实[1]，但已能揭露秦氏解法之谬，这是进步的一面。

实际上，三角形阵（拟形数）变换为含元素一样多的正方形阵是有条件的，设前者每边有元素 t 个，后者每边有元素 s 个，二者应满足

$$\frac{1}{2}t(t+1)=s^2,$$

即应满足二元二次式

$$t^2+t-2s^2=0。\tag{1}$$

这是二元二次不定方程。

按 t 为变数，解：$t=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+8s^2}\right)$。

当 $1+8s^2=u^2$，u 为整数时，(1)有正整数解。

又设　　　　　　　　$v=2s，1+2v^2=u^2，$

$u^2-1=2v^2$，其中 2 不是完全平方，它是佩尔(pell)方程，它的解有递推公式

$$\begin{cases}u_{n+1}=3u_n+4v_n,\\ v_{n+1}=2u_n+3v_n。\end{cases}\tag{2}$$

又整理 t，u；s，v 的关系为

$$\begin{cases}u=2t+1,\\ v=2s。\end{cases}\tag{3}$$

把(2)式代入(3)式

$$u_{n+1}=2t_{n+1}+1=3u_n+4v_n=3\ (2t_n+1)\ +4\cdot 2s_n,$$

又　$u_{n+1}=2s_{n+1}=2u_n+3v_n=2\ (2t_n+1)\ +3\cdot 2s_n$，这就是

$$\begin{cases}t_{n+1}=3t_n+4s_n+1,\\ s_{n+1}=2t_n+3s_n+1。\end{cases}\tag{4}$$

---

① 宋景昌在《数书九章札记》卷 4 中作多次正误，但他仍以 $x=182$ 为出发点，出发点错了，误正不了，此不赘述。

显然当　$n=1$ 时，$t_1=s_1=1$。
也就是说三角形阵变换为正方形阵(反之亦然)有无穷多组解，它们是 t_i：1，8，49，288，…，$s_i=1$，6，35，204，…$(i=1,2,\cdots)$。

秦题如要把正方形阵 $s=250$ 变换为含相同元素个数的三角形阵，这是不可能的问题，秦氏并没有这样做，他却说要把 $s=250$，即 $s^2=62\,500$变换为留有倒 V 字形骑道的 $t=375$ 的空心三角形阵，这是很现实的问题：如此大的军阵，不留骑道，何以内外交通？而且在理论上，此题是数学发展史上最早提出的二次不定问题，比较上引实心阵的不定方程在构思层次上更提高一步，与大衍类问题同样是在不定分析中的重要成果。

从不定分析考虑，这里有两个未知数①内正三角形边上元素个数，设为 x；②骑道宽应占元素个数，设为 z。既然 $t=375$，三角形阵当实心时，含元素$\frac{1}{2}(375)(375+1)=70\,500$个。而正方形阵元素为62 500个，那么那个倒 V 字形骑道上应含元素$\frac{1}{2}(x+2z)(x+2z+1)-\frac{1}{2}x(x+1)=70\,500-62\,500=8\,000$，

化简：
$$2z^2+4xz+z=8\,000。\qquad (5)$$
秦氏解法谬失的要害是：无视不定方程的性质，在(5)式中迳取 $x=182$ 并取 $z=6.5$。在硬行拼凑之下，得出与问题答数引起太大的舛差：

$$8\,000-(2(6.5)^2+4\times182\times6.5+6.5)\ =3\,177(人)。$$
有如许人数填不满那个空心三角形阵!

对不定方程(5)可试解如下：

把 x 作为变量 $z=-\frac{1}{4}(4x+1)+\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}(64\,001)}$，因此(5)没有正整数解，但它应有最佳近似解。

对(5)取 z 作为变量

$$x=\frac{2\ 000}{z}-\frac{z}{2}-\frac{1}{4}。\tag{6}$$

检测 $\left\{\frac{2\ 000}{z}\right\}$ 最接近于 $\frac{3}{4}$ 的 z，且 $\frac{2\ 000}{z}>\frac{z}{2}+\frac{1}{4}$，$z<64$

当 $z=41$，$\frac{2\ 000}{z}=48.780\ 4$，取 $x=28$；

$z=53$ $\frac{2\ 000}{z}=37.735\ 8$，取 $x=11$。

从(5)式计算：当 $x=11$，$z=53$ 时，$2z^2+4xz+z=8\ 003$，

$x=28$，$z=41$ 时，$2z^2+4xz+z=7\ 995$。

两者各分别还有误差 3，5(人)。骑道分别宽 $z_1=42.4$，32.8(丈)，与原题要求容骑路五丈以上，都超过很多。

此题也可以化为另一种形式的二次不定方程。

问：$s=250$ 正方形阵怎样变形为空心正三角形阵？按照秦题骑道宽 5 丈以上(左右)，设留出 7 个兵所占位置($0.8\times7=5.6$ 丈)那么问题改为内三角形阵底边元素个数 x 和磬折形底边元素个数 y 为变量，即解方程

$$\frac{1}{2}(x+2y+7\times2)(x+2y+7\times2+1)-\frac{1}{2}(x+7\times2)(x+7\times2+1)+\frac{1}{2}x(x+1)=62\ 500，$$

化简得

$$4y^2+(4x+58)y+x^2+x-125\ 000=0。\tag{7}$$

以 x 作为变量，

$$y=\frac{1}{4}\left(-2x-29+\sqrt{112x+500\ 841}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(-2x-29+u),$$

其中 $$u^2=112x+500\ 841。$$

表 4.4.8

y	z	x	z	y	s	$\frac{1}{2}s(s+1)$ $-\frac{1}{2}(x+z)(x+z+1)$ $-\frac{1}{2}x(x+1)$
103	7	140	7	103	360	62 895
104		138		104		62 945
105		136		105		63 694
110		124		110	358	62 420
111		122		111		62 446
112		120		112		62 476
113		118		113		62 554
114		116		114		62 532
115		114		115		62 560
116		112		116		63 148

从此获知(7)无正整数解，但是它应有最佳近似解。

检测（如表 4.4.8）因此最佳近似解是

$x=120$，$y=112$，$s=358$ 有兵62 476人，

$x=116$，$y=114$，$s=358$ 有兵62 532人，

分别各有误差 26，32 人。

第五编

南宋时代　秦九韶(下)

本编述《数书九章》的世界意义及其对后世的影响，分三章。

第一章　《数书九章》与外国相当数学专著的比较

我们已在第四编概述了《数书九章》的主要内容及其成就。在全世界范围内于中世纪，某些内容甚至可以延伸到18，19世纪之初，如此全面、周到而又深入的数学专著是罕有的。“有比较，才能鉴别”，现就南亚、中亚、欧洲、日本等地区相当的数学专著有关内容作对照，于此可见《数书九章》的成就是非凡的，说它是出类拔萃、时代杰作，并不过分。

第一节　《数书九章》与印度数学

自从1922年谟亨达罗(Mohendaro)遗址发掘后，印度文化可以上溯到公元前三千年。印度古代数学散见于宗教经典。公元5世纪以后数学专著、专家辈出，知名者：阿耶波多(Aryabhata)《文集》(499年)、婆罗摩笈多(Brahmagupta)《文集》(628年)、摩诃毗罗(Mahavira)《文集》(850年)、巴克赫里(Bakhshali)桦树皮

数学手稿(12 世纪)、婆什迦罗(Bhaskara)文集《丽罗娃祇》(Lilavati，1150 年)。

婆什迦罗早于秦九韶一个世纪，1114 年生于碧嘉浦(Bijapur)，今属迈索尔(Mysore)邦。丽罗娃祇是印度妇女常用名。婆什迦罗以其为书名，传说以书纪念其爱女。此书曾奉阿克拔(Akbar 1542～1605)大帝命，于 1587 年译成波斯文。此书英译本于 1817 年出版。婆什迦罗卒于 1183 年。

婆什迦罗采集其先辈数学成果并增补己见，写成《丽罗娃祇》[1] 一书。全书十三章，第 1、2 章为公约、计量、运算法则，第 3、4 章为各种算法，第 5 章为数列问题，第 6 章为平面图形，第 7 至第 10 章为立体问题，第 11 章为间接测量，第 12 章为不定分析，第 13 章为排列组合。全书接触面很广。中国《秦九章》承前启后，可以显示 13 世纪中国数学水平，一如印度在 12 世纪初有《丽罗》。在此，将对二书相应命题对照，借以比较各自研究的深度与广度。

一 算 术

折扣

《丽罗》书中从冶金需要构成有关折扣的问题，例如：

“今有 13，12，11，10 开金四块各重 10，4，2，4 两，使四者熔成一体。问：它是多少开金块?”(L. 102)[2]

“10 开金 8 两，11 开金 2 两。现又有另一金块重 6 两，使三块熔成 12 开金块。问：这另一金块是多少开?”(L. 105)

“要使 16 开、10 开的两金块合熔成 12 开金。问：这两块各应重多少?”(L. 109)

---

① 下面以《丽罗》简称《丽罗娃祇》，以《秦九章》简称《数书九章》

② L. 104 表示《丽罗》第 104 命题

印度纯金作16开，从原著命题看，折扣问题变化多样。问题的解法完整，答数准确。在金属成色问题中，每种问题的前面或后面，都有相当于《秦九章》的术文。例如L. 102之前有法则："金属块重量与其成色乘积之和，除以总重，得熔块成色。"L. 102的解法，列式为：

成色	13	12	11	10
重量	10	4	2	4

答数：成色 12(开)

我国纯金作十分(足赤)，《秦九章》卷18第2题(炼金计值)与之相类，但计算要求更为复杂。

百分法

计息是《丽罗》第5章实用算法的重要内容，例如有题：

"某甲年初借人款项，已知月利率5%，年终得本利合1 000卢比，求：年初时本金及全年利息各是多少?"(L. 89)

从原著在题前法则看，《丽罗》认为所求

本金$=1\ 000\div(1+12\times5\%)=625$(卢比)，而

利息$=12\times5\%\times1\ 000\div(1+12\times5\%)=375$(卢比)。

《秦九章》以商业买卖、借贷为题材，百分法问题要求比之远为复杂，可以参见卷18第4题(推求典本)、卷12第5题（推求库本)。《丽罗》仅有百分法第一种问题，《秦九章》则三种问题俱全之外，还另增新题。

比例

印度系三率法的故乡。《丽罗》一书对此也有重点安排，于此，以下举二例：

"8条优质花样头巾，3尺宽、8尺长值100卢比。朋友，请告诉我：同样质地的头巾，$\frac{1}{2}$尺宽、$3\frac{1}{2}$尺长值多少卢比?"(L. 82)

“借给人 94 个卢比，分三段时间计息，利率分别为 5%，3%，4%，依次借 7，10，5 个月，使它们生相同利息。数学家，请告诉我：每段应借多少卢比?”(L. 91)

前者为五率法(复比例)，由于印度当时币制进制复杂，计算答数很不容易，后者系加权比例问题，为外国中世纪算题所罕见。但《丽罗》原著解法及置答，都准确，特别是两题都结合生活实际，合情合理、平易近人，已录入本《大系》作为世界著名算题[①]。如果对照《秦九章》卷 9 第 1 题(复邑修赋)，卷 10 第 5 题(均科绵税)，则《丽罗》所拟题就显得简单、易解，在算法要求上低了一个层次。

逆推法和假设法

《丽罗》设题，例如 L. 49，L. 53，L. 52[②] 用逆推法和单假设法解，获取正确答案；《秦九章》无逆推法，假设法不用单假设，而用双假设，卷 16 第 6 题(计造军衣)为典型例证。

数列

《丽罗》设专章讨论数列，其中 L. 115～L. 127 为等差(含高阶)数列。L. 128～L. 131 为等比数列。所有命题不但设题引人入胜，而且有针对性解题法则，下面分三段叙述。

等差数列

前面已在本《大系》第二卷引录破敌阵行军[③]L. 124，L. 125，奉献牧师钱币 L. 125，L. 126[④]两题，可以作为代表，审视其全章(第 5 章)，《丽罗》对于等差数列五个参数：a_1，d，n，a_n，S_n 之间的关系及其互换法则讨论很细致。如果对照第三编第一章第七节数列对《秦九章》卷 14 第 6 题(积木计余)，卷 16 第 1 题(圆

---

① 参看本《大系》第二卷 p. 420，p. 433

② 参看本《大系》第二卷 p. 327，p. 358

③④ 参见本《大系》第二卷 pp. 447～448

营敷布)，卷 14 第 4 题(竹围芦束)所作分析，且归结为(1)～(5)五个公式。《丽罗》与《秦九章》工作旗鼓相当，不谋而合。

《丽罗》命题	摘　　要	相当于《秦九章》"数列"公式
L. 119	公差(d)乘项数(n)减 1，加初项(a_1)，得末项	(1)
L. 119	末项(a_n)加初项，折半，得中项，乘项数，得总和 S_n	(2)
L. 122	数列的和，除以项数，减去公差之半与项数减 1 的乘积就是初项	(4)，(5)
L. 124	和除以项数，减去初项，余数除以项数减 1 之半，就是公差	(3)
L. 126	和乘公差的二倍，加上初项与公差折半，平方、开方，以其平方根减去初项加上公差之半，除以公差就是项数	卷 15 第 3 题

高阶等差数列

"数学家，请告诉我，以下数列的和是多少？"

自然数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
和(前 n 项)	1	3	6	10	15	21	28	36	45
和的和(前 n 项)	1	4	10	20	35	56	84	120	165

法则　项数折半，乘项数加 1，这是前 n 项自然数的和。再乘以项数加 2，除以 3，这是前 n 项自然数 n 的和。(L. 115～116)

"迅速回答：平方的和立方的和各是多少？"

平方	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2
立方	1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	7^3	8^3	9^3

答数 285，2 023

法则　项数加倍，加 1，除以 3，乘以算术数列的和，这是平方和。先辈说算术数列和的平方是它的立方和。(L. 117～118)

等比数列

L. 130为一初项为2，公比为3，项数为7的等比数列求和问题。L. 128则初项为1，公比为2，项数为30的等比数列求和问题[①]，《丽罗》不但有准确答数、正确求和法则，而且在计算方法上也有创见，与沈括《梦溪笔谈》棋局都数求法相媲美。

从算术内容看，两书互有损益，不相上下，例如秦书欠缺等比数列、逆推法，而《丽罗》无连比例。从设题思考层次要求看，《丽罗》平铺直叙，很少变化，秦氏书为胜。

二　几　何

《丽罗》13卷中有6卷讨论几何问题，以下分三段进行比较：

平面图形

在第6章含84个命题(L. 133～L. 216)讨论各种直线形和圆及其部分，列举与《秦九章》有关的两个命题：

“射影法线　在三角形中二边之和乘以二边之差，除以其底，底减去这个商，底加上这个商。各自折半是二边分别在底上的射影”(L. 163)。

“边长及其在底上射影，各自平方差的平方根是底上的高，半底乘高是三角形的面积”(L. 164)。

如设$\triangle ABC$两边为b，c(图4.2.2)，底边是a，那么L. 163就是说b，c在a上的射影p，q分别是

$$p=\frac{1}{2}\left(a+\frac{(b+c)(b-c)}{a}\right),\ q=\frac{1}{2}\left(a-\frac{(b+c)(b-c)}{a}\right),$$

而L. 164就是说

$$h=\sqrt{b^2-p^2}=\sqrt{c^2-q^2},$$

① 题见副卷第一卷第四编第五章。

而三角形面积$=\frac{1}{2}ah$。

以含 a，b，c 的 p，q 代入，刚好就是《秦九章》三斜求积公式。

间接测量

《丽罗》第 11 章“表影”含 10 个命题，论相似形相应线段成比例。在其先辈阿耶波多《文集·数学》第 16 节(影长和灯高)[1]基础上有所增益，例如其中代表作为：

“一标竿高 12 尺，影长 8 尺，在 48 尺外同方向另立一标竿同高，影长为 12 尺。聪明的数学家，请问：影与灯柱相距多远？灯柱高多少？这是二影端相距 52 尺，除以二影差，乘以第一影长，得 104，这是灯柱与第一影端相距，所以第二影端相距 156 尺。任一影端距与标竿高乘积除以影长，所得都是灯柱的高 156 尺。”[2]（L. 246）

《丽罗》还用比例理论对 L. 246 的算法作了证明：

“用比例式求解：第一影长(a_1)比第二影长超过第一影长值(a_2-a_1)。从两影端相距(d)求第四比例项影长端至灯柱距离(x)就借以求得。再列第二比例式：如影长为勾(a_1)，标竿高为股(h)，那么底也是勾(x)，问题是计算股，灯高(y)是多少？就这样求出灯高。”（L. 247）

这就是说所求第一影长端与灯竿距离(图 5.1.1)

$$BC=x=\frac{da_1}{a_2-a_1},$$

而灯竿高

$$BA=y=\frac{dh^{③}}{a_2-a_1}。$$

---

① 参见副卷第一卷第四编第五章。

② 长度单位这里已改为尺。

③ 中国习惯用两标竿间距 DE 为已知件，见《秦九章》卷 7 第 1 题(登山高远)。

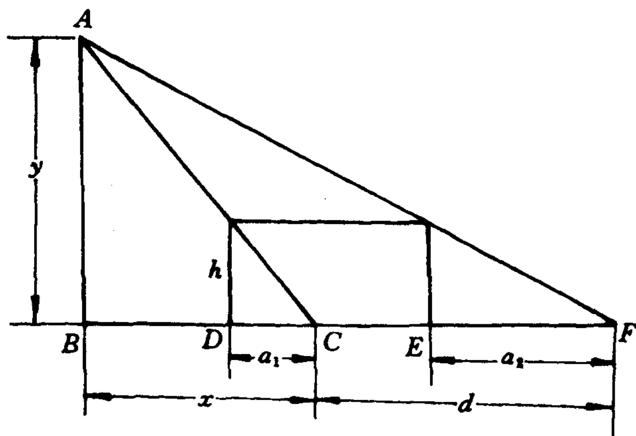


图 5.1.1

立体体积

《丽罗》第 7 章挖土，第 8 章砖、石方，第 9 章木材积，第 10 章粮容都牵涉立体体积问题。下面也以其代表题为例：

“请告诉我：井的挖方是多少？井口宽 10 尺，长 12 尺，井底尺寸是井口相应尺寸之半，井深 7 尺。”

“计算：(10×12+5×6+(10+5)(12+6))×7÷6=490”，

“答数：490 立方尺”(L. 222)。

“长方台体积法则：底面积与顶面积之和加上底、顶宽的和与二者长的和乘积，除以 6，商就是平均面积，乘以深，就是所求土方体积。”(L. 221)

《丽罗》书中几何学说有其特色。以平面图形而论，它以充分多的篇幅论述直角三角形勾、股、弦关系(L. 135～L. 159)[1]，其广度和深度可以和《九章算术·勾股》匹敌，在此基础上能完整

① 参见副卷第一卷第四编第五章。

推导三斜求积公式。我们已在第四编第二章第一节(三斜求积)指出秦氏在此题术文略去推导，而在斜荡求积题草文中足以证明秦氏具备与《丽罗》同样方法与能力推导这一公式。《丽罗》在论述其他直线形的线段和面积，特别对圆及其部分论述中有不少创见。例如 L. 215 有关弓形弦长、直径与弧长关系的近似公式有满意的精度[1]，直至 1967 年有论文用近代正弦级数展开比较，其误差甚小。是则为《秦九章》所不及。从间接测量比较，《丽罗》以灯影反算灯柱高及有关平距，其理论仅仅停留在刘徽、阿耶波多已有成果水平上，无多进步，与秦氏论述之多样变化，就显得单调而单薄，但是在具体问题之后又有理论推导，可以验证，其推导正确无误，此则又为秦氏所不如。命题 L. 247 的结论和推导与《秦九章》望山远近(即《海岛算经》第 1 题)有异。这说明印度源于相似三角形性质，而中国则自出入相补原理。从立体体积比较，《丽罗》对长方台体积公式为一创举，它与《九章算术・商功》刍童公式形异而实同，而且又提出“平均面积”，即把长方台折成同深同底(平均面积)长方体，这种见解尤为新颖[2]。《秦九章》在卷 12 第 1 题(囤积量容)也考虑过方台，这仅是长方台的特殊情况。全书未计及球体，而《丽罗》有命题 L. 203 论球表面积及其体积。

三　适定方程

《丽罗》在建立方程和解方程方面为一薄弱环节，全书仅一处与二次方程有关(L. 62～L. 69)，现举其代表作：

“一群鹅，其平方根的 10 倍在迷雾中步入沼泽，其$\frac{1}{8}$走进丛林，还可以看到有 3 对在莲花盛放的池塘里嬉游。亲爱的女郎，鹅

---

① 参见副卷第一卷第四编第五章。

② 参见副卷第一卷第四编第五章。

群有多少只鹅？”

(答数 144，L. 66)

法则　“一数与其平方根倍数和或差为已给，那么倍数折半的平方加上已给数，开平方后加上或减去倍数之半，平方，就是所求数”(L.63)。

L. 63 是说已给：$x\pm a\sqrt{x}=b$。那么所求

$$x=\left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b}\mp\frac{a}{2}\right)^2。$$

以 L. 66 例来说，《丽罗》在解题时对题设数据在代入求根公式前，预先所作处理是适当的：“以 $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ 除 10，6，得 $\frac{80}{7}$，$\frac{48}{7}$。分别作为 a，b，就得到鹅群中鹅数 144。

《丽罗》在方程方面仅有这一内容。《秦九章》则在多项式方程和线性方程组方面从建立方程到解方程都已十分成熟，所编造的问题又多种多样，为《丽罗》所未及，但《丽罗》能对

$$y^2+Ay+B=0$$

一类二次方程写出求根公式，这是重要贡献，又是《秦九章》所不及。

四　不定分析

《丽罗》第 12 章为粉碎法的系统论述，解一次同余式及一次同余式组。全章共 19 个命题(L.248～L.266)，是在中世纪与《秦九章》大衍术能相提并论的惟一数学专著。

为方便理解《丽罗》解一次同余式的法则，先述有关数学原理。

商	运算结果　b_i
q_1	$b_1=q_1b_2+b_3$
q_2	$b_2=q_2b_3+b_4$
⋮	⋮
q_i	$b_i=q_ib_{i+1}+b_{i+2}$
⋮	⋮
q_n	$b_n=q_nc+0=cq_n$
c	0
0	

当$(a,b)|c$时，不定方程$ax+c=by$与一次同余式$ax\equiv -c(\mathrm{mod}\ b)$等价。解$ax\equiv 1(\mathrm{mod}\ b)$。做欧几里得算法，记其部分商$q_1$，$q_2$，…，$q_n$，其中$r_n=1$，$r_{n+1}=0$，自上而下记下所有部分商，再记下$c$，再在最后记0。从0开始自下而上地下面一个数乘上面一个，记下乘积。每一次乘积加上前面的乘积，直至最上面，如左表，那么，当n是偶数时所求通解是$x=b_2-at$，$y=b_1-bt$。

当n是奇数时，$x=at-b_2$，$y=bt-b_1$（t是任意整数）。

《丽罗》说：

“**法则**　首先作为研究粉碎法的准备，被除数(a)、除数(b)、加数(c)都应该被某一数约尽。如果这个数能约尽被除数与除数，但不能约尽加数，则问题有误，即问题无解。”(L. 248)

“被除数、除数互除，最后一个余数是二者的公约数，二者除以这个公约数，就成为既约。既约的被除数、除数互除，直至被除数［下］的余数(r_n)是1。所得商数从上而下地排列，加数记在下面，零记在最下面。

最后第二数乘紧接上面一数，加最下面一数，然后甩去最下面一数。继续［自下而上］这种运算，直至余下的一对数(b_2,b_1)。

最上面一数累减既约被除数，它的余数是所求商(y)，另一数累减既约除数，它的余数是所求乘数(x)。”(L. 249～250)

“当商数个数是偶数时，运算正确。如果是奇数时，所求得商和乘数必须从相应的［除数或被除数中］减去，它的余数才是所求商及乘数。”(L. 252)

从《丽罗》大量例子可进一步了解对粉碎法的具体操作：

“如果你精通这种算法，告诉我：什么样的乘数乘100，加上

90，可以被 63 整除?”(答数 18,30)

1	1 530+900=2 430
1	900+630=1 530
1	630+270=900
2	540+90=630
2	180+90=270
1	90+0=90
90	90×0=0
0	

这相当于解 $100x+90=63y$。

对 100，63 做欧几里得算法，得部分商 1，1，1，2，2，1(偶数个)，排列如左，按法则，求出 $b_1=2\ 430$，$b_2=1\ 530$。于是所求为：

$y=2\ 430-100t$，取 $t=24$，$y=30$

$x=1\ 530-63t$，取 $t=24$，$x=18$。

(L.255)

“数学家，告诉我：乘数是多少时，乘以 60 后，加上 16，其和可以被 13 整除?”(答数 11,52)

4	320+48=368
1	48+32=80
1	32+16=48
1	16+16=32
1	16+0=16
16	16×0=0
0	

这相当于解 $60x+16=13y$。

对 60，13 做欧几里得算法，得部分商 4，1，1，1，1(奇数个)，按法则排列如左，求出 $b_1=368$，$b_2=80$，于是所求

$y=60t-368$，取 $t=7$，$y=52$，

$x=13t-80$，取 $t=7$，$x=11$。

(L.257)

《丽罗》在《秦九章》成书大约一百年前设计的算法与大衍术完全一致。它与其先辈阿耶波多发明的粉碎法[①]同中有异。从所给法则看，对于有解条件审视很是周到，对于商的个数在 $r_n=1$ 的必要条件下，n 是奇是偶，完整指出。所给计算方法足以算出正确答案，详尽无遗，这是十分珍贵的史料。它与大衍术也同中有异。如果用大衍术解 L. 257，《丽罗》列出商数(q_n)后自下而上笔算，且带着不定方程常数项计算。大衍术则分式筹算，并不带着常数项计算。L. 257 中　$60x+16=13y$ 就是　$60x\equiv-16$(mod

① 参见本《大系》副卷第一卷第四编第一章。

13)。依大衍术：$j_1=1$，$j_2=1$，$j_3=2$，$j_4=3$，$j_5=5$，此 $j_5=5$ 是 $60x\equiv1(\bmod 13)$的解，因此不定方程的特解　$x\equiv-16\times5\equiv11(\bmod 13)$，于是特解　$y=52$。《丽罗》与《秦九章》间的一般等价关系可以用数学归纳法证明[①]。

印度是不定分析摇篮之一，5 世纪时已有阿耶波多对一次不定方程解法的完整论述。7 世纪时为制订历法需要，婆罗摩笈多(Brahmagupta，598～?)著《婆罗摩修正体系》(628 年)，其中有一章不定方程讲义第一节命题 7 说：

"自从七星会元以来，日、月、火、水、木、金、土，回转整数转以外，又经过以下日数

星名	日	月	火	水	木	金	土
日数	1 000	41	315	1 000	1 000	1 000	1 000

已知日每1 096日回转 3 次，月 137 日转 5 次，火星 685 日一次，水星1 096日 13 次，木星1 096日转 3 次，金星1 096日转一次，土星10 960日一次。问：七星会元以来已经转过多少日?"

显然这是解一次同余式组的问题：

$$x\equiv1\,000\left(\bmod \frac{1\,095}{3}\right)\equiv41\left(\bmod \frac{137}{5}\right)\equiv35(\bmod 685)$$

$$\equiv1\,000\left(\bmod \frac{1\,096}{13}\right)\equiv1\,000\left(\bmod \frac{1\,096}{3}\right)$$

$$\equiv1\,000(\bmod 1\,096)\equiv1\,000(\bmod 10\,960)。$$

作为解题的过渡材料原著设有预备题：

"一数分别为 6，5，4，3 除，依次得余数 5，4，3，2。求此数。(答数：59)怎样解同余式组：

$$x\equiv5(\bmod 6)\equiv4(\bmod 5)\equiv3(\bmod 4)\equiv2(\bmod 3)?$$

---

① 沈康身，1987b

后人注释说：

对于形如 $N=a_1x_1+R_1=a_1x_2+R_2=\cdots=a_nx_n+R_n$ 的不定方程组解法，先在 $a_1x_1+R_1=a_2x_2+R_2$ 中用粉碎法求出 x_1 的最小正整数解 a。于是 $N=a_1a+R_1$，而其一般解是

$$N=a_1(a_2t+a)+R_1=a_1a_2t+a_1a+R_1,$$

那么

$$N=a_1a_2t+(a_1a+R_1)=a_3x_3+R_3$$

归结为再做一次粉碎法，照此方式一直运算到解出 x_n，从而得到 N 值。

如果注释者的想法一如原著，那么印度对同余式组的解法显然远较《秦九章》大衍总数术繁复，很难想象用这种解法在解七星会元题中所遭遇的大量计算困难。

就总体说，除个别内容如弓形弧长公式，排列组合计算《秦九章》为空白外，其余都胜于《丽罗》，而且相比之下，《丽罗》似只是一部初级课程教科书。如与中世纪前全部印度数学相比，某些内容如耆那教徒维拉圣奴(Virasena，710～780)圆台体体积推导[①]，婆罗摩笈多二次不定方程，圆内接四边形的研究成果等《秦九章》为空白；另一方面多项式数值解法，线性方程组一般解法，系统而又完整的大衍术用来解一次同余式组，各种勾股比例问题等则为印度数学的空白或尚在起步或习之不深或不甚深的课题。

第二节　《数书九章》与阿拉伯数学

伊斯兰教于7世纪在阿拉伯半岛创立，教主哈里发，建萨拉森帝国。帝国领土包括西亚、中亚、北非，直至西班牙，后不久，帝国分裂为三。帝国势力延绵到15世纪。阿拉伯数学指在萨拉森帝国疆域内以阿拉伯文写成的数学著作，与作者所属民族无关。

① 沈康身．九章算术导读．湖北教育出版社，1997：364～365

东、南、西三萨拉森帝国对数学文化都有贡献。

东萨拉森帝国以巴格达为首都，建国初期营“智慧之宫”，组织学者翻译希腊、印度名著。后来数学家辈出，成果丰硕，代表人物如阿尔·花拉子米(Al-Khwarizmi，9世纪时人)所著《代数学》(Hisab Aldzebr Wa'l-mucabala，825年)是欧洲语系“代数”一词的语源，译成拉丁文后，好几个世纪曾是代数学标准教科书，阿尔·巴塔尼(Al-Battani，850～929年)，阿布瓦发(Abul-Wafa，940～997年)，阿尔·比鲁尼(Al-Biruni，973～1048年)，奥玛尔·海雅姆(Omar Khayyam，1044～1123年)，纳索拉丁(Nasir-Eddin，1201～1274年)都是当代第一流天文、数学权威。[1] 阿尔·喀西(Al-Kashi，? ～1436年)，乌兹别克人，著有《算术钥》(1427年)一书，数学内容很广泛，是一部传世之作。

南萨拉森帝国以开罗为首都，阿尔·海坦(Al-Haitain，965～1030年)在同余式等方面有过论著。

西萨拉森帝国在西班牙，以哥德瓦为首都，学术活动并不弱于东萨拉森，当后者文化衰落时，西萨拉森就成为欧陆学术基地，为欧洲文艺复兴作了准备。

阿拉伯数学曾是人类数学发展史中重要一环。阿拉伯数学是中世纪东西方数学交流的桥梁，而中国传统数学中的某些内容例如十进位记数法、比例、盈不足术、二项式展开系数三角形、不定方程以及数值解方程渐次流传到中亚，以此为中介，终至及于欧陆。

以下选取花拉子米和阿尔·喀西数学专著的典型内容与《秦九章》作对比。

---

① 参见副卷第一卷第五编第一章。

一　算　术

比例

花拉子米《代数学》(下简称《代数》)设专节：商品交换牵涉正比例和反比例，其间关系都较简单。其中有反比例题：小麦每斗值 10 个钱币，大麦值 8 个钱币。问：4 斗大麦可以换多少小麦？$\left(\text{答数 } 3\frac{1}{5}\text{斗}\right)$

阿尔·喀西《算术钥》(下简称《钥》)有比较复杂的分配比例问题："三个工人每月工资分别是 5，4，3 个钱币，他们合作 20 日，要求每人得到相同报酬，问：每人各应工作几日？"[1] $\left(\text{答数：}7\frac{31}{47}, 9\frac{27}{47}, 12\frac{36}{47}(\text{日})\right)$。

算术解法

《代数》有纯算术解法例，其思路敏捷，但是在解题过程中有误[2]。

《钥》第五编设专章讨论算术解法：双假设法、逆推法等，其中如双假设法仅设一简单数值例："求某数：已知某数的 3 倍加 10，以和数加倍，加 10 等于 90。"原著设 $x_1=5$，又设 $x_2=7$，求得答数是 10。

数列

《钥》第五编有数列求和公式数则，居当时世界先进水平。

"$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$。"

"$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{2}(n+1)(n+$

---

① 解法见本《大系》第二卷第四编第八章 p. 429.

② 参见副卷第一卷第五编第一章。

$2)\left(\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-1\right)$。”

“$1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$。”

“$1+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$。”

“$1+2^4+3^4+\cdots+n^4=\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}n(n+1)-1\right)+\frac{1}{2}n(n+1)\right)\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$。”

二　几　何

《代数》设图形专节[①]论述平面图形面积及立体体积。圆周率引述三种近似值。明确指出勾股定理，对于已给三边求三角形面积问题，以代数方法，引用两次勾股定理得解。

《钥》第四编全面论述平面和立体图形性质，属于欧几里得《原本》范畴。[②]

三　适定方程

《代数》和《钥》在建立方程和解方程方面为人类数学文化做了开创性工作。

《代数》开宗明义以“复原与对消”阐明解方程的首要步骤，又以几何方法导出和证明三项式二次方程

$$ax^2+bx+c=0。$$

当系数只允许用正数表示时三种形式

$$①ax^2+bx=c，②ax^2+c=bx，③ax^2=bx+c$$

① 参见副卷第一卷第五编第一章。

② 参见副卷第一卷第五编第二章。

的求根公式。[①]

原著又以应用题说明用法、用语言，反复地把10分成两份命题：

①“二者相乘，又二者之一自乘等于二者乘积的4倍，求两份各是多少？”归结为　$x^2=8x$。(答数 $x=8,2$)

②“二者各自乘和等于58”，归结为 $x^2+21x=10x$。(答数 $x=3,7$)

③“第一份的自乘是另一份的81倍”，归结为 $x^2+100=101x$。(答数 $x=1$)

原著又命题以遍历所有上述三种形式。

“根的三分之一与四分之一相乘，乘积等于根与24个金币之和。求这个根。”归结为 $x^2=12x+288$(答数 $x=24$)

从线性方程方面两书的记载，说明阿拉伯数学在这一领域内已有较完整的认识，例如：

“我买大麦与小麦各几斗，各自付款数之差与两种粮食斗数之差等于付款数总和？[求大麦每斗价]”(《代数》)

原著用语言解题，相当于说：设大麦每斗单价是 x，小麦单价是 rx，大麦、小麦分别买了 n，m 斗。据题意，建立方程 $nx+mrx=(rx-x)+m-n$。$\left(答数\ x=\dfrac{m-n}{mr+n-r+1}\right)$

“某人有4个儿子，临终遗嘱，财产分配方案：儿子所得相等。友人得儿子同样一份，还加上1个金币，还要给他全部财产的三分之一，除去儿子所得一份的四分之一。问：各人所得多少？”(答数：每个儿子得 $\frac{11}{57}a-\frac{12}{57}$，友人得 $\frac{13}{57}a+\frac{48}{57}$，其中 a 是此人的全部财产)

原著设友人得 x，每个儿子得 y 个金币，据题意建立方程组

① 参见副卷第一卷第五编第一章。

$$\begin{cases}a-y=4y,\\ x=y+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}a-y\right)+1\end{cases}$$

变换为$\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}a-y-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}a-y\right)-1=4y$。经“复原与消去”，得解。

“某人临终，遗嘱财产分配方案：6个儿子分得一样多，友人之一得到儿子同样多的一份之外，还得到全部财产四分之一与每个儿子所得之差的五分之一，另一友人得到儿子同样多的一份而外，减去全部财产的三分之一与每个儿子与前面友人所得和之差的四分之一，问：八个人各得多少？答数：每个儿子得财产的$\frac{49}{396}$，二友人分别得$\frac{59}{396}$，$\frac{43}{396}$。

原著设每个儿子，二友人分别得财产为v，x，y，又设所分财产为1。据题意建立方程组：

$$\begin{cases}1-x-y=6v, & ①\\ x=v+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}-v\right), & ②\\ y=v-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-v-x\right). & ③\end{cases}$$

用代入法解题。先从①，③消去y，其中有技巧性运算，使变换为

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-x-v+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-x-v\right)=6v,$$

于是方程变换为 $$\frac{2}{3}+\frac{5}{4}\left(\frac{1}{3}-x-v\right)=6v。\quad ④$$

④与②消去x，又作类似技巧性变换得

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-v-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}-v\right)-v\right)=6v,$$

于是 $$\frac{2}{3}+\frac{5}{4}\left(\frac{1}{12}+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}-v\right)-v\right)=6v,$$

这就是 $$\frac{2}{3}+\frac{5}{4\times12}+\frac{1}{4}=\left(7+\frac{5}{4}\right)v。$$

全式扩大 4 倍，得 $\frac{8}{3}+\frac{5}{12}+1=33v$。于是 $v=\frac{49}{396}$，依次回代④、①得所求 x，y。

《钥》第一编为十进位值制各种运算法，除了开平方、开立方以外，还介绍开一个数 a(正整数)的任意 n 次方，即数值解二项式方程 $x^n=a$，其运算步骤与北宋贾宪发明的增乘方法全相一致。[①]

四　不定分析

《钥》含不定分析题多则，都是不定方程题；现选录如下：

百鸡问题

属于《张丘建算经》百鸡问题类型如：

"黄金、珍珠、宝石三种饰品论重计价，已给三者总重 3 摩斯卡。[②] 三者单价每摩斯卡值 4，20，30 个金币，三者共值 60 个金币。问：它们各重多少？"

原著设这三种饰品：黄金重 x，珍珠重 y，宝石重 z 摩斯卡。列举三种解法，最后一种是代数方法。由于答数不限于整数，给出的两组解为

①$x=\frac{1}{2}$(值 2)，$y=1\frac{7}{10}$(值 34)，$z=\frac{4}{5}$(值 24)。

②$x=\frac{5}{6}\left(值 3\frac{1}{3}\right)$，$y=\frac{5}{6}\left(值 16\frac{2}{3}\right)$，$z=1\frac{1}{3}$(值 40)。

"1 只鸭值 4 个钱币，5 只麻雀值 1 个钱币，1 只鸡值 1 个钱币，百钱买百鸟。问：鸭、麻雀、鸡各买了多少只？"

原著的解法说："取 1 只鸭与所值差乘以雀 5 只，得 15，是雀数。取 5 只雀与所值差，乘以鸭 1 只得 4，是鸭数，百鸟减去鸭、

---

① 见副卷第一卷第五编第二章。

② 波斯衡单位，1 摩斯卡＝4.64 克。

雀总和，是鸡数。鸭、雀加倍，又3，4，5倍，依次得到其他四个答案。”我们设鸭、雀、鸡只数分别为x，y，z。这五组解是

$x=4$(值16)，$y=15$(值3)，$z=81$(值81)；

$x=8$(值32)，$y=30$(值6)，$z=62$(值62)；

$x=12$(值48)，$y=45$(值9)，$z=43$(值43)；

$x=16$(值64)，$y=60$(值12)，$z=24$(值24)；

$x=20$(值80)，$y=75$(值15)，$z=5$(值5)。

齐次问题

有一题与《九章算术·方程》第13题(五家共井)同型："有五个人，甲对乙说：'予我你所有的$\frac{4}{5}$，我所有值一匹马价。'乙对丙说：'予我你所有的$\frac{3}{5}$，我所有值一匹马价。'丙对丁说：'予我你所有的$\frac{2}{5}$，我所有值一匹马价。'丁对戊说：'予我你所有的$\frac{1}{5}$，我所有值一匹马价。'戊对甲说：'予我你所有的$\frac{1}{6}$，我所有值一匹马价。'问：五人所有及马价是多少?"(答数:甲,1 974;乙2 250;丙,2 540;丁,3 085;戊,3 445。马值3 774。)

阿拉伯数学在世界数学史中居特殊地位，跨越时间和地域面广阔，数学家众多，可谓人才济济。上文已举《代数》和《钥》与《秦九章》有关的典型事项，我们有以下认识。

其一、在算术方面,阿拉伯数学家以十进制算法著称西方。各种算题更具特色,反映阿拉伯世界宗教习惯和社会习俗,与《秦九章》大异其趣。必须指出,在数列求和方面的成绩允称独步一时,为秦书不逮,开后来一般幂和公式$\sum_{r=1}^{n} r^p (p=1,2,3,\cdots)$之先河[①]。

---

① 阿拉伯数学家阿尔·凯拉吉(Al-Karaji或Al-Karkhi,10,11世纪之交)已证明其中某些公式。参见副卷第一卷第五编第二章。

其二、在几何方面有突出工作，阿尔·喀西《量圆》一书另辟蹊径求圆周率近似值到小数点后17位[①]。在《代数》中所举已给边长为13，14，15求三角形面积题与《秦九章》卷5第2题(三斜求积)适相一致，而其解法与秦法有异。虽为数值例，但有其一般意义。在图5.1.2中如设$\triangle ABC$，边b在c上的射影为x，那么$BD=c-x$。按照花拉子米的做法，三角形的高$h^2=a^2-(c-x)^2=b^2-x^2$，经过“复原、对消”，得

$$2cx=b^2+c^2-a^2,$$

于是所求$x=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$，

进一步计算出　$h=\dfrac{\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}}{2c}$。

就易于得到《秦九章》三斜求积公式。

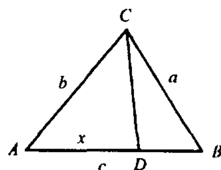


图5.1.2

实际上10世纪时的阿布瓦发说，三角形面积可以表示为

$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2},$$

又与三斜求积公式等价。

此外三角形中内容正方形[②]，有矛直立水中央[③]，两题分别与《九章算术·勾股》第6，15题同义，比鲁尼测定地球半径[④]为阿拉伯数学生色。但论其结构复杂而多变化，广泛而深刻地联系代数运算及其解法，则《秦九章》所设各种勾股比例题远胜天方。

其三，人们公认阿拉伯数学最大贡献是代数。花拉子米首先

---

① 阿拉伯数学家阿尔·凯拉吉(Al-Karaji或Al-Karkhi，10，11世纪之交)已证明其中某些公式。参见副卷第一卷第五编第二章。

② 副卷第一卷第五编第二章。

③ 本《大系》第二卷p.473

④ 本《大系》第二卷p.483

全面创立二次方程求根公式及其几何证明，他的工作为欧洲16世纪时创立高次方程求根公式奠定了基础[①]。《代数》在线性方程（组）的建立和解的工作中也值得称道。但有其局限性，与《秦九章》继承《九章算术》传统，能够照顾到一般，是为花拉子米所不及。在多项式数值解方面的工作，人们盛传阿部瓦法已经通晓从开三次、四次直至开七次方的算法，而奥玛尔·哈雅姆则能开任意次高次方。可惜具体算法未见传世[②]。在《钥》第一编则纪载开一数的高次方的步骤以及数值解的具体算例[③]。最近有论文[④]详及从阿拉伯数学早期直到阿尔·喀西数值解方程问题，容易发现在他们的工作中有突出的局限性：只限于解二项式方程，即 $x^n-a=0$，更不用说解含负系数的一般多项式方程，于此可见《秦九章》正负开方法是数学发展史上的丰碑。

其四，在不定分析研究方面，阿拉伯数学的建树主要在解不定方程(组)。对上引《钥》三例中对于鸭、雀、鸡题原著解法可试作解释，据题意应建立方程组　$x+y+z=100$，$4x+\frac{1}{5}y+z=100$。其中 x，y，z 分别是所求鸭、雀、鸡只数，两式互减得

$$(4-1)x=\left(1-\frac{1}{5}\right)y,$$

那么

$$5(4-1)x=1\cdot(5-1)y,$$

其中 $x=1\cdot(5-1)$，$y=5(4-1)$显然是一组解。这就是解法所说："取1只鸭与所值差，乘以雀5只，得15，是雀数"，而"取5只雀与所值差，乘以鸭1只，得4，是鸭数"。我们感到有兴趣的是：

① 副卷第一卷第六编第二章。

② R. Rashed，阿拉伯数学发展史，A. F. W. Armstrong英文译本，Kluwer，1994

③ 副卷第一卷第五编第二章。

④ 包芳勋，阿拉伯代数学若干问题的比较研究，1997年西北大学博士学位论文.

阿尔·喀西在原著中虽然没有列出方程，从其解中可以觉察到他确是建立了相同方程运算的结果。

对于五人互给后财富是一匹马的例中，从原著的表 2 可以用现代数学语言解释。设甲、乙、丙、丁、戊五人各有财产 x，y，z，u，v 个钱币，一匹马值 t 个钱币，那么据题意可建立不定方程组

$$\begin{cases} x+\frac{4}{5}y=t, & (1) \\ y+\frac{3}{5}z=t, & (2) \\ z+\frac{2}{5}u=t, & (3) \\ u+\frac{1}{5}v=t, & (4) \\ v+\frac{1}{6}x=t。 & (5) \end{cases}$$

原著假设 x 为单位 1，t 为物(参变量)。从(1)式知

$$y=\frac{5}{4}(t-1),$$

从(2)可求出
$$z=2\frac{1}{12}-\frac{5}{12}t,$$

又从(3)知
$$u=3\frac{13}{24}t-5\frac{5}{24},$$

再从(4)求出
$$v=26\frac{1}{24}-12\frac{17}{24}t,$$

最后又从(5)知
$$x=82\frac{6}{24}t-156\frac{6}{24}。$$

从假设获得等式：
$$x=82\frac{6}{24}t-156\frac{6}{24}=1,$$

这就是
$$82\frac{6}{24}t=157\frac{6}{24},$$

$$t=\frac{3\,774}{1\,974}。$$

原著认为不定方程的一组解是：

$t=3\ 774$，依次得 $x=1\ 974$，$y=2\ 250$，$z=2\ 540$，$u=3\ 085$，$v=3\ 445$。

原著的解法至今使人仍感到很是新鲜[①]。

文献记载阿拉伯数学家对类似不定方程整数解有达1 233组[②]者。

在阿拉伯数学中现在没有发现同余式问题及其解法。

第三节　《数书九章》与中世纪欧洲数学

中世纪时欧洲沦入黑暗时代，数学与其他科学文化一样陷入愚昧无知。但为宗教需要，偶尔凤毛麟角仍有发现，前已在本《大系》第四卷述公元10世纪前情况。与秦九韶及其《数书九章》相当时代，值得称道的是斐波那契(Leonardo Fibonacci)的数学专著。

斐波那契(1175？～1250年)生于意大利比萨，父亲是当年比

---

① 我们已在本《大系》第二卷 p. 102 记载五家共井题，如设甲、乙、丙、丁、戊五家汲水绳分别长 x，y，z，u，v，而井深为 t，则据题意建立类似齐次不定方程组

$$\begin{cases}2x+y=t,\\3y+z=t,\\4z+u=t,\\5u+v=t,\\6v+x=t。\end{cases}$$

从齐次方程组的特殊性，《九章算术》以“方程”术获知其一组解 $t=721$，$x=265$，$y=191$，$z=148$，$u=129$，$v=76$。

如果我们用阿尔·喀西的解法，设 $x=1$，而 t 为参变量，从方程组依次得 $y=t-2$，$z=6-2t$，$u=9t-24$，$v=120-44t$，而 $x=265t-720=1$，那么 $t=\frac{721}{265}$。如设 $t=721$ 为方程组的一个解，那么，x，y，z，u，v 将得到与《九章算术》同样答数。

② А. П. Юшкевич. 中世纪数学史. 俄文版，p. 223.

萨共和国官员，曾在今北非阿尔及利亚布日伊管理侨民商务，斐波那契随父出使，在那里学会用印度数字计算，嗣后又随父到埃及、叙利亚、希腊等地旅行。他经过广泛的学习和认真的研究，掌握了许多数学知识。12世纪之末他回故乡，度过四分之一个世纪，在那里著书立说，总结所习得的各个领域的数学问题。1225年前后应国王腓德烈二世(Frederich Ⅱ,1194～1250年)召见，成为宫廷数学家，他向市民和官员讲授数学。他的数学专著保存至今的有：《计算之书》(Liber Abbaci,1202)，《实用几何》(Practica Geometriae,1220年),《花朵》(Flos,1225年),《平方数书》(Liber Quadratorum,1225年)，其中《计算之书》曾风行欧陆，成为中世纪数学一枝独秀之作。由于商业计算的需求，从13至15世纪先后出版有12种版本，全书十五章。第1至7章为记数法(印度数码)、整数及分数四则运算，第8章货价计算，第9章货物互换，第10章分配比例，第11章合金成色，第12，13章各种应用问题及其解法，第14章平方、立方及其逆运算，第15章几何及代数。

一　算术与代数

在《计算之书》自第8章起的丰富数学内容中，我们已选录若干代表性问题在本《大系》第二卷第四编作为世界著名算题。例如从部分反算全体(余数问题)、从二次假设求真值(盈亏问题)、三兽食羊(归一问题)、复比及连比(比例问题)、在数列问题上脍炙人口的棋盘麦粒问题及兔子问题。在《平方数书》中记载两个和为平方数的数列。其一，对于奇数a，从1到a^2-2的奇数和是$\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2$。其二，前者再加上$a^2$，则得到另一平方数$\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2$。

斐波那契在代数方面的工作，集中在《计算之书》第15章，其中第1节有题，题中给定：

$$6:x=y:9,\text{ 又 } x+y=21。$$

书中从前一方程计算 $xy=54$，然后运用欧几里得《原本》第 2 卷命题 5，得

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\left(\frac{21}{2}\right)^2-54,\quad x-y=15,$$

最后得答数　　　　　　$x=3$，$y=18$。

第 3 节给出阿拉伯世界花拉子米六种类型的二次方程。然后举例探讨，他还进一步研究能归结为二次方程的高次方程问题。例如当 $y=\frac{10}{x}$，$z=\frac{y^2}{x}$，$z^2=x^2+y^2$ 三者已给定，他变换为 $x^8+100x^4=10\ 000$得解。

《花朵》一书是斐波那契呈献给腓德烈大帝的力作，刊载他在宫廷中举行数学竞赛提出的试题，于此他给出方程 $x^3+2x^2+10x=20$ 无整数解，无分数解。他找到一个准确到小数点后 11 位的近似值 $x=1.368\ 808\ 107\ 85$。

斐波那契的算术问题及其解法与《秦九章》相比，东西方所处环境与生活方式虽大异，但数理则一。《计算之书》各种问题品种齐全，某些解法还附几何图形解释，可以补东方数学之不足，特别是所引两则数列问题大放异彩，为秦书所无。

斐波那契在代数方面的工作与《秦九章》有异。他采撷阿拉伯成果：以求根公式解二次方程及其有关高次方程。从他在宫廷数学竞赛中能解三次方程的根具有 12 位有效数字，除了数值解之外用其他方法的可能性是非常小的。可以说，他具有相当于中国正负开方的能力。如此推断，斐波那契与秦九韶应同是当年丝绸之路东西端点代数学巨擘。两卷本《数学史》作者斯密士(D. E. Smith)对此感到惶惑："没有人知道这个结果是怎样获得的，但是这类数字方程解，在中国已解决，并且当时东西方已有交往。从

这一事实我们相信是斐波那契在旅游中学到的。"① 比利时学者李倍始(U. Libbrecht)也说:"如果斐波那契知道增乘方法的话,那么非常可能他是从阿拉伯数学家那里学来的,而后者师承先行者——中国学者。"②

二　几　何

斐波那契几何方面的工作集中在《实用几何》一书,书分8章,第1,3章矩形面积和其他直线形面积及其证明,圆周率取3.141 818。第2,5章论平方和立方根,导致二次和三次方程,第4章论曲面,第6章论体积(含正多面体体积)。第7章以相似图形(三角形),以有关比例性质解决间接测量中的问题。第8章为外切、内接正多边形计算面积及边长问题。

从《实用几何》所接触的内容看,它属于欧几里得《原本》体系,而是记述其中较初级的部分。《秦九章》是在中国几何传统上有所提高,从所设有关几何问题多样化看,胜于《实用几何》。

三　不定分析

已有专题论文评论斐波那契的重要成果表现在不定分析方面的问题③。在一次不定分析方面下面引录二题:

"有人买麻雀,1钱币买3只,斑鸠1钱币2只,鸽子2钱币1只。30个钱币买30只。我们需要知道:他各买了几只?"(麻雀9只,斑鸠10只,鸽子11只,是一组答案,《计算之书》第12章)

"设计一个数,除以3,除以5,也除以7。问:每次除法各剩

---

① D. E. Smith. History of Mathematics. Boston, 1923, 2: 472

② U. Libbrecht. Chinese Mathematics in 13th Century. M. I. T. Bress, 1973: 205

③ K. Vogel. The Role of Byzantium as an Intermediary in the Transmission of Ancient and Arabic Mathematics in the West. thaca: Proc. 10th ICHS, 1964: 537

余多少？对于除以 3，所剩余的每个单位 1，要记住 70；对于除以 5，所剩下的每个单位 1，要记住 21；对于除 7，所剩余每个单位 1，要记住 15。这样的数如果大于 105，就减去 105。其剩余就是所设计的数。例如，设一数除以 3 余 2，记住 70 的 2 倍，或 140。其中减去 105，则剩余 35。如果除以 5，余 3，记住 21 的 3 倍，或 63，与上述 35 相加，得 98。如果除以 7，余 4，记住 15 的 4 倍，或 60。与上述 98 相加，得 158。再减去 105，其剩余是 53，就是所设计的数。”(《计算之书》第 12 章)

买鸟问题与张丘建百钱百鸡问题同型。它可以进一步归结为二元一次不定方程，即一次同余式。

设计一个数的问题与《孙子算经》卷下第 26 题几乎完全相同，所示解题方案也相同，也是《秦氏书》大衍术的最简单例题。就书论书，斐波那契在不定分析方面的成果与大衍术及其相关 10 个算题总体比，相距是太远了。

如果我们把视野从 13 世纪之初扩大到整个中世纪欧洲[①]，14 世纪拜占庭数学家阿古尔·伊萨克(I. Argyros，1318～1372 年)提出的一个问题，19 世纪在德国发现的慕尼黑手抄本(1450 年)中的问题，都是上引斐波那契设计一个数的类似叙述，没有任何进步之处。15 世纪德国数学家，第一部独立于天文学的三角学作者雷基奥蒙坦(Regiomontanus，1436～1476)于 1463 年与友人通信中提出，相当于说：

$$x\equiv 15 \pmod{17}\equiv 11 \pmod{13}\equiv 3 \pmod{10}。$$

友人复信指出解答是1 103，3 313以及其他的数。在再次通信中雷氏指出：“你适当地求出最小的数1 103，就足够了，满足问题的数，有无限多个。如果加上一个用三个因数，即 17×13×10 的乘积，

① 中世纪欧洲不定分析有关材料取自 U. Libbrecht，Chinese Mathematics in 13th Century，pp. 236～265，MIT Press，1973

就得到第二个答数。用同样的方法，再加上这个数就得到第三个答数，等等。”雷氏理解同余式组的一般解，但他并没有指出怎样获得那个特解。

又经过一个世纪，另一个慕尼黑抄本，称哥廷根抄本(约 1550 年)被发现。其中有一次同余式组问题，其代表作及其解法：

问题：解　$x=5(\mathrm{mod}\ 7)\equiv7(\mathrm{mod}\ 8)\equiv6(\mathrm{mod}\ 9)\equiv0(\mathrm{mod}\ 11)$。

解法：

(i)求出　$8\times9\times11=792$，取 $792-7n=1$，

$7\times9\times11=693$，取 $693-8n=5$，

$7\times8\times11=616$，取 $616-9n=4$，

$7\times8\times9=504$，取 $504-11n=9$。

(ii)第 1 式余数是 1，同余式已解。

第 2 式的余数是 5，作如下运算

$$\begin{array}{l} 5+5=10, \\ \underline{-8} \\ \quad 2+5=7 \\ \qquad\quad +5=12 \\ \qquad\qquad \underline{-8} \\ \qquad\qquad\quad 4+5=9 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{-8} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 1 \end{array}$$

这就是

$$\begin{array}{r} 693\equiv5(\mathrm{mod}\ 8) \\ \underline{693\equiv5(\mathrm{mod}\ 8)} \\ 2\times693\equiv2(\mathrm{mod}\ 8) \\ \underline{693\equiv5(\mathrm{mod}\ 8)} \\ 3\times693\equiv7(\mathrm{mod}\ 8) \\ \underline{693\equiv5(\mathrm{mod}\ 8)} \\ 4\times693\equiv4(\mathrm{mod}\ 8) \end{array}$$

$$\frac{693\equiv 5 \pmod 8}{5\times 693\equiv 1 \pmod 8}$$

类似地求出$7\times 616\equiv 1 \pmod 9$，$5\times 504\equiv 1 \pmod{11}$。

(iii)哥廷根抄本作者说：以同余因数

$1\times 792=792, 5\times 693=3\,465, 7\times 616=4\,312, 5\times 504=2\,520$

乘以相应余数

$1\times 792\times 5=3\,960, 5\times 693\times 7=24\,265, 7\times 616\times 6=25\,872$，$5\times 504\times 0=0$，

其和为54 037。

$$\begin{array}{r} \text{(iv)}\ 3\,960\equiv 5 \pmod 7\equiv 0 \pmod 8\equiv 0 \pmod 9\equiv 0 \pmod{11} \\ 24\,255\equiv 0 \pmod 7\equiv 7 \pmod 8\equiv 0 \pmod 9\equiv 0 \pmod{11} \\ 25\,872\equiv 0 \pmod 7\equiv 0 \pmod 8\equiv 6 \pmod 9\equiv 0 \pmod{11} \\ +2\,520\equiv 0 \pmod 7\equiv 0 \pmod 8\equiv 0 \pmod 9\equiv 0 \pmod{11} \\ \hline 54\,037\equiv 5 \pmod 7\equiv 7 \pmod 8\equiv 6 \pmod 9\equiv 0 \pmod{11} \end{array}$$

我们对照《秦九章》大衍术作一些解释。非常有兴趣地指出：解法第(i)步恰是大衍术中求衍数 M_i，当建立

$$M_iF_i\equiv 1 \pmod{\mu_i}$$

后，大衍术总是“以各定母(μ_i)满去衍数，各余名曰奇数”即求　$0<M_i'<\mu_i$，而　$M_i'\equiv M_i \pmod{\mu_i}$。哥廷根抄本从 $7\times 9\times 11=693$，取 $693-8n=5$，$693\equiv 5 \pmod 8$，恰恰就是求奇数的运算。

解法第(ii)步　就是解 $M'F_i\equiv 1 \pmod{\mu_i}$——大衍求一术的另一种形式。

解法第(iii)步　就是大衍术“求各总”。

解法第(iv)步　就是“并总，满衍母去之”。

但毕竟这是大衍术的初级阶段。很难设想，当入算数据相当大时，其计算工作量之大是不言而喻的。例如解法第(ii)步虽然不存在 $r_n=1$，$r_{n+1}=0$，n 是奇数还是偶数的问题，但是遇到像求开

禧历上元积年时必须解　377 873 $Y\equiv 1 \pmod{499\,067}$，用大衍求一术算法进程中间数据愈来愈小，而哥廷根抄本始终以377 873，499 067入算，就带来很大麻烦。

大衍求一术，即二元一次不定方程的通解，在欧洲直到17世纪初才有论文讲清楚。这是巴歇(C. G. Bachet de Méʒiriac，1581～1638)的工作，后来在畅销书狄克逊(L. E. Dickson，1874～1954年)的《数论史》(History of the Theory of Numbers)中作完整介绍，就是今日数论教科书的常见方法。这里不赘述。

17世纪中叶荷兰学者斯库廷(Schootes，Frans Van，?～1660年)在数学专著《数学练习》(Exercitationum Mathematicarum，1657)中主要用解析几何方法解决一些引人入胜的疑难问题。书中也列专章论不定分析，章名“一数除以已知数剩下余数，求此数的方法。”我们来剖析其中一道典型的题及其解法。

解　$x\equiv 2 \pmod 7 \equiv 1 \pmod{11} \equiv 9 \pmod{13}$。

解法[①]

(i)求7，11，13的最小公倍数｛7，11，13｝=1 001。

(ii)1 001÷7=143，1 001÷11=91，1 001÷13=77。

(iii)143÷7=20……3，(余数)

91÷11=8……3，

77÷13=5……12。

(iv)$143\alpha\equiv 3 \pmod 7$，求得 $\alpha=5$。

$91\beta\equiv 3 \pmod{11}$，　$\beta=4$。

$77\gamma\equiv 12 \pmod{13}$，　$\gamma=12$。

(v)143×3，91×4，77×12。

(vi)斯库庭最后列出表

① 为便于说明解法，次序已有改动，所有计算式子则完全参照原著。

除数	余数	乘数	乘积
7	2	715	1 430
11	1	364	364
13	9	924	8 316
			10 110－1 001n＝100(答数)

斯库廷解法比起一个世纪前哥廷根抄本，对于解一次同余组问题，取得了规范化。步骤(i)求模数的最小公倍数，(ii)相当于求衍数，(iii)简化 M_i 为 M_i'，(iv)解一次同余式，已有巴歇法为工具，(v)相当于求用数，(vi)求“各总”，直至“并总”，得答数。

从中世纪斐波那契《计算之书》成书起算迄斯库廷《数学练习》问世，欧洲历经漫长的四个半世纪在解一次同余式组方面的进展和规范化逐渐接近于《秦九章》大衍术。但是毕竟还存在很大一段差距：例如大衍求一术的熟练运用，模数出现分数和小数怎么办？模数不两两互素怎样处理？对同类问题解法的系统完整的总结等等。经过事实比较，人们会发现《秦九章》大衍术的重要历史意义。

让事实对 12、13 世纪世界两大数学名著：斐波那契《计算之书》(包括《实用几何》等其他力作)和秦九韶《数书九章》作评比。某些内容例如在斐氏《平方数书》中的数论论述：x^2+y^2 和 x^2-y^2 不可能同时是平方数，x^4-y^4 不可能是平方数。又 x^2+h 和 x^2-h 同时是平方数，仅当 h 是相含数(congruum)时才成立。[①]因此斐氏被誉为丢番图(Diophantus)和费马(Fermat，P. de)之间在数论方面的杰出数学家。前已指出，于此，秦氏书为一空白点。但是秦氏书在数学其他领域内的广度、深度，中世纪数学专著无有能与其匹敌者，其中某些专题如线性方程组的矩阵初等变换解法、

① 对于任意自然数 a，b，从下面方法构成的数 h，都称为含数：$h=ab(a+b)(a-b)$，当 $a+b$ 是偶数，$h=4ab(a+b)(a-b)$，当 $a+b$ 是奇数，可以证明 $24|h$。

多项式方程的数值解法，特别是同余式组的解法，整套理论迄 19 世纪仍是世界第一流的，以下将在第五节作出相应比较。

第四节　《数书九章》与和算

在本《大系》第四卷已曾评价南北朝数学与和算。日本数学发展到江户时代，即 17 世纪至 19 世纪中叶二百余年间，数学事业尤为兴旺发达。江户时代数学界领袖人物，人称和算之圣的关孝和(约 1642～1708 年)著作等身，成果迭出。但当时都师弟相传。直至 20 世纪 70 年代始经整理有定本出版①。为与《秦九章》的工作作比较，以下主要选关氏代表作《括要算法》(1683 年)中两章陈述。

关孝和，日本群马县人，字子豹，号自由亭。中算经典在隋唐时已传入日本，其后宋元明新作络续东佈，其中可考的有宋《杨辉算法》、元朱世杰《算学启蒙》、明吴敬《九章算法比类大全》、明程大位《算法统宗》。中算对关氏治学有极大影响。关氏在十九岁时曾手抄《杨辉算法》一部三册②。其中《续古摘奇算法》卷上剪管术五问，对他研究一次同余组应有直接借鉴作用。至于宋金元时期另外三部要籍：《数书九章》、《四元玉鉴》和《测圆海镜》也有传入日本的痕迹。狩野亨吉说，相传关孝和在奈良某寺读中算书三年③。而有人说《数书九章》并无传入日本形迹④。可见关氏是否见过《秦九章》，关氏有关多项式方程的建立、同余理论及其解法是否独立完成是一未解之谜。没有必要遽下结论。从

① 平山谛，等. 关孝和全集. 大阪：大阪教育图书株式会社，1974

② 中国科学院自然科学史所藏有此抄本的抄本。

③ 李俨. 中算传入日本的经过. 科学出版社，1954，5：180

④ 日本学士院. 明治前日本数学史，卷 2. p.178

两书成果对比、分析可知互有短长，而异曲同工。

一　多项式方程

关孝和有专著《开方算法》详论多项式数值解的理论问题。在建立方程方面熟练掌握中算中的天元术，在解方程求根的精度上较中算为胜，现先选录一题：

"今有借金一千两，只云每年三百两。五年还讫本利一千五百两。别今以此利每年三百两，欲四年还讫本利一千二百两。问：今借元金几何？"(答数今年元金852.382 371,关孝和《大成算经续录·勿惮改答术》第 89 题)

关氏用日本式汉语写的问题大意是说：以借本金1 000两每年还 300 两，5 年还清共本利和1 500两的年利率去计算每年还 300 两，4 年还清共本利和1 200两，应借本金多少两？他按照在 13 世纪时中国北方流行的天元术口气说"设天元一为今借元金"，通过如积相消，立出天元式。如设应借本金为 x，他的天元式相当于方程

$$344\ 331\times10^{18}x^5+447\ 849\times10^{16}x^4+37\ 422\times10^{14}x^3-1\ 944\times10^{12}x^2-972\times10^{10}x-81\times10^8=0。$$

他又说："四乘方翻法开之，得今借元金，合问"。

经验算，设年利率为 y，按题意先立出 5 年还清借 1 000 两这笔帐，这个方程是

$$((((1\ 000(1+y)-300)(1+y)-300)(1+y)-300)(1+y)-300)(1+y)-300=0,$$ 得 $y\approx0.152\ 5$。再据题意按同一年利率设所借本金为 x，建立每年仍还 300 两，4 年还清本利和 1 200 两这个方程，再求解，关氏所给答数，准确无误。

再录另一题：

"今有一十九角，每面一寸。问：平中径、角中径，各几何？"

(答数:平中径 2.996 335 726 寸弱,角中径 3.037 766 91 寸强[①],《括要算法》卷 3)。

《括要算法》卷 3 论角法:对于正 n 边形,已给边长 1 寸,建立方程求内接于圆、外切于圆正 n 边形的半径长(r_n,R_n)。关氏立 r_n,R_n 为天元一,借助于几何关系建立天元式。这是十分困难而繁复的问题。他对 $n=3\sim20$ 作全面讨论[②],所立天元式都正确无误[③]。然后以正负开方法解方程,所有 36 个答数经检验也都准确。以 $n=19$ 为例,已录问题为"十九角"指正 19 边形,每"面"是中算传统用语,面即边。"平中径","角中径"分别指 r_n,R_n。他用象形筹算数码出所立天元式,如用现代多项式方程记法,相当于:

$$4\,990\,736r_{19}^{18}-63\,504\,385r_{19}^{16}+190\,413\,152r_{19}^{14}-206\,389\,248r_{19}^{12}+94\,595\,072r_{19}^{10}-19\,348\,992r_{19}^{8}+1\,736\,448r_{19}^{6}-62\,016r_{19}^{4}+684r_{19}^{2}-1=0。$$

$$19R_{19}^{18}-285R_{19}^{16}+1\,254R_{19}^{14}-2\,508R_{19}^{12}+2\,717R_{19}^{10}-1\,729R_{19}^{8}+665R_{19}^{6}-152R_{19}^{4}+19R_{19}^{2}-1=0。$$

关孝和著《开方算式》(年代不详)一书,其中有课商、穷商二节。

其一,课商 关孝和说:"课商,考商位也。凡量最初之商者,有难考得适数于一般,故或生起于一个数…而窥其位。…实余则商不及,故逐增其数。…若误而太过,则诸级反复,而难得同名

---

① 用三角函数值验算:$R_{19}=\frac{1}{2}\csc\frac{360°}{38}=3.037\,766\,9$,

$$r_{19}=\frac{1}{2}\cot\frac{360°}{20}=2.996\,335\,6.$$

② 沈康身.关孝和列和解高次方程典型算例赏析.数学史研究文集第四辑,内蒙古大学出版社、九章出版社,1993:84~90

③ 平山谛,等.关孝和全集.大阪:大阪教育图书株式会社,1974

之后商。”这里的课字有试测之意，从方程常数项大小变化[1]来窥测用正负开方法所估根是太小或是太大。关孝和以解 $x^2-10x+25=0$ 为例，现用综合除法说明其试测记录：

1	−10	25	1	
	1	−9		
1	−9	16		
	1			
1	−8	16	2	减根 1，常数项未变号，再减根。
	2	−12		
1	−6	4		
	2			
1	−4	4	2	再减根 2，常数项仍未变号，再减根 2，常数项为 0。
	2	−4		
1	−2	0		

所求根　$x=1+2+2=5$。

关孝和还举例，解　$-x^3+22.75x^2-192.1875x+578.640625$。

−1	22.75	−192.187 5	578.640 625	5	
	−5	88.75	−517.187 5		
−1	17.75	−103.437 5	61.453 125		
	−5	63.75			
−1	12.75	−39.687 5			
	−5				
−1	7.75	−39.687 5	61.453 125	5	
	−5	13.75	−129.687 5		
−1	2.75	−25.937 5	−68.234 375		减根 5，常数项未变号，
	−5	−11.25			
−1	−2.25	−37.187 5			
	−5				
−1	−7.25	−37.187 5	−68.234 375		再减根 5，常数项变号.

① 相当于《秦九章》所说“投胎、换骨”。

加根 1，得新方程

$$-x^3-4.25x^2-25.6875x-37.296875=0,$$

常数项为负，再加根 2 得方程

$$-x^3+1.75x^2-20.6875x+5.078125=0,$$

常数项变正，于是原方程根第一位数应是 $5+5-3=7$。照此法继续进行，关孝和解得原方程有正根　$x=7.25$。

其二，穷商　是秦九韶《数书九章》卷 12 第 1 题(囤积量谷)求微数并结合《张邱建算经》卷下第 30 题求近似根方法以获得精度较高的正负开方法，关孝和举例是解相当于方程 $x^2+8x+11=0$。

定初商是 -1

$$\begin{array}{ccc|l}
1 & 8 & 11 & -1 \\
 & -1 & -7 & \\ \hline
1 & 7 & 4 & \\
 & -1 & & \\ \hline
1 & 6 & 4 & -0.7 \\
 & -0.7 & -3.71 & \\ \hline
1 & 5.3 & 0.29 & \\
 & -0.7 & & \\ \hline
1 & 4.6 & 0.29 &
\end{array}$$

定次商是 -0.7

从新方程　$x^2+4.6x+0.29=0$

定原方程的近似根是 $x=-1.7-\dfrac{0.29}{4.6}=-1.763$①。

对原方程减根 -1.763

$$\begin{array}{ccc|l}
1 & 8 & 11 & -1.763 \\
 & -1.763 & -10.995831 & \\ \hline
1 & 6.237 & 0.004169 & \\
 & -1.763 & & \\ \hline
1 & 4.474 & 0.004169 &
\end{array}$$

关孝和认为原方程还有更精确解是

---

① 都是有效数字。

$$x=-1.763-\frac{0.004\ 169}{4.474}=-1.763\ 931\ 8$$[①]。

上引二例，前者与《秦九章》卷 12 第 5 题(累收库本)同是百分法中的利息问题，但秦题是算术题，而关题有了变化，成为四次方程题，是新创。又课商术也是新创，而加根可以补中算减根之不足。穷商术兼有张、秦算法优点，同时可以获得根的好几位有效数字。此外用正负开方法求出方程的负根在方程论上又较秦氏提高一步，关孝和使用秦氏相同术语，如"乘方翻法开之"。筹算象形字记的天元式，也自上而下纵行：常数在上，一次项系数紧接其下，依次直到 18 次方系数；与秦氏所记次序一致，关氏未列解方程演算过程。关氏在《秦九章》成书后四百多年，在正负开方某些方面已高秦氏一着。

二　一次同余式组

关孝和《括要算法》卷 2 为诸约之术，其中心问题是解一次同余式及一次同余式组，用日本式汉语写。其所用数学名词，有的与中算同义，如：等数、约(分)、通(分)、分子、分母、并、法、实、商等，有的虽是汉字但与中算异义，如：互约、逐约、齐约、遍约。下面分三段陈述。

互约、逐约、齐约、遍约术

诸约之术中所论互约、逐约、齐约、遍约四术是为剩一术、剪管术所作准备工作。总的说，这六术与《秦九章》大衍术各细节都有对应关系，以下用秦氏术语来解释，就非常贴切。

互约术

相当于大衍术中对二元数(m_1,m_2)求定母(μ_1,μ_2)的方法，我们知道作为定母的条件有三：

---

① 都是有效数字。

$(\mu_1,\mu_2)=1$，$\mu_i|m_i(i=1,2)$，$\mu_1\mu_2=\{m_1,m_2\}$

《括要算法》列有三例。

例1　"今有六个，八个，问互约之，各几何？答曰：六为三，八不约。术曰：六与八互减，得等数二，以约六为三。（自注：三与八互减，得等数一，则不约而止，后效之）。又术曰：八与六互减，得等数二，以约八为四。四与六互减，得等数二，以因四为八，约六为三，合问。"

本题 $m_1=6$，$m_2=8$。初术是说 $(m_1,m_2)=2$，而 $\left(\frac{m_1}{2},m_2\right)=1$，就取 $\mu_1=\frac{m_1}{2}=3$，$\mu_2=8$。又术是说 $(m_1,m_2)=2$，而 $\left(m_1,\frac{m_2}{2}\right)=(6,4)=2$，就取 $\mu_1=\frac{6}{2}=3$，$\mu_2=4\times2=8$。

例2　"今有三十六个，四十八个，问互约之，各几何？答曰：三十六为九，四十八为一十六。术曰：三十六与四十八互减得等数一十二，以约三十六为三，三与四十八互减，得等数三，以因三为九，约四十八为一十六。"

本题 $m_1=36$，$m_2=48$。术文是说 $(m_1,m_2)=12$，而 $\left(\frac{m_1}{12},m_2\right)=(3,48)=3$，就取 $\mu_1=3\times3=9$，$\mu_2=\frac{48}{3}=16$。

例3　"今有三十个，五十四个，问互约之，各几何？答曰：三十为五，五十四不约。又曰：三十为一十，五十四为二十七。术曰：三十与五十四互减，得等数六，以约三十为五。又术曰：五十四与三十互减，得等数六，以约五十四为九。九与三十互减，得等数三，以因九为二十七，约三十为一十，合问。"

本题 $m_1=30$，$m_2=54$，一问有二答：$\mu_1=5$，$\mu_2=54$；或 $\mu_1=10$，$\mu_2=27$。初术是说：$(30,54)=6$，而 $\left(\frac{m_1}{5},m_2\right)=1$，就取 $\mu_1=5$，$\mu_2=54$。又术是说如取 $\mu_1'=30$，$\mu_2'=\frac{54}{6}=9$，而 $(\mu_1',\mu_2')=$

$(30,9)=3\neq1$，就取 $\mu_1=\frac{30}{3}=10$，$\mu_2=9\times3=27$。

关氏在这里所举三个适当例子，揭示出从二“元数”求定母的一般方法：先求 $(m_1,m_2)=d_1$，取 m_1，$\frac{m_2}{d_1}$，如果二者互素，即 $\left(m_1,\ \frac{m_2}{d_1}\right)=d_2$，而 $d_2=1$，二者就是所求定母。如果 $d_2\neq1$，则取 $\frac{m_1}{d_2}$，$\frac{m_2}{d_1}d_2$，如二者互素，即 $\left(\frac{m_1}{d_2},\frac{m_2}{d_1}d_2\right)=d_3$，而 $d_3=1$，二者就是所求定母。如果 $d_3\neq1$，还可以如法继续进行，直至符合定母条件止，正如关氏在自注中所说：“后效之”。

逐约术

相当于秦氏大衍术中从一组元数 m_1，m_2，…，m_n 求定母 μ_1，μ_2，…，μ_n 的方法，《括要算法》列三例。

例1　相当于已给元数

$m_1=105$，$m_2=112$，$m_3=126$，关氏求得定母

$\mu_1=5$，$\mu_2=16$，$\mu_3=63$。

例2　相当于已给元数

$m_1=105$，$m_2=112$，$m_3=126$，$m_4=168$，求得定母

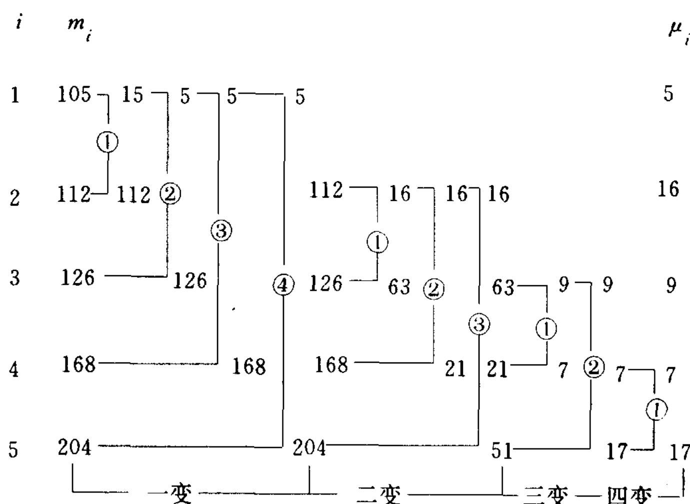
$\mu_1=5$，$\mu_2=16$，$\mu_3=9$，$\mu_4=7$

以下全录例3题文、答文和术文，以充分解释。

例3　“今有一百零五个、一百一十二个、一百二十六个、一百六十八个、二百零四个，问逐约之，各几何？答曰：一百零五为五、一百一十二为一十六、一百二十六为九、一百六十八为七、二百零四为一十七。术曰：一百零五与一百一十二依互约术，一百零五为一十五，一百一十二不约。一十五与一百二十六依互约术，一十五为五，一百二十六不约。五与一百六十八依互约术皆不约。五与二百零四依互约术，皆不约。一百一十二与一百二十六依互约术，一百一十二为一十六，一百二十六为六十三。一十

六与一百六十八依互约术，一十六不约，一百六十八为二十一。一十六与二百零四依互约术，一十六不约，二百零四为五十一。六十三与二十一依互约术，六十三为九，二十一为七。九与五十一依互约术，九不约，五十一为一十七。七与一十七依互约术，皆不约，合问。”

本例 $m_1=105$，$m_2=112$，$m_3=126$，$m_4=168$，$m_5=204$。答案：$\mu_1=5$，$\mu_2=16$，$\mu_3=9$，$\mu_4=7$，$\mu_5=17$ 符合定母条件。关氏术文所说相当于秦氏大衍术中所规定的“连环求等”，经四变、十次互约术取得结果。现列表解释如下：



其中一变：

①$(105,112)=7$，$\dfrac{105}{7}=15$，$(15,112)=1$，取 $\mu_1'=15$，$\mu_2'=112$。

②$(15,126)=3$，$\frac{15}{3}=5$，$(5,126)=1$，取 $\mu_1'=5$，$\mu_3'=126$。

③$(5,168)=1$，④$(5,204)=1$，皆不约，$\mu_1=5$，$\mu_4'=168$，$\mu_5'=204$。

二变：

①$(112,126)=4$，$\frac{112}{14}=8$，$(8,126)=2$，就取 $\mu_2''=8\times2=16$，$\mu_3''=\frac{126}{2}=63$。

②$(16,168)=8$，$\frac{168}{8}=21$，$(16,21)=1$，取 $\mu_2''=16$，$\mu_4''=2$。

③$(16,204)=4$，$\frac{204}{4}=51$，$(16,51)=1$，取 $\mu_2=16$，$\mu_5''=51$。

三变：

①$(63,21)=21$，$\frac{63}{21}=3$，$(3,21)=3$，取 $\mu_3'''=3\times3=9$，$\mu_4'''=\frac{21}{3}=7$。

②$(9,51)=3$，$\frac{51}{3}=17$，$(9,51)=1$，取 $\mu_3=9$，$\mu_5'''=17$。

四变：

①$(7,17)=1$，取 $\mu_4=7$，$\mu_5=17$。

从本例可见关氏逐约术与秦氏用连环求等正约、反约、约彼乘此等手续是一致的。

齐约术

求几个数最小公倍数的方法。《括要算法》有三例，其运算步骤是：

例 1　$\{6,8\}=3\times8$。

例 2　$\{6,8,9\}=\{\{6,8\},9\}=\{24,9\}=72$。

其中两数的最小公倍数都借助于两两求等后做除法，得到结果，即 $\{a,b\}=\frac{ab}{(a,b)}$，所录例 3 的演算全过程，相当于说：

例 3 $\{6, 14, 15, 25\}=\{\{6, 14\}, 15, 25\}=\left\{\frac{6\times14}{(6,14)}, 15, 25\right\}=\{\{42, 15\}, 25\}=\left\{\frac{42\times15}{(42,15)}, 25\right\}=\{210, 25\}=\frac{210\times25}{(210,25)}=1\,050$。

遍约术

求几个数的最大公约数的方法。《括要算法》有三例，其运算步骤是依次求等，如

例 3 $(48,72,108,128)=((48,72),108,128)=(24,108,128)=((24,108),128)=(12,128)=4$。

剩一术

相当于秦氏大衍求一术，即解一次同余式。《括要算法》列二例：

例 1 解 $19x\equiv1(\mathrm{mod}\ 27)(a<c)$。

例 2 解 $179x\equiv1(\mathrm{mod}\ 74)(a>c)$。

其例 1 解法列表对照如下：

剩 一 术	大 衍 求 一 术
题文：今有以左一十九累加之得数，以右二十七累减之，剩一。问左总数几何	奇数一十九，定母二十七，求乘率
答数：左总数一百九十。	答数：乘率一十。

续表

<table>
<tr><th>剩　一　术</th><th>大 衍 求 一 术</th></tr>
<tr><td>术文：以左一十九(a)除右二十七(c)，得商一(q_2)，不尽八为甲(r_2)。以甲不尽八除左一十九，得商二(q_3)，不尽三为乙(r_3)。以乙不尽三除甲不尽八，得商二(q_4)，不尽二为丙(r_4)。以丙不尽二除乙不尽三，得商一(q_5)，不尽一为丁(r_5)，乃余一为止。
$$\begin{array}{r|c|c|l} & a=19 & c=27 & \\ q_3=2 & \underline{-16} & \underline{-19} & q_2=1 \\ & r_3=3 & r_2=8 & \\ q_5=1 & \underline{-2} & \underline{-6} & q_4=2 \\ & r_5=1 & r_4=2 & \end{array}$$</td><td>$$\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline j_1\ 1 & a\ 19 \\ \hline & b\ 27 \\ \hline & q_2\ 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline & q_3\ 2 \\ \hline j_1\ 1 & a\ 19 \\ \hline j_2\ 1 & r_2\ 8 \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline j_3\ 3 & r_3\ 3 \\ \hline j_2\ 1 & r_2\ 8 \\ \hline & q_4\ 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline & q_5\ 1 \\ \hline j_3\ 3 & r_3\ 3 \\ \hline j_4\ 7 & r_4\ 2 \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{|c|c|}\hline & q_5\ 1 \\ \hline j_5\ 10 & r_5\ 1 \\ \hline j_4\ 7 & r_4\ 2 \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$</td></tr>
<tr><td>甲商与乙商相因，加定一，得三为子(j_3)。</td><td>$j_3=q_3j_2+j_1=q_3q_2+1=3$</td></tr>
<tr><td>丁与丙商相因，加甲商，得七为丑(j_4)。
丑与丁商相因，加子，得一十(j_5)。
以左一十九乘之，得左总数一百九十，合问。</td><td>$j_4=q_4j_3+j_2=7$
$j_5=q_5j_4+j_3=10$
$19\times10=190\equiv1(\bmod 27)$</td></tr>
</table>

剪管术

解一次同余式组的方法。剪管术一词首见杨辉《续古摘奇算法》卷上，以名孙子剩余定理，《括要算法》列剪管术九例，各有特色。我们记同余式组为

$$a_ix\equiv r_i(\bmod m_i)(i=1,2,\cdots,n)。$$

此九例可分类如下：

$a_i=1$

其一，$(m_i,m_j)=1$，$(1\leqslant i,j\leqslant n)$。

例 1　含二同余式：$x\equiv1(\text{mod }5)\equiv2(\text{mod }7)$。

例 3　含三个同余式：

$$x\equiv2(\text{mod }3)\equiv1(\text{mod }5)\equiv5(\text{mod }7)。$$

例 5　含四个同余式：

$$x\equiv3(\text{mod }5)\equiv2(\text{mod }7)\equiv2(\text{mod }9)\equiv7(\text{mod }11)。$$

其二，$(m_i,m_j)\neq1$，$(1\leqslant i<j\leqslant n)$。

例 2　含二同余式：$x\equiv2(\text{mod }36)\equiv14(\text{mod }16)$。

例 4　含三个同余式：

$$x\equiv3(\text{mod }6)\equiv3(\text{mod }8)\equiv5(\text{mod }10)。$$

$a_i>1$。$a_1>1$

其一，$(m_i,m_j)=1$，$(1\leqslant i,j\leqslant n)$。

例 9　含二同余式：$13x\equiv3(\text{mod }7)\equiv8(\text{mod }9)$。

例 7　含三个同余式：

$$8x\equiv2(\text{mod }3),\ 7x\equiv3(\text{mod }4),\ 6x\equiv3(\text{mod }5)。$$

其二，$(m_i,m_j)\neq1$，$(1\leqslant i,j\leqslant n)$，都含三个同余式，其中

例 8　$34x\equiv6(\text{mod }8)\equiv14(\text{mod }20)\equiv23(\text{mod }27)$。

我们把例 6 列表解释如下：

剪　管　术	解　　释
题文：今有物不知其数。只云三十五乘，四十二除，余三十五个。四十四乘，三十二除，余二十八个。四十五乘，五十除，余三十五个。问总数几何？	解同余组 $\begin{cases}35x\equiv35(\text{mod }42)\\44x\equiv28(\text{mod }32)\\45x\equiv35(\text{mod }50)\end{cases}$
答数：一十三	答：$x=13$

续表

<table>
<tr><th>剪　管　术</th><th>解　　释</th></tr>
<tr><td>术文：三十五与四十二互减，得等数七，以约三十五乘，四十二除，为五乘六除。
四十四与三十二互减，得等数四，以约四十四乘，四十二除，为十一乘八除。
四十五与五十互减，得等数五，以约四十五乘，五十除，为九乘一十除。</td><td>解：
(35,42)=7，(44,32)=4，(45,50)=5。分别约题设各同余式，得同解同余式组
$$\begin{cases}5x\equiv 5\pmod{6}\\ 11x\equiv 7\pmod{8}\\ 9x\equiv 7\pmod{10}\end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>六除、八除、一十除，依逐约术得三除、八除、五除，依图布算：
<table><tr><td>𝍤 五乘</td><td>𝍢 三除</td></tr><tr><td>𝍩𝍠 一十一乘</td><td>𝍧 八除</td></tr><tr><td>𝍨 九乘</td><td>𝍤 五除</td></tr></table></td><td>对元数是 6，8，10 的同余式组化为定母是 3，8，5 的同解同余式组
$$\begin{cases}5x\equiv 5\pmod{3}\\ 11x\equiv 7\pmod{8}\\ 9x\equiv 7\pmod{5}\end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>以五乘为左，以三除为右，依剩一术得左二段。以一十一为左，以八除为右，依剩一术得左三段。以九乘为左，以五除为右，依剩一术得左四段。</td><td>改解$\begin{cases}5x_1\equiv 1\pmod{3}\\ 11x_1\equiv 1\pmod{8}\\ 9x_1\equiv 1\pmod{5}\end{cases}$
从大衍求一术，它与
$$\begin{cases}x_1\equiv 2\pmod{3}\\ x_1\equiv 3\pmod{8}\\ x_1\equiv 4\pmod{5}\end{cases}$$
同解</td></tr>
</table>

续表

剪　管　术	解　　释
八除、五除相因得四十为左，以三除为右，依剩一术得四十，以左二段乘之，得八十。	化为互相独立的同余式 $40F_1\equiv 1 \pmod{3}$，用大衍求一术解得 $F_1=1$，$2\times 40F_1=80$
三除、五除相因得一十五为左，以八除为右，依剩一术，得一百零五，以左三段乘之，得三百一十五，满一百二十去之，余七十五。	$15F_2\equiv 1 \pmod{8}$ 用大衍求一术解得 $F_2=7$，$3\times 15F_2=315\equiv 75 \pmod{120}$
三除、八除相因得二十四为左，以五除为右，依剩一术，得九十六，以左四段乘之，得三百八十四，满一百二十去之，余二十四。	$24F_3\equiv 1 \pmod{5}$ 用大衍求一术解得 $F_3=4$，$4\times 24F_3=384\equiv 24 \pmod{120}$
三除、八除、五除相乘，得一百二十为去位。	$M=3\times 8\times 5=120$
三十五乘四十二除(的)余(数用)七约之，以八十乘之。	$\frac{35}{7}\times 80=5\times 80=400$
四十四乘三十二除余四约之，以七十五乘之。	$\frac{28}{4}\times 75=7\times 75=525$
四十五乘五十除余五约之，以二十四乘之。	$\frac{35}{5}\times 24=7\times 24=168$
三位相并，共得一千零九十三个，满一百二十去之，余一十三个，为总数。	$x=400+525+168=1\,093\equiv 13 \pmod{120}$

本例先对题设同余组中同余式系数 $(a_i,r_i,m_i)=d\neq 1$ 先行约简，记 $a_i=a_{i1}d$，$r_i=r_{i1}d$，$m_i=m_{i1}d$，则同余组变换为

$$a_{i1}x\equiv r_{i1} \pmod{m_{i1}}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

如　$(m_{i1}, m_{j1}) \neq 1$，$1 \leqslant i$，$j \leqslant n$，就用逐约术求得相应的定母 μ_1，μ_2，…，μ_n，得同解同余式组

$$a_{i1}x \equiv r_{i1} (\mathrm{mod}\ \mu_i)$$

改解 $a_{i1}x_1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ \mu_i)$，用大衍求一术化为同解同余组

$$x_1 \equiv c_i (\mathrm{mod}\ \mu_i)。$$

从彼此独立的 n 个同余式

$$M_i F_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ \mu_i),\quad M_i = M/\mu_i$$

解出　　　　F_1，F_2，…，F_n，

则　　　　$$x_1 \equiv \sum_{i=1}^{n} c_i M_i F_i (\mathrm{mod}\ M),$$

而题设同余组的解是　$x \equiv \sum_{i=1}^{n} r_{i1} c_i M_i F_i (\mathrm{mod}\ M)$。

秦、关二书直接渊源关系待考，而关孝和诸约之术启蒙于中华，自不待言。秦氏大衍术除考虑自然数模数外，兼及小数、分数为关氏术所无，关氏所举例不提“复数格”也是美中不足之处。秦书所设十题题材多样、丰富多彩，秦氏算题数据复杂，同余式个数众多，答数有达万亿计。对比之下关氏算题就嫌简单，而诸约之术立论之成熟、完善在时间上固远后于秦术，而在质量上则有青出于蓝而胜于蓝之处，现再指出其特色：

其一，在解同余式组问题中秦氏为使两两不互素元数化为两两互素，发明连环求等方法，化元数为定母，定母互乘为衍母，从而得以借助孙子剩余定理求解。其中求定母实为关键。关氏也以互约术、逐约术居诸约之术之先，足见关氏认识到这一着的重要意义，可谓英雄所见正同。“为何求最小公倍数要通过互约、逐约？”其中神机妙算适为西方人士所难理解。秦、关二氏在时间相距上下四百多年，空间相离东西数千里的不同环境中而从元数化定母的算法竟如此相像，真令人惊奇不已。关氏互约术、逐约术数以百计的运算中可以雄辩地说明秦氏所谓“约奇弗约偶”“约偶弗约

奇”指的仅是元数所在位置，并非指数的单或双。自来读大衍术至此，奇、偶含何义？每使人大惑不解，众说纷纭。关氏立术凡六例，为作出令人折服的解释。然而两术同中也有异，在连环求等中，关氏的互约术，只要求结果互素，“约奇弗约偶”，“约偶弗约奇”并无硬性规定，因此就不存在反约。这样做是合理的。在互约术例1中关氏自注尤为精彩，适与秦氏所论“续等”，“约彼复乘此”一致。还须强调指出中算、和算俱无素数概念，互约术与逐约术不用素因数分解，以解决有关问题。迅速、正确，至今有现实意义。

其二，关于一组数的最小公倍数求法，秦氏“以定(母)相乘为衍母”，关氏齐约术求法简便，已合数论 $\{a, b, c, \cdots, d\} = \{\{a, b\}, c, \cdots, d\}$ 之理。关于一组数的最大公约数求法，秦氏无一定法则，关氏遍约术则合数论 $(a,b,c,\cdots,d)=((a,b), c, \cdots, d)$ 之理。

其三，大衍求一术自元朝以后在中国即告失传，正如清代学者张敦仁《求一算术》(1803年)自序中说：“求一术仅见于宋秦九韶《数书九章》中，五百年来无有知其说者矣”。关孝和生当我国明清两朝之交，大衍术在中国绝学已濒沦亡，不意东邻扶桑异军突起，为此术大放异彩。

其四，《括要算法》剪管术九例中，前五例立术同中算，而数据全异。后四例则中算所无，可谓后来居上之作。

第五节 《数书九章》与19世纪欧洲数学

欧洲进入19世纪，数学人才辈出，群星灿烂，成果辉煌。但其中《秦氏书》中有二项工作直到此时才被欧洲学者赶上。

一　多项式方程

数值解多项式方程与用求根公式解方程是解法的不同方式。从实用价值看，特别是高次方程，如众所周知五次以上多项式不存在求根公式。何况用公式解，从计算方法要求看，计算工作量不如数值解简洁。到19世纪数值解方程就在欧洲应时诞生，以意大利鲁菲尼(P. Ruffini，1765～1820年)、英国霍纳(W. G. Horner，1789～1857年)工作著称于世。

鲁菲尼于1802年发明逐步逼近法解数字系数高次方程[①]。不久英国中学数学教师霍纳也于1819年发表论文"连续近似解任何次数数字方程的新方法"，在英国皇家学会宣读，并在当年学会会刊发表。[②]在论文中他把代数方程算术化，其计算程序与我国北宋以来正负开方法是一致的。他在论文中举了六个例子，前面五例为多项式方程。

例1　求48 228 544的立方根。(图5.1.2)

例2　解 $x^3-2x=5$。

例3　验证例2方程的正根到十位小数。

例4　解 $x^3-7x=-7$。

例5　解 $x^5+x^4+3x^3+4x^2-5x=321$。此例如果按照《秦氏书》正负开方法以及现在通行的数值解多项式方程方式应演算如下：

原题	1	0	0	−48 228 544
缩根	1 000 000	0	0	−48 228 544 |3 估根

① 见 Philosophical Transaction of the Royal Society of London, pp. 308～355, 1819

② 为此当年意大利科学协会为鲁菲尼颁发金质奖章. 说见李约瑟《中国科学技术史》中译本第三册，北京：科学出版社，1978：285.

the known arithmetical process for extracting the square root.

9. At *Cubic equations*, the aberration of the old practice of evolution commences, and our theorem places us at once on new ground. We have here

$$\Delta = az + bz^2 + z^3$$

and must proceed thus:

1	b	a	$\Delta(r + r + \ldots\ldots$
	r	$br = {}_0B$	$-Ar$
	$\overline{1}$	$\overline{A}$	$\overline{\Delta'}$
	$1r$	${}_0B + r^2 = {}_1B$	$-A'r'$
	r	$B'r$	$\overline{\Delta''}$
	$\overline{1''}$	$\overline{A'}$	&c.
	&c.	&c.	

This *ought to be* the arithmetical practice of the cube root, as an example will prove.

Ex. 1. *Extract the cube root of* 48228544.

Having distributed the number into tridigital periods as usual, we immediately perceive that the first figure of the root is $3 = R$. Consequently, the first subtrahend is $R^3 = 27$, the first derivee $3R^2 = 27$, the second $3R = 9$; the third $(= 1,)$ need not be written. Hence

		48228544(364
9.	27..	27
6	576	
96	3276	21228
12.	612..	19656
4	4336	1572544
1084	393136	1572544

In this example the reader will perceive that no supplementary operations are concealed. The work before him is complete, and may be verified mentally. I need not intimate

图 5.1.2 霍纳论文的一页

		3 000 000	3 000 000	27 000 000	
减根	1 000 000	3 000 000	9 000 000	−21 228 544	
		3 000 000	18 000 000		
	1 000 000	6 000 000			
		3 000 000			
	1 000 000	9 000 000	27 000 000	−21 228 544	
缩根	1 000	90 000	2 700 000	−21 228 544	⌊6 估根
		6 000	576 000	19 656 000	
减根	1 000	96 000	3 276 000	−1 572 544	
		6 000	612 000		
	1 000	102 000	3 888 000		
		6 000			
	1 000	108 000	3 888 000	−1 572 544	
缩根	1	1 080	388 800	−1 572 544	⌊4 估根
		4	4 336	1 572 544	
	1	1 084	393 136	0	

这就是说，例 1 方程的根是 364。对照图 5.1.2 可见霍纳的计算除了排列位置有异外，与秦氏一致。这种算法即使从秦九韶起算，中国算法早出五百多年。由于各种原因外国人称之为霍纳法[①]，实不公道。我们查 1801～1830 这三十年间英国皇家学会会刊所登数学论文，共 41 篇，其中有新见的为 3 篇，平均每 10 年一篇，A. Babbage，R. Woodhouse，J. Ivory 等人的工作有较高水平。但真正接受历史考验而脍炙人口之作，只能推霍纳数值解方程一文[②]。于此更见贾宪秦九韶成果的重要历史价值。

二　一次同余论

在此将主要以《秦九章》与德国高斯(C. F. Gauss，1777～1855 年)的有关工作作比较。两位数学大师在时间、空间上虽相距

① H. B. Fine，College Algebra. 李士奇等汉译本求益书社，1939：453～458

② 李文林. 剑桥数学学派. 西安：中国科学技术史第二届代表会议，1983

如此遥远，但在一次同余论方面的研究成果却非常一致。在西方经过欧拉(L. Euler，1707～1783年)、拉格朗日(J. L. Lagrange，1736～1813年)、高斯三代人的勤奋研究，才完成一次同余理论。当时居学术界中心地位的圣彼得堡科学院和柏林科学院竞相发表有关论文。高斯在其名著《算术探讨》[1]（Disquisitiones Arithmeticae)中列专章(第1章、第2章)阐述。其实，他们相应的成果在五百多年前《秦九章》早已灿然俱备。[2]

经过对照可知高斯在《探讨》中所提出的解同余式(组)七个法则的主要情节，秦九韶在《数书九章》早有系统论述，并且在同书十道算题解法运算中已熟练运用这些理论。由于东西方数学历史背景不同，导出结果所取途径和工具有所不同，但殊途同归，同为数学文化作出奉献。由于各种原因，过去东方学术不能及时传布于西方。当19世纪末海运初通，西人发现中国科学成就不能等闲视之。但是由于文字隔阂及大衍术本身艰深，当时西人所得信息一鳞半爪，极不全面。20世纪60年代以来东西方两代人的悉心研究对秦氏术才有正确理解。另一方面高斯《探讨》拉丁文原作的英译本也已在1966年出版[3]。客观条件已允许我们比较两大师的丰硕成果，下面试作述评。

其一，在解一次同余式(2)时，东西方使用同一工具，只是名称不同而已。中国称为更相减损术，首见《九章算术》方田章第6题。此术原用来求两数的最大公因数以约简分数。秦九韶古为今用，使古术又增新意。欧洲则称为辗转相除，首见《原本》卷7命题2，也称欧几里得算法。高斯在《探讨》Ⅱ，27说："当a，b为

---

① 以下简称《探讨》。

② 见副卷第一卷第六编第三章

③ 美国耶鲁大学出版社1966年出版A. Arthur和S. J. Clarke英文译本。前苏联也有俄文译本。

正，用求 a，b 最大公因数算法”以求出商数序列。他又介绍他的前辈欧拉和拉格朗日的成果：法则 3 和法则 4 的解题过程。可见同题解法中西学者不约而同，但同中也有异：

①秦氏大衍求一术明确规定同余式(2)中，$a<b$。如遇 $a>b$，则从 a 减去 b 的整数倍，直至 a 减到 a_1，使 $0<a_1<b<a$，$a_1\equiv a \pmod b$，然后解 $a_1x\equiv 1 \pmod b$，显然与(2)同解，而法则 4(拉格朗日法则)却以 $a>b$ 为前提，并未指出 $a<b$ 的解题方案。

②我们知道

$$\frac{b}{a}=q_1+\frac{1}{q_2+}\frac{1}{q_3+}\cdots+\frac{1}{q_n+}\frac{1}{q_{n+1}+}\frac{1}{r_n},$$

求一术规定 $r_{n+1}=1$，如果 $n+1$ 是奇数，(2)的解是 $x_0=j_{n+1}$。如果 $n+1$ 是偶数，就再做一次更相减损，使 $r_{n+2}=1$，而所求解 $x_0=j_{n+2}$。而法则 4 只说：“舍去$\frac{1}{r_n}$后，重新化为普通分数$\frac{x_0}{y_0}$，x_0，y_0 将是同余式 $ax\equiv\pm 1 \pmod b$ 的解。”事实上这儿有两个同余式，拉氏没有讲清有关键意义的 n 是奇还是偶，所得解应隶属哪一同余式。

③高斯所介绍的法则 3(欧拉法则)也以 $a>b$ 为前提，n 也限于偶数，其缺憾当如法则 4。法则 3 所引记号如作代换：$\alpha(1)$，$\beta(q_2)$，$\gamma(q_3)$，$\delta(q_4)\cdots$；$A(j_1)$，$B(j_2)$，$C(j_3)$，$D(j_4)$，…，那么 $A=\alpha$，$B=\beta A+1$，$C=\gamma B+A$，…，这就是 $j_1=1$，$j_2=q_2j_1+1$，$j_3=q_3j_2+j_1$，…。可见欧氏所说就是秦氏大衍求一术的重复。当 n 是偶数时，求一术程序用欧拉记号表示就是 $x_0=j_{n+1}=[q_2, q_3, \cdots, q_n, q_{n+1}]$。而欧拉法则 $x_0=[q_{n+1}, q_n, \cdots, q_3, q_2]$。二者商数序列次序适相反。为此高斯在《探讨》Ⅱ，27 自注中说：“二者次序可以颠倒，即 $[q_{n+1}, q_n, \cdots, q_3, q_2]=[q_2, q_3, \cdots, q_n, q_{n+1}]$，”还说“我们略去证明，因为其理由是浅显的。”

其二，在解同余式(4)时，《探讨》法则 6 与秦氏大衍术等价：

把含有 n 个同余式的同余式组化为解 n 个彼此独立的同余式(组)。但同中也有异：秦氏大衍术是改解 n 个形如 $M_iF_i\equiv1(\text{mod } m_i)$同余式，把问题归结为解同余式(2)，而《探讨》则改解 n 个形如 $y_i\equiv1(\text{mod } M_i)\equiv0(\text{mod } M_i)$简化了的同余式组，把问题归结为法则 5。二者间有以下关系　$M_iF_i=y_i$。高斯所拟 n 个彼此独立的简化同余式组显然又与孙子定理等价。

其三，在解同余式组(3)时，我国古代虽无素数概念，但秦氏定母术对(3)中模作可能的三种情况处理，无非是反复运算关系式：$ab=(a,b)\cdot\{a,b\}$。《探讨》法则 7 用素因数分解手段从舍弃多余的同余式着手，而其最终目的也是为了满足定母条件，那么(3)，(4)同解，两种方法也是异途同归，互有短长，不能贸然就说谁是谁非。即以《探讨》Ⅱ，34 所举例来说，高斯处理过程是

$$\begin{cases}x\equiv17(\text{mod } 504),\\x\equiv-4(\text{mod } 35),\\x\equiv33(\text{mod } 16),\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\equiv17(\text{mod } 9),\\x\equiv17(\text{mod } 8),\\x\equiv17(\text{mod } 7),\\x\equiv-4(\text{mod } 5),\\x\equiv-4(\text{mod } 7),\\x\equiv33(\text{mod } 16),\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\equiv17(\text{mod } 9),\\x\equiv-4(\text{mod } 5),\\x\equiv-4(\text{mod } 7),\\x\equiv33(\text{mod } 16)。\end{cases}$$

如果用秦九韶求定母算法处理，模数迳化为定母 9，35，16。

$$\begin{cases}x\equiv17(\text{mod } 504),\\x\equiv-4(\text{mod } 35),\\x\equiv16(\text{mod } 16),\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\equiv17(\text{mod } 9),\\x\equiv-4(\text{mod } 35),\\x\equiv16(\text{mod } 16)。\end{cases}$$

遇到较大模数时，分解素因数有其难处，不如迳用秦氏算法经更相减损，按部就班解决，轻便得多。

其四，同余式论是天文学制定历法的需要：《数书九章》治历演纪题以 21 页篇幅认真计算开禧历上元积年。令人感到有兴趣的是，高斯在《探讨》Ⅱ，36 中为同余式的起源也解释说：“这种问

题是从年序学产生的，在确定儒略历年序时，小纪 A，黄金数 B，太阳周期 C 为已知：$A=15$，$B=19$，$C=28$，某年对应于各周期起点的余数分别为 a，b，c，那么这一年年序是 $6\,916a+4\,200b+4\,845c$，关于模 $15\times19\times28=7\,980$ 的最小数。”显然这里所说 6 916，4 200，4 845分别是三个彼此独立的同余式

$$y_1\equiv1(\mathrm{mod}\ 15)\equiv0(\mathrm{mod}\ 19\times28),$$
$$y_2\equiv1(\mathrm{mod}\ 19)\equiv0(\mathrm{mod}\ 15\times28),$$
$$y_3\equiv1(\mathrm{mod}\ 28)\equiv0(\mathrm{mod}\ 15\times19)$$

的解。

其五，高斯是19世纪最杰出的数学家。发表《探讨》时正值年富力强，风华正茂。《探讨》是数论史上的丰碑，在同余理论上建立殊勋：在理论上填补了《孙子算经》卷下第26题的第④项缺陷，给出必须的各种定义、定理和法则，作出孙子定理的证明，大衍求一术证明，同余式及同余式组有解的条件，阐明关于舍弃多余同余式不影响解的性质等等细节。这也正是《秦九章》不足的地方。

第二章　国内学者对《数书九章》的研究及其成绩

第一节　清　　代

本节着重阐述18，19两世纪清代学者对《数书九章》的研究工作。

一　四库馆臣

四库馆臣在把《秦九章》编入四库全书时，并不生搬硬套，而是加注自己的见解，有所增删。但未能形成系统理论。其主要情节已在第四编为数众多的范题分析述评中引述，不再赘述。四库馆臣为一学者群体。他们对传统数学有深入理解。他们所注见解按语，都是有感而发，读秦书后的心得体会，与一般考据学家单纯在文字上校勘大不一样，而是能够接受现代数学要求检验，而无可指责。他们的工作计算认真，用汉文数字立式，蝇头小楷，书写端正，制图准确。在当时对《秦氏书》已生疏的我国学术界有如此成绩，实在难能可贵。

四库馆臣知名者：总纂官纪昀、陆锡熊、孙士毅，总校官陆费墀、吴裕德、吴敬舆，校官胡又兰，倪廷梅，王熙年，古之雄等。从他们为数众多，高质量的按语中可以说明在当时八股文取士大气候中，仍有真知灼见的学者，保好火种，使绝学不绝。

二　焦　　循

焦循(1763～1820年)，江苏江都(扬州)人，1801年中举。著

《天元一释》，阐明他对李冶、秦九韶两种天元术的研究及其成果。全书分上、下二卷。

卷上主要论多项式方程的建立和数值解，以李冶《测圆海镜》、《益古演段》有关论述为素材，讨论建立多项式方程的“立天元一”。焦循发现秦氏在多项式方程方面所做工作并不在李冶之下，这与我们在第四编第三章有关述评中的见解全相一致。焦氏经过充分比较后，在卷上结论说：“秦道古《数书九章》述开方法，至精极简，足补李氏所未备，其式如《益古演段》之列位：置商于实上，以商生隅，上达于实…秦氏谓乘为生，生而上达为入，入而减为消。其法李栾城所未详。此实相为表里，精简贯通，一原于古《九章》。”

另一方面焦循指出：“宋末秦道古《数书九章》亦有立天元一法，而术与李异。”

卷下有 6 页篇幅论秦氏大衍术。

焦循率先指出：“按大衍之术即《孙子算经》三三、五五、七七之术也。此术《九章》所无，而见于《孙子》。今则妇人孺子或以为戏。《孙子》虽详其术，而秦氏则阐其微而畅发之。”他又点明：“其三三置七十，即大衍求一术也。”接着他说：“三、五、七，元母也。约之得一，为无等，不用连环求等法，则元母即定母也。”焦循又引《孙子》又术：“凡三三数之剩一，则置七十，五五数之剩一则置二十一，七七数之剩一则置十五，一百六以上，以一百五减之，即得。”他用《秦九章》大衍术理论解孙子题，并把运算过程列出明细表[①]

① 我们改用阿拉伯数字记，括弧内为相应的秦氏用语。

元数(即为定母)	3	5	7	衍母
立天元一	1	1	1	105
衍数	35	21	15	
奇数	2	1	1	
乘率	2	1	1	
乘数(用数)	70	21	15	
分数(余数)	2	3	2	
用数(各总)	140	63	30	

最后总结说："一百四十、六十三、三十用数也，二百三十三，总数也，二百一十，衍母约两次也。"这是孙子题发表后1400年间最早一次知其所以然的正确论证，是非常可贵的论证。

三　张　敦　仁

张敦仁(1754～1834年)山西阳城人，1778年进士，与李锐是谈算好友，他的大衍术工作著录在《求一算术》(1803年)三卷之中。他是继四库馆臣之后研究《秦九章》不定分析而且取得成果的又一位学者。在序文述研究经过，他追叙："求一之术出于《孙子算经》物不知数之问。宋史艺文志有龙受益《求一算术》，化零歌当即此术，而其书不传"，所以他创作同名专著，在署名时说："阳城张敦仁重述。"在序中言简意赅地点出求一术要旨是："其法以各数及不满各数去之余一之数，而后诸数可求，故曰求一也。"当他着手研究时参考文献，"求一术仅见于宋秦九韶道古《数学九章》中，学者罕见其书，知之者鲜。"幸而"余宦游江右，上交学使李云门(潢)先生，借录所藏秦李诸书，乃得窥寻立天元一求一之妙。及来吴门，有元和诸生李尚之锐，笃好斯学，因共日夕讨论，研究秘奥，官曹多暇，辄依秦氏所说，略加修饰，推而衍之，得书……名曰求一算术。"我们记其特色如后。

卷上为后二卷作准备的基础材料，都说理深入浅出，极便初学，共七节。

求等(定理 1)[1]

约分，原著说："既有等数，则两数中有重叠，故须约之。"原著对于两数有公约数时，应该以公约数约哪一数的最终要求说："按约分之法，须令既约之后，更无可约。……若约此得数与彼数有等，则反约此数。"再约(定理 6.2)原著说："既约之后，仍有等数，即须再约。"再约之法是："两数以等数约一数，乘一数"又说："既约不可再约，今约一乘一，犹之未约也。"文后还反复举例，以明其理。

连环相约(定理 7)　秦氏书对 n 个模数求定母之法，只示原则。如"约奇、弗约偶"，"约彼、复乘此"。无程序性。张氏据秦氏大衍术九题草文，摸索出一整套求定母程序，使密不有漏。其所拟连环相约规则程序已与定理 7 相同，原著说：

"置各问数，识其位(如甲、乙、丙、丁之类)。自上而下列之。先以上位与下位诸数各求等。依约分术：约一存一为第一变。(若上位当约，即以既约之数与下诸位求等，后皆仿此）又以次位与下诸位各求等，约之，为第二变。每自上而下以一位与下诸位各求等，约之，为一变（凡问数有三位，则有二变。有四位，则有三变。每多一位，则多一变）讫，各为泛母。复置泛母，如前自上而下求等，依再约术、约一、乘一为一变、讫、各为定母。若各定母俱无等，即以各问数为定母。若泛母俱无等，即以泛母为定母。(按秦氏原法…其复数条有求总等一法。今验求总等于算未密。如程行相及问、衍母当三千。缘求总等误，作六千。故此术定以约分求泛母，再约求定母，较原法省约而无弊。"

张氏所论从模数求定母法，大体上说，分两步走：

---

[1] 括弧中的定理与第四编第四章第一节大衍术，一、数学原理相对应。

第一步，从模数按约分术(约一、存一)求出泛母。

第二步，从泛母按再约术(约一、乘一)求出定母。

文后举三例，其一为求 24，30，54 的定母。用我们惯用的记号，原著相当于说：

24	24	24	24
30	5	5	5
54		9	9
一变		二变	

第一步

24，5，9为泛母

24	24	8	8
5	5	5	5
9		27	27
一变		二变	

第二步

8，5，27为定母

在连环相约这一节中没有出现“约奇弗约偶”这句话，但奇偶的解释仍纠缠在单双意义之中[①]。

大衍求一(定理 10)　秦氏大衍求一术用词生僻，使后世读者很难理解，望而生畏。张敦仁以其通透心得、深入浅出阐明此术真谛。

他首先点明大衍求一是：“以乘率乘少数，满多数去之，必余一。犹大衍之奇一[②]，故曰大衍求一。”原著所建立的算法程序与我们在第四编第四章第一节第四段所作今释完全一致。他说：“列少数(a)于上，多数(b)于下。以上除下所得为第一数(q_1)。有余(r_1)复以下除上，所得为第二数(q_2)。如是上下相除，所得以次命之(如第三数(q_3)第四数(q_4)之类)上位余一。($r_n=1$)。(如上位除

① 事实上即使把奇、偶理解为彼此，也没有必要去规定“约此不约彼”或“约彼不约此”，这在关孝和《括要算法》卷 2 已有正确认识。张氏此举：把连环相约术分两步走，已为解除这一不必要的限制，创造条件。

② 这里的“大衍之奇”是指周易蓍草揲法中的具体操作。

尽，即减得数一，为余一。如上位五、下位一，常法以一除五，得五，除尽。此术以一除五，则得四，余一。与常法不同）即止不除。”[①] 得到一系列 q_1，q_2，…，q_n 后就在“左行立天元一($j_1=1$)”。按题相当于 $j_i=q_ij_{i-1}+j_{i-2}$直到 $i=n$，求出乘率 j_n 为止。

大衍总数术(定理 17.1)　首先以孙子物不知数题按照总数术按部就班解出，是《孙子算经》成书1 400年来所作详尽无余的答卷。他还另举二例，模都两两互素。

卷中举四例，模都不两两互素，都用大衍术解题。在连环求等时，当模有公约数时，他并不按照秦氏大衍术复数格处理。其中第三例为：

“今有和丰永盈四字号廒[②]，存米相等，每廒各设臼春米[③]。和字廒设臼六只，每臼容米五斗七升七合。丰字号设臼七只，每臼容米五斗五升四合。永字号设臼八只，每臼容米四斗九升六合。盈字号设臼九只，每臼容米四斗四升八合。各廒每臼用春夫一名，春夫每名每日春米二臼，四廒同日开春，各于每日清晨在廒取一日应春米。今盘验余米：和米号余十六石九斗一升二合，丰字号余米六石九斗二升八合，永字号余四石七斗六升八合，盈字号余三石二斗三升二合。问：各廒共米及春过米数、臼数、日数各几何？”

(答数：米 100 石)

我们如设各厂存米 x 石，据题意，是要解同余式组：

---

① 秦氏大衍求一术只说：“右上末后奇一而止”。张氏则说：“[右上] 除尽”，即 $r_n=0$，n 为单数时，则因 $r_{n-1}=1$，$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}=r_n=0$，可改使$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}=(r_{n-2}-1)+1$，则 $r_{n+1}=1$，而 $r_{n+2}=0$ 满足秦氏条件。

② 廒(ao)，义：米厂。

③ 春(cong)米：去除糙米糠皮的操作。

$$\begin{cases} x \equiv 16.912 (\mathrm{mod}\ 0.577 \times 6 \times 2), \\ x \equiv 6.928 (\mathrm{mod}\ 0.554 \times 7 \times 2), \\ x \equiv 4.768 (\mathrm{mod}\ 0.496 \times 8 \times 2), \\ x \equiv 3.232 (\mathrm{mod}\ 0.448 \times 9 \times 2)。 \end{cases}$$

原著按秦氏书收数格，化小数为整数。此外为简化运算有两方面措施：

其一，略去模数中臼数、人数相乘积，改解

$$\begin{cases} x \equiv 16\ 912 (\mathrm{mod}\ 577), \\ x \equiv 6\ 928 (\mathrm{mod}\ 554), \\ x \equiv 4\ 768 (\mathrm{mod}\ 496), \\ x \equiv 3\ 232 (\mathrm{mod}\ 448)。(x\ 以合为单位) \end{cases}$$

并用连环求等算法计算四个模的定母依次是 577，277，31，448。按照大衍总数术解得 $x=100\ 000$ 合 $=100$ 石

相应求出和、丰、永、盈四米厂依次已用去米(即已舂米)83.083，93.072，95.232，96.768 石。分别除以各米厂臼容米数，得各舂臼数依次为 144，168，192，216。最后除以各米厂每日舂米臼数 12，14，16，18，都得相同工作日数 12。

其二，当运用大衍求一术对四个定母求出相应乘率(F_i)和，217；丰，58；永，6；盈，99。各应分别乘其相应衍数(M_i)、余数 r_i 以得各总 $M_iF_ir_i$，最后以计算 $x=\sum_{i=1}^{4} M_iF_ir_i (\mathrm{mod}\ M)$。张氏认为四个 r_i 有效数字个数多，改以其关于 μ_i 的同余数 r_i' 入算，即

和：$r'_1=177 \equiv r_1=16\ 912 (\mathrm{mod}\ 577)$，

丰：$r'_2=280 \equiv r_2=6\ 928 (\mathrm{mod}\ 554)$，

永：$r'_3=304 \equiv r_3=4\ 768 (\mathrm{mod}\ 496)$，

盈：$r'_4=96 \equiv r_4=3\ 232 (\mathrm{mod}\ 448)$。

这就减少了计算工作量。

第四例为

“今有后汉四分术：木日率四千七百二十五，火日率一千八百七十六，土日率九千四百一十五，金日率四千六百六十一，水日率一千八百八十九，熹平三年甲寅，木日率余五，火日率余七十五，土日率余四十，金日率余一百三十三，水日率余一十。问：上元以来，尽熹平三年甲寅，积岁几何？”

我们如设熹平三年（公元174年）上距五星会合上元为 x 年，据题意当解同余式组 $x\equiv 5(\mathrm{mod}\ 4\,725)\equiv 75(\mathrm{mod}\ 1\,876)\equiv 40(\mathrm{mod}\ 9\,415)\equiv 133(\mathrm{mod}\ 4\,661)\equiv 10(\mathrm{mod}\ 1\,889)$。[①]原著对五个不两两互素模，用连环相约，二变即得到定母，其演算过程为：

	一变			二变	
木	4 725	675	675	675	675
火	1 876	1 876	1 876	1 876	1 876
土	9 415		1 883	269	269
金	4 661		4 661	4 661	4 661
水	1 889		1 889	1 889	1 889

张氏求得定母675，1 816，269，4 661，1 889后，就按大衍术程序计算衍数衍母。求相应的奇数，得626，527，175，2 566，507。与相应衍数，以大衍求一术求出乘率：551，655，186，1 237，1 658。于是从五个用数求各总，“并总，满衍母去之”得出答数积岁（上元积年）为 $x=9\,445$。

本例化模数为定母时，张氏以位置关系考虑“奇”和“偶”。答数虽只四位数，其运算过程遇到许多大数。其中衍数、衍母达十五位，用数十六位，而总数则为十八位。都以算筹为工具，其工作毅力，十分惊人。此外本例以五星会合题材作为同余式组内

① 此同余式满足有解的必要条件是模数中1 889为素数，而(4 725,9 415)＝5 140－5＝35　(1 876,9 415)＝7 175－40＝35，足见命题者的审慎。

容，如与中世纪印度的类似材料作一对比，是很有兴趣的，婆罗摩笈多《婆罗摩修正体系》(628 年)有七星会合题[①]。张氏所引我国公元 2 世纪时天文活动，值得我们进一步探索。

卷下举五例，模的情况益加复杂，都用演纪术解题。在卷下之首，张氏按语说："麟德术以后，元授时历以前皆用此术推求上元积算"，其中举麟德、大衍、崇天、纪元四术及授时附演一法为例。其解法理论据《秦九章》卷 3 第 3 题（治历演纪）而有变通。其中麟德术的解法我们已在第四编第四章第四节，作为第 2 例中阐述。

张敦仁《求一算术》的主要成绩：

其一　书中所拟相约（存一、约一），再约（存一、乘一），连环相约，使大衍求一术各种程序，井井有条，使读者习秦氏书有规矩可循，钱宝琮评为"以浅显之笔写艰深之术，使尽人能解，其复古的功臣欤？"[②] 为后来时曰醇等学者进一步阐述奠定了良好基础。

其二　在计算方法上对于和丰永盈题简化运算，第二种措施，在求总等时：

$$x=\sum_{i=1}^{n}F_iM_ir_i(\mathrm{mod}\ M),$$

改 $r'_i=r_i(\mathrm{mod}\ m_i)$为$r_i$[③]，可以节省许多计算工作量。在理论上也是正确的。我们已在第四编第四章第一节列为定理 17.3。

其三　已认识到大衍术与演纪术是两种不同的数学方法，而且在卷下全卷接连对四种历法的上元积年做了周到的复原工作。还作出令人信服的结论："唐麟德术以后，元授时术以前皆用此术

① 见本编第一章第一节。

② 钱宝琮，1921

③ 张氏不取 μ_i 为模而取 m_i 为模的同余数 r'_i，这样做，可以使计算更为简便。

推求上元积算。”

张氏书也有缺憾。上文已提到他对奇偶纠缠于单双，未能解脱。此外，对于和丰永盈题简化运算的第一种措施只能说，对本题适用，偶合而已；对一般说是谬误的。这是由于

$x \equiv 16\,912 (\bmod\ 577\times6\times2) \equiv 6\,928 (\bmod\ 554\times7\times2) \equiv 4\,768 (\bmod\ 496\times8\times2) \equiv 3\,232 (\bmod\ 448\times9\times2)$。

等价于

$x \equiv 16\,912 (\bmod\ 577) \equiv 6\,928 (\bmod\ 554) \equiv 4\,768 (\bmod\ 496) \equiv 3\,232 (\bmod\ 448\times9)$。

不等价于

$x \equiv 16\,912 (\bmod\ 577) \equiv 6\,928 (\bmod\ 554) \equiv 4\,768 (\bmod\ 496) \equiv 3\,232 (\bmod\ 448)$。

注意到 $7|448$；而 448，577，554，496 都不是 3 的倍数。

四　骆　腾　凤

骆腾凤(1770～1841)自称山阳人[①]。1801 年中举人。湖北锺祥籍李潢的学生。写成数学专著《艺游录》(1815 年)二卷，论数学 22 节，与《秦九章》有关且有成绩者为

其一，他最先指出大衍求一术算法与《九章算术·方田》更相减损术的关系。在卷 1 说：“求一法与求等法同，但求等者必除之至尽。求一者则留一不除为奇。”

其二，相当于悟出大衍求一术所解同余式

$$ax \equiv 1 (\bmod\ b)$$

等价于求不定方程　$ax-by=1$　的正整数解。

在卷 1 创“大衍奇定相求法”，确定算法程序，以解不定方程。他举例，相当于说要解　$7x-30y=1$，用古汉语阐明其解法。用现

---

① 山阳，旧县名，1914 年改名为淮安。

代方法解此不定方程，按照定理 2、定理 10[①] 可计算为

$q_1=0$	7	30	$q_2=4$
	6	28	
$q_3=3$	1	2	

i	q_i	k_i	j_i	与系数 7，30 的关系
0		1	0	$7(0)-30(1)=-30$
1	0	0	1	$7(1)-30(0)=7$
2	4	1	4	$7(4)-30(1)=-2$
3	3	3	13	$7(13)-30(3)=1$

已得方程的一组解是(13,3)。

骆氏用汉字数字列出横式：

i	奇元(k_i)	定元(j_i)	奇数，定数(a,b)
(0)	1	0	7
(1)	0	1	−30

这就是："先列一奇元于左，空定元于中，奇数于右，在上位。次则空奇元于左，一定元于中，负定数于右。"然后按如下程序运算

	(0)	1	0	7
×				$\left[\frac{30}{7}\right]=4$
	(2)	4	0	28
+	(1)	0	1	−30
	(3)	4	1	−2
×				$\left[\frac{7}{2}\right]=3$
	(4)	12	3	−6
+	(0)	1	0	7
	(5)	13	3	1

运算至此，他说："是为十三奇比三定多一，即九十一 (13×7)比九十(3×30)多一也。"其数学原理比照我们所作现代解释是显然的。

① 第四编第四章第一节，大衍术，一. 数学原理。

以下再举一例，解 $29x\equiv 1 \pmod{67}$，即解不定方程

$$29x-67y=1。$$

用更相减损术计算

0	29	67	$2=\left[\frac{67}{27}\right]$
$\left[\frac{29}{9}\right]=3$	$\frac{27}{2}$	$\frac{58}{9}$	$4=\left[\frac{9}{2}\right]$
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{8}{1}$	

i	q_i	k_i	j_i	与系数 29，67 的关系	
0		1	0	$29(j_i)-76(k_i)=$	-67
1	0	0	1		29
2	2	1	2		-2
3	3	3	7		2
4	4	13	30		-1
5	1	16	37		1

按照骆腾风的算法应是

		奇元	定元	奇数，定数
	(0)	1	0	29
×				$\left[\frac{67}{29}\right]=2$
	(2)	2	0	58
+	(1)	0	1	-67
	(3)	2	1	-9
×				$\left[\frac{29}{9}\right]=3$
	(4)	6	3	-27
+	(0)	1	0	29
	(5)	7	3	2
×				$\left[\frac{9}{2}\right]=4$
	(6)	28	12	8
+	(3)	2	1	-9
	(7)	30	13	-1
×				1
	(8)	30	13	-1
+	(5)	7	3	2
	(9)	37	16	1

则所求 $x=37$，$y=16$ 是 $29x-67y=1$ 的一组解。

骆腾风大衍奇定求法程序可总结为

步　骤	运　算
一	按法列出(0)行，(1)行
二	(0)行乘$\left[\frac{b}{a}\right]=q_2$，得(2)行
三	(2)行加(1)行，得(3)行
四	(3)行乘$\left[\frac{a}{r_1}\right]=q_3$，得(4)行
五	(4)行加(0)行，得(5)行
六	(5)行乘$\left[\frac{r_1}{r_2}\right]=q_4$，得(6)行
七	(6)行加(3)行，得(7)行
八	(7)行乘$\left[\frac{r_2}{r_3}\right]=q_5$，得(8)行
九	(8)行加(5)行，得(9)行
⋮	…………
十	当$r_n=1$(n为单数)则此行乘q_n得所求行。

骆氏方法与《秦九章》大衍求一术相比较，别具一格。除了得到x值外，还同时能得到相应的y值。从他的运算程序可见对分数的渐近分数表达式及其性质(定理2,定理10)的认识是深刻的。

其三，在卷二“衰分补遗”又讨论不定方程组与同余式的关系，用大衍求一术解张丘建百钱百鸡题。

五　时　曰　醇

时曰醇(1807～1880)江苏嘉定人。家学渊源，父时铭1805年中进士，有数学专著传世。时曰醇受家庭影响“少时入监，专治九数”。1861年与丁取忠在武昌湖北巡抚胡林翼处同为幕宾，为谈算好友。后归江苏故里研究不定分析，写成两专著《求一术指》和

《百鸡术衍》，都得到丁取忠帮助，木刻于1873年问世。晚年他受聘到上海广方言馆担任教学工作。当时虽已“年老聋瞽，仍为诸生口讲指画，剖毫析芒”。

在前人基础上他对《秦九章》大衍术有所创新。

《求一术指》不分卷。丁取忠作序。自写例言11则。全书以他的新见解讨论孙子物不知数题、《秦九章》大衍类5题、张敦仁《求一算术》2题。其突出的创见有二：

其一，对《秦九章》大衍术解题全过程在例言中总结为“求一歌括”①，他说：“宋龙受益有求一算术化零歌。张氏[敦仁]谓即此术。其书不传，今拟之。”这一总结为解一次同余组题定出算法程序，与今高等学校数论教科书所说一致。②

其二，对《秦九章》大衍术中化问数(模)为定母，即连环求等的正确理解。在他自写例言约分一则中说：

“约分，任从问数中某位约起皆可。兹概从第一位起。约遍，又递用次位为主，与前后诸位遍约。③……总之，两数相约不过一彼一此。初求得等，不妨任意约之。既约彼，仍有等，则反约此而乘彼。仍有等，再反约此而乘彼，必得之矣。”时氏认为《秦九章》所说“约奇弗约偶”，“约偶弗约奇”并非是单双关系而是“彼”，“此”位置关系。第一次应“约一、存一”，以后如彼此仍存在公约数，则“约一、乘一”，目的是使二者互素。而且他还认识到不存在约谁、存谁或约谁、乘谁的问题，而是“不妨任意约之”，这与东瀛关孝和在《括要算法》中的观点正不约而同，与我们的分析（定理7.1）也不谋而合。至于从哪一问数起算，他也作出肯定的回答：“任从问数中某位起皆可。兹概从第一位起”。对

① 此歌括参见第四编第四章第一节之末。

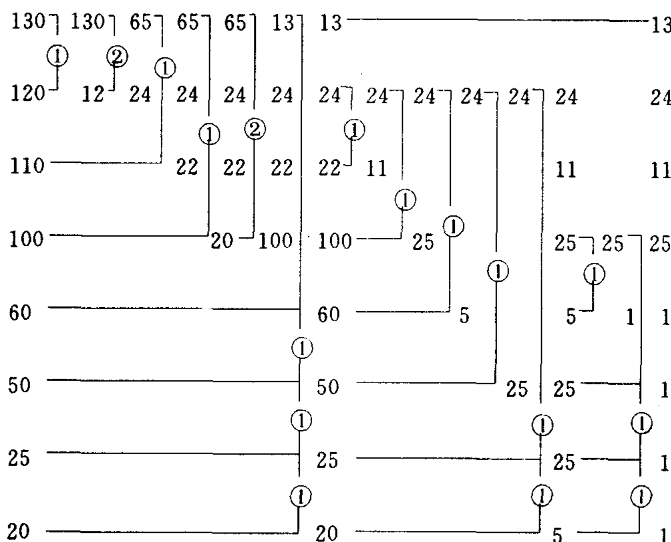
② 张德馨. 整数论，第一卷. 北京：科学出版社，1958：136

③ 在删节号中，时氏历数前人把奇偶在单双意义中的谬失。共约三百字。

于以后的算法，他也概括得很是全面："约遍，又递用次位为主[①]，与前后诸位遍约。"在他对《秦九章》大衍类题和《求一算术》题中就以此见解，处理求问数的定母。他还认识到，并不一定要从第一位起。我们录其解法如后。

以秦书大衍术(积尺寻源)题八个问数说，他用两种方式求定母。第一式从第一位算起，而第二式从第五位算起。在两两求等互约时，时氏约一存一、约一乘一并举，必至互素为止。张敦仁程序分两步走，第一步约一存一，第二步则约一乘一。时氏则毕其功于一役。两种方式中以①表示约一存一，以②表示约一乘一。原著用汉字说明，我们改用本书习惯记号。

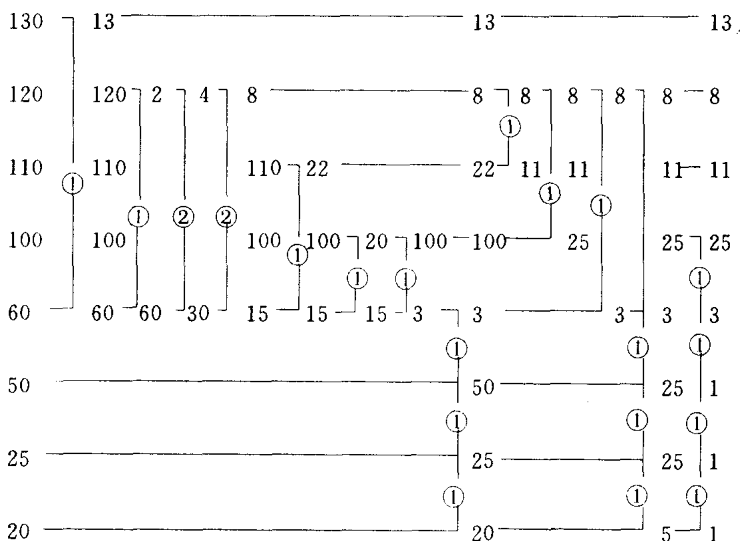
第一式



① 这里所说"为主"，就是说不约此位，约其他诸位（约他、存主），不得已时（其间仍有公约数）就反约（约一、乘一）。

已得八个问数的定母为 13，24，11，25。时曰醇运算至此，总结说："一十三、二十四、一十一、二十五互相求等，皆得一，不约，各为定母。"

第二式



一变（以60为主）　　二变（以8为主）　三变

已得八个问数的定母为 13，8，11，25，3。显然两种方法对于用大衍总数术所得结果是一致的。

《百鸡术衍》分上下两卷。以"旧学商量加邃密，新知培养转深沉"十四字为序，每字设两题，共 28 个题。每题先用"方程"术解，次用求一术解。本书是时氏推广张丘建百钱百鸡题之作，也是《秦九章》大衍术的应用。我们知道百鸡题是三元一次不定方程组。时氏先把它化为二元不定方程，然后用大衍求一术解其等价的一次同余式。我们举其中"旧字上"和"沉字下"两题及其

解，以见一斑。

旧字上题："今有鸡翁一、值钱五，鸡母一、值钱三，鸡雏三、值钱一，凡百钱、买鸡百只。问：鸡翁、母、雏各几何?"

其求一术解说："先以雏分母三，通其钱一百，得三百，为通分共鸡。母、翁较，翁雏较相求：雏分母三、通翁值五，得一十五。以共鸡一百乘，得一千五百。为通分共鸡减，余一千二百。以较之等二约之，得六百为共较实。母翁较三叠减之适尽。"

如设鸡翁、鸡母、鸡雏各有 x，y，z 只，那么据题意，可列出方程组

$$\begin{cases} x+y+z=100, \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100。\end{cases}$$

上文解法相当于说

$$3x+3y+3z=300,$$
$$15x+9y+z=300,$$

$$\begin{array}{r} 15x+15y+15z=1\,500 \\ -(15x+9y+z)=-300 \\ \hline 6y+14z=1\,200 \end{array}$$

$$3y+7z=600,$$

原著相当于解此不定方程等价的同余式

$$3y\equiv 600\equiv 5 \pmod 7)。 \qquad (*)$$

从同余式 $3y\equiv 1\pmod 7$ 的解(乘率为 5)得(*)的最小正整数解为 4(鸡翁数)，回代不定方程得 z(鸡雏数)为 84，就易于得完整的一组解 12，4，84。又引用张丘建之说："鸡翁每增四、鸡母每减七，鸡雏每益三"(只数、所值数)不变之说，获得其余两组解。

时氏推广百钱百鸡题，其中

沉字下题："设物大八值二十一，中六十二值六十三，小五十五值二十八。共物一千四百六十三，共值一千四百六十三。问：物大、中、小各几何?"后列三组答数。

原著先用“方程”术解，然后用求一术解，相当于说设大、中、小物数各为 x，y，z，据题意列出方程

$$\begin{cases} x+y+z=1\ 463, \\ \dfrac{21}{8}x+\dfrac{63}{62}y+\dfrac{28}{55}z=1\ 463。\end{cases}$$

求｛8，62，55｝=13 640[①]。原方程变换后，消去 x，得

$$165y+217z=243\ 815,$$

解同余式 $217z\equiv 243\ 815 \pmod{165}$ 原著认为等价于

$$52z\equiv 110 \pmod{165}。\qquad (**)$$

求 $52z\equiv 1 \pmod{165}$ 得乘率 73，知（＊＊）有解

$$z=110。（小物数）$$

回代不定方程得 $y=1\ 333$（中物数），就易于得完整的一组解 20，1 333，110。原著还给出另外三组解：72，1 116，275；176，682，605；280，248，935。我们知道日本江户时代和算鼎盛，在不定分析方面，特别是解不定方程组尤为热闹。松永良弼（？～1744年）著《桃李蹊径术》，所命题与《百鸡术衍》结构一致[②]，可谓姐妹篇。但时曰醇有一般解法，质量允称胜于松永。

六　黄宗宪

黄宗宪（1805 约～1900 约）[③]湖南新化人。校订丁取忠主编的《白芙堂算学丛书》23 种。继时曰醇数学专著出版的次年，他的《求一术通解》（1874 年）出刊。三年后 1877 年至 1882 年他随郭嵩焘出使英国。可见《求一术通解》是创作。《求一术通解》全书分上下两卷，对秦氏大衍术的见解不同凡响，其突出者有三。

---

① 原著误刊为 1463。

② 参见副卷第一卷第六编第二章。

③ 许康，1987

其一，化两两不互素模为定母的新算法

据张敦仁、时曰醇的解释和改进，秦九韶连环求等算法已有明确程序可循，可以把 m_i 化为满足三条件的 μ_i。对于 m_i 相当大时，这种算法有其优点。黄宗宪《通解》又别立蹊径，对同一问题自创新法。当时数根(素数)概念已传来中国，康熙皇帝编《数理精蕴》书末附有 $1\sim10^5$ 自然数的素因数乘积表。他的新法就是分解已给模为素因数乘积，然后据三条件各自化为定母。这与高斯《算术探讨》卷 2 定理 32① 所说不谋而合。这种新算法他称为"析泛母(模)法"，在《通解》序中记其思想的来源："骆氏春池、张氏古愚各有专书。然求等约分头绪不一，初学茫然。近日时君清甫《求一术指》立法稍简，亦仅识其当然，而于所以然终缺如也。同治癸酉(1873)左君壬叟《衍通分捷法》一帙将分母分子析为各数根，任以多项通分，顷刻可得。……余因悟大衍术析各泛母以求定母，形迹显露，术理朗然。较之旧术，简而愈详。"他的析分母法是："析分母毕，乃遍视各同根(素因数)，取某行最多者用之。余行所有弃之不用。再视本行所有异根或少于他行，则弃之。抑或多于余行亦用之，或与他行最多者等，则此两行随意用之。以所用数根连乘之，即得本行定母。若某行各根皆少于他行者，则此行无定母。"容易验证此析泛母法符合 μ_i 是 m_i 定母的条件。(定理 7)。在《通释》一书中一再用此法析泛母为定母，以所举秦氏书大衍类积尺寻源题，对泛母(模)130，120，110，100，60，50，25，20 列表求定母(用△表示用之，即保留，我们改用阿拉伯数字记数。)时曰醇《求一术指》认为定母有两种方式，黄宗宪则以为可以有多种方式。

① 即本编第一章第五节法则 7。

泛　母		130	120	110	100	60	50	25	20
析母		2， 5， 13△	2，△ 2，△ 2，△ 3，△ 5	2， 5， 11△	2， 2， 5，△ 5△	2， 2， 3， 5	2， 5， 5	5， 5	2， 2， 5
方式	1	13	24	11	25				
	2	13	8	11	25	3			
	3	13	24	11			25		
	4	13	24	11				25	
	5	13	8	11		3	25		
	6	13	8	11		3		25	

其二，对孙子定理或称中国剩余定理真实性的正确理解。

我们已在第四编第四章第一节，一、数学原理中作为定理 14 记述孙子定理全文：

定理：如果$(m_i,m_j)=1$，$1\leqslant i$，$j\leqslant n$，那么

$$x\equiv r_1(\mathrm{mod}\ m_1)\equiv r_2(\mathrm{mod}\ m_2)\equiv\cdots\cdots\equiv r_n(\mathrm{mod}\ m_n)$$

的解是

$$x\equiv\sum_{i=1}^{n}M_iF_ir_i(\mathrm{mod}\ M),$$

其中

$$M=\prod_{i=1}^{n}m_i,\ M_i=\frac{M}{m_i},\ F_i\text{ 是同余式 }M_iF_i\equiv1(\mathrm{mod}\ m_i)\text{的解。}$$

现代数论教科书对命题的证明细节[①]，在《通解》黄氏论述中都有相应说明。我们把证明分为五段，在括弧中纪录他的见解以

① 张德馨．整数论，第一卷．北京：科学出版社，1958：135～136

为对照。

证明：

(i)因为$(m_i, m_j)=1$，于是$(M_i, m_i)=1$，而$m_j|M_i$，当$i\neq j$。(衍数(M_i)为(其)余定(母)连乘所得，必为余定(母)度(除)尽之数；而诸定(母)皆无等(互素)，故独为本定度不尽。)

(ii) $M_iF_i\equiv1(\mathrm{mod}\ m_i)$必有解：$F_i=0, 1, 2, \cdots, F_i-1$。

(求乘率亦无深理，是必使无行皆无等($(M_i,m_i)=1$)，方可为为求一之理)

(iii)由于$m_j|M_i$，当$i\neq j$，则

$$M_iF_ir_i\equiv r_i(\mathrm{mod}\ m_i),\ M_iF_ir_i\equiv0(\mathrm{mod}\ m_j)。$$

(凡置一个用数(M_iF_i)为实，以本位定母累减必余一，以他位定母累减必无余……；由是推之，三个用数以往，无不皆然。以剩数乘用数为总者，是倍用数中之余一与剩数等，仍为他定所度尽也）于是可得结论

(iv)所求数$x=\sum_{i=1}^{n}M_iF_ir_i(\mathrm{mod}\ M)$。

(满衍母(M)去之者，衍母中所涵之数循环相同。每减一次，仍合题旨。故答数无穷。)

其三，他创立求一术表式[①]，取时曰醇歌括同样算法，有条不紊。在《通解》中设题云："今有数不知总。以五累减之，无剩。以七百一十五，累减之，剩一十。以二百四十七累减之，剩一百四十。以三百九十一累减之，剩二百四十五。以一百八十七累减之，剩一百〇九。问：总数若干？(答数10 020)。

在解题过程中，他首先把一组模(5,715,247,391,187 经素因数分解，按照他拟定的规则，弃、留素因数。他确定的定母有16种

① 张德馨. 整数论，第一卷. 北京：科学出版社，1958：136. 称为黄宗宪求一术表式。

不同方式。选取其中一组,求答数。本题他的求一术表式可以归结如下:

泛母(模)	5	715	247	391	187
析母	5	$\underset{\triangle}{5}\times\underset{\triangle}{11}\times 13$	$\underset{\triangle}{13}\times\underset{\triangle}{19}$	$\underset{\triangle}{17}\times\underset{\triangle}{23}$	11×17
定母	1	55	247	391	1
衍母	5 311 735				
衍数	废位	96 577	21 505	13 585	废位
乘率		18	139	43	
用数		1 738 386	2 989 195	584 155	
剩数		10	140	245	
各总		17 383 860	418 487 300	143 117 975	
并总	578 989 136				
所求数	10 020				

当定母出现1,黄宗宪就称之为废位,减少了同余式组中的同余式个数，而不影响所求数。

黄宗宪解题明细表是节约时间和篇幅的答卷。

其四，乘率与反乘率及其在解同余式组中的妙用。

秦氏书大衍求一术，如果把算法用习惯的欧几里得算法使$\frac{a}{b}$列为竖式，则必须左侧最后余数为1，即$r_n=1$，$r_{n+1}=0$，n为单数。然后按规则随乘随加，即乘率$j_n=q_nj_{n-1}+j_{n-2}$是

$$ax\equiv 1(\text{mod } b)$$

的解。黄宗宪发现当右侧最后余数为1，即$r_{n-1}=1$，$r_n=0$，n为单数时$j_{n-1}=q_{n-1}j_{n-2}+j_{n-3}$应是$ax\equiv -1(\text{mod } b)$的解。也就是说$aj_{n-1}=-1$。为有区别于前者,他仍称前者为乘率,后者为反乘率。他说:“求乘率，恒以衍数(一侧,即a)余一而止。兹增补求反乘率

法，却以定母(一侧,即 b)余一而止。”

他借助于反乘率，用代入法，逐次消元解一次同余式组：

$$x\equiv r_1(\bmod m_1)\equiv r_2(\bmod m_2)\equiv\cdots\equiv r_n(\bmod m_n)。$$

在《通解》中，他从特殊情况解题中得到启发，获致一般解法。他说，当解

$$\begin{cases}x\equiv 12(\bmod 995),\\ x\equiv 0(\bmod 996),\\ x\equiv 0(\bmod 997),\\ x\equiv 12(\bmod 998),\\ x\equiv 36(\bmod 999)\end{cases}$$

以其中两个模数的乘积 996×997＝993 012关于第三个模数 995 的剩余993 012≡2(mod 995)。又以此剩余除第三式的剩余 12÷2＝6。那么商与乘积的乘积993 012×6＝5 958 072就是同余式组的一个解。他说：“此题取数最速，然必题中有两位适尽者，始能取之。由此推之，更立新术如后。”

他的新术用古汉语写，用甲、乙、丙…天干记 m_1，m_2，m_3，…用子、丑、寅…记 r_1，r_2，r_3，…用现代数学语言相当于说：“先取题中 m_i 中的最大者，不妨说是 m_1，又取略小于 m_1 的 m_i，不妨说是 m_2。二者相应的余数是 r_1，r_2。又以 m_1，m_2 作变换，使成定母 μ_1，μ_2。取 $r_1'\equiv r_1(\bmod \mu_2)$。解 $\mu_1 x\equiv -1(\bmod \mu_2)$。设反乘率为 j_{n-1}，这里 $n-1$ 为偶数，$r_{n-1}=1$，$r_n=0$，$\mu_1 j_{n-1}=-1$。那么 $x\equiv r_1(\bmod m_1)\equiv r_2(\bmod m_2)$的解就是 $x\equiv r_1+\mu_1 j_{n-1}(r_1'-r_2)(\bmod \mu_1\mu_2)$”[①]。原著这一论断是正确的。因为对于 $r_1+\mu_1 j_{n-1}(r_1'-r_2)$来说，除以 μ_1，它有余数 r_1；而 $\mu_1 j_{n-1}=-1$，$r_1+\mu_1 j_{n-1}(r_1'-r_2)=r_1-r_1'+r_2$，由于 $\mu_2|r-r_1'$，所以它除以 μ_2 就有余数 r_2。命题已证。

① 原著说当 $r_1'-r_2<0$ 时，就改取 $r_1'-r_2+\mu_2$。这样做，对解并无影响。

黄宗宪接着说："以上为一次求法。凡题中有三次减数者，其求法有二次。有四次减数者，其求法有三次。以后减数每增一次，其求法亦每增一次。"也就是说，这种解法连续运用，对有 n 个同余式的同余式组也可以获解。

他连举二例以为应用，其中一例为："今有物不知总，以一十一数之，剩三；以一十九数之，剩五；以二十七数之，剩一十七；以三十五数之，剩二十一。问：物几何？"（答数:21 266）

我们以现代数学记法阐述原著解法全过程：

列式
$$\begin{cases} x\equiv 3 \pmod{11}, \\ x\equiv 5 \pmod{19}, \\ x\equiv 17 \pmod{27}, \\ x\equiv 21 \pmod{35}. \end{cases}$$

(i)解　$x\equiv 21 \pmod{35}\equiv 17 \pmod{27}$。

$r_1'\equiv 3 \pmod{27}$　$\mu_1=35$，$\mu_2=27$ 的反乘率为 $j_{n-1}=10$。于是第三、四同余式的解是 $x\equiv r_1+\mu_1 j_{n-1}(r_1'-r_2) \pmod{\mu_1\mu_2}$。这就是 $x\equiv 21+35\times 10(21-17)=1\ 421\equiv 476 \pmod{35\times 27}$。

(ii)解　$x\equiv 476 \pmod{945}\equiv 5 \pmod{19}$。

这里 $(945,19)=1$，取 $\mu_1=945$，$\mu_2=5$；$r_1=476$，$r_2=5$，
于是　$r_1'\equiv 1 \pmod{19}$，μ_1，μ_2 的反乘率是 $j_{n-1}=4$。
它们的解是 $x\equiv 476+945\times 4\times(1-5+19)=57\ 176 \pmod{945\times 19}\equiv 3\ 311 \pmod{17\ 955}$。

(iii)解　$x\equiv 3\ 311 \pmod{17\ 955}\equiv 3 \pmod{11}$。

$(17\ 955,11)=1$，取 $\mu_1=17\ 955$，$\mu_2=11$，
于是　$r_1'\equiv 0 \pmod{11}$，μ_1，μ_2 的反乘率是 7，那么它的解，也就是原来有四个同余式的同余组的解是

$$\begin{aligned} x &\equiv 3\ 311+17\ 955\times 7\times(0-3+11) \\ &=3\ 311+1\ 005\ 480 \pmod{17\ 955\times 11} \\ &\equiv 1\ 008\ 791 \pmod{197\ 505} \end{aligned}$$

$\equiv 21\ 266 \pmod{197\ 505}$。

以上陈述了清代学者对《秦九章》的主要研究成绩。经过七十多年的不断努力，对一次同余式组的解探索细致，特别是在化问数为定母方面取得确定的算法，在解同余式组方面提出过三种不同考虑，大衍术、演纪术和反乘率法比高斯《算术探讨》所总结的西方成就，有过之者。

第二节　20世纪(迄60年代止)

本节阐述辛亥革命之后迄60年代国内学者的研究工作。

一　傅种孙

傅种孙(1898～1962)江西高安人。曾任北京师范大学校长。名著希尔伯特(D. Hilbert)《几何基础》和罗素(B. Russel)《数学哲学导论》译者。他于1916年最先用现代数学语言阐述大衍术，撰成论文“大衍求一术”在《北京高师数理杂志》第1期pp. 70～77发表。文中阐述此术部分内容。在文后还举了三个例题，其中二、三两例有其特色。

例2　“某将将兵不及二万人，操时列为五路纵队，末行仅3人；列为十一路纵队，末行仅7人；列为十七路纵队，末行仅8人；列为二十三路纵队，末行仅12人。问：总兵数若干？此淮阴[①]点兵遗法也。”(答数18 113)

例3　“某孩生于民国五年(1916年)甲子日曜日(星期日)。问：至民国六年壬寅土曜日(星期六)该若干日矣。”

原著解说：天干数十，而甲至壬为8；地支数十二，而子至寅

① 韩信，汉初建国功臣，江苏淮阴人(今江苏清江县境)。善用兵，任大将，初为刘邦封楚王，后降为淮阴侯。

为 2，故大衍表如下。

大衍表	泛母	析母	定母	衍母	衍数	乘率	用数	剩数	各总	并总
第一组	10	2×5	5	420	84	4	336	8	2 688	4 178
第二组	12	$2^2\times3$	12		35	11	385	2	770	
第三组	7	7	7		60	2	120	6	720	

答数 $398\equiv4\ 178(\mathrm{mod}\ 420)$。

二 高 均

高均，江苏金山人，身世不详，1920 年在上海复旦大学院学报发表论文“大衍术论”。全面论述秦氏大衍术得失、各命题所以正确的理由、其不足处或谬误所在，论文有独到见解，至今对理解《秦九章》仍有启迪意义。论文虽成于 80 年前，其牵涉面之广、之深、立论之严谨，是这 80 年来有关秦氏书研究最佳作之一。可惜此文束诸高阁，鲜有人知。[①] 从行文中知高均曾受西方数学教育训练，又钻研中算多年，对清人专著尤多研究。他博古通今，文章措词贴切，如数家珍，深中秦术原意。

论文前言认为孙子物不知数题术文“虽不立其名，皆有其实，似秦术大纲早为孙子所总揽。……但问题三、五、七两两无等，以非整数或非无等之问题求无等之定母、在总术言之甚详。秦氏之发明殆在此乎？”高均用近代数学知识检验秦氏术，他说：“罗列大衍术九条，以论理求之，…以观中西之异同也。大衍术之是非，了如观火矣。”论文把大衍术厘为九条，以本卷第四编分段对照如表 5.2.1。

① 1999 年暮春李迪教授提供材料。

表 5.2.1

高均文分条号	本卷第四编分段、分句号码		高均意见摘要
	分段号	句码	
一(问数分类)	1	1	复数为赘设
二(论元数)	2.1	1～5	法近密，而非尽密
三(论收数)	2.2	6～7	得数应退复原位
四(论通数)	2.3	8～10	得数以共母收之
五(论复数)	2.4，2.5	11～14	求总等赘设
六(论衍母)	3.1	15～18	原术密
七(论奇数、衍数)	3.1～3.2	19，20	原术密
八(大衍求一术)	3.2	21，22	原术密
九(大衍总数术)	4	23～30	正用、借用皆赘

论文在《工科杂志》1920(2)pp. 7～64，全文约三万字，分七节：

问数分类第一

求泛母第二

求定母第三

求衍母第四

求衍数、奇数、用数、各总、并总、求率第五

总论大衍术条理及疏密第六

大衍术与西法等剩术异同第七

我们依此序述主要论点。

问数分类

高均说："大衍问题发问总式之意…可作

$$x \equiv r_i \pmod{m_i} \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{1}$$

式中[1] x 为所求之未知数。x 可有无穷多个解[2]，而大衍术求其最小者，谓正解中之最小者。各问数(m_i)及余数(r_i)皆整，则解不得不整。盖以非整数去若干倍整数，决不能得整数也。故复数、元数两格，解必为整数。其在他格则解亦不能限于整数。譬如气骨、闰骨而求上元以来若干年天正冬至之积日(以日为单位)，则大概不为整数而带有…余，顾又不能不名此数为解也。”

求泛母

高均指出：“大衍题问题既不皆为元数，故第一步即以他格问题化为元数，乃以元数格入之。而所求率不因之而俱变，或虽变而得数后，有定法以复归原数，则亦可用也。问数既化，秦氏不立专名…谓之泛母。”按，泛母一词最早是黄宗宪《求一术通解》所拟。本节高均讨论对收数、通数变换为元数后对所求率的影响。

其一，“第三条命末位分厘作单零者，是以十之乘方乘其数，即以进其位也。…今考原书积尺寻源题，其草曰，有分为小者，皆通之为单。是以分为小数也，而下文问数与剩皆以分为单位，可见秦意：数之之数(m_i)与数余之数(r_i)同进位，是秦意化(1)为

$$X \equiv (10)^K r_i (\mathrm{mod}\ 10^K m_i)。\qquad (2)$$

高均提出质疑：“(2)式果可以代(1)式而得原题所求率数乎？”在论文中证法大意：

设 x_0 是(1)的解，则

$$x_0 = r_i (\mathrm{mod}\ m_i),$$

把所有项都扩大 10^K 倍，则

$$10^K x_0 \equiv 10^K r_i (\mathrm{mod}\ 10^K m_i)。$$

如果(1)的解也扩大 10^K 倍，$X_0 = 10^K x_0$ 是(2)的解。

---

① 我们改用本卷已用的、等价于高均的表达式。

② 高均原文称得数，这里改为解。

反过来，如果 X_0 是(2)的解，当 $x_0=\frac{X_0}{10^K}$ 时，x_0 也是(1)的解。高氏就总结说："收数收位法密。惟得数后，应退复原位，则术文未明言。"他又补充说："秦术原文虽不明言得数后退复原位，然实已用此意。盖古书小数皆注名称，如寸分升合之类。譬如本以寸为单位，而进一位以分为单位…是不啻已复原位矣。故积尺题草曰，不满一千二百三十分，约之为一百二十三寸，即得数退位之意也。"

其二，"第四条有分子、母谓之通数…既约、既通之后，则问题可作

$$x=\frac{r_i}{p_i}\left(\bmod \frac{m_i}{q_i}\right)。\tag{3}$$

乃设 P 为诸分母之一公倍(不必最小)，以 P 遍乘各端，即得

$$Px=\frac{P}{p_i}r_i\left(\bmod \frac{P}{q_i}m_i\right),$$

则 $\frac{P}{p_i}r_i$，$\frac{P}{q_i}m_i$ 者率皆成整数。命

$$Px=X,\ \frac{P}{p_i}r_i=R_i,\ \frac{P}{q_i}m_i=M_i,$$

$$X=R(\bmod M_i)。\tag{4}$$

用类似于收数的处理，高均证明："凡(3)式之得数共母(P)乘之，即为(4)式之得数，而凡(4)式之得数共母约之，即为(3)式之得数，是一一相当也。"

其三，他论复数格："第五条，复数即整数也，本可以元数格一例求之，而秦氏必先化为元数格者，似欲用其总数术以冀省算耳。"①

① 他在求定母论述中探讨复数格之误。

求定母

高均说："泛母既得，则诸问数化为整数。"原先已可按部就班解题，他深有见地地指出："惟诸泛母若非两两无等，则秦法向后诸步仍不可用。故必先化诸母，令两两无等后，可按步推求也。如是所化诸母，谓之定母。各剩数不变，亦不必皆小于各定母。"

为讲清术中有关定母各命题，他先给出两定理。

定理一　对于　$x\equiv r_i(\mathrm{mod}\ m_i)(i=1,2,\cdots,n)$，$m_i$ 不两两互素，而 $\{m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n\}=M$，如果 x_0 是(1)的解，那么

①x_0+KM 都是(1)式的解，K 为整数，可正可负。

②除此以外(1)式无别的解。

他用同余式的充分必要条件作出完整的证明。

推论一　在 $[0,\ M]$ 间(1)式有惟一解。

推论二　在 $[0,\ M]$ 间(1)式无解，则(1)式无其他解。

定理二　同余式组

$$x\equiv r_i(\mathrm{mod}\ \mu_i)(i=1,2,\cdots,n),\qquad(5)$$

如果(5)式中，μ_i 与(1)式中 m_i 有以下关系

$$\mu_i|m_i$$

且　$\{\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_n\}=\{m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n\}=M$，那么(1)式与(5)式等价

他的证法大意是：

如果(1)式的解是 x_0 即 $x_0\equiv r_i(\mathrm{mod}\ m_i)$，从条件 $\mu_i|m_i$，则必存在整数 K_i，$m_i=K_i\mu_i$，因此 x_0 也是(5)式的解。反过来如果 x'_0 是(5)的解，则其通解为 x'_0+lM'。从刚才证的结果，x_0 如为(1)式的解，在(5)式中必有 x'_0+lM' 诸值之一，设

$$x_0=x'+lM',$$

而

$$M'=M,\ x'=x_0+(-l)M,$$

已证 x'_0 也是(1)式中之解。

两定理引进后，高均提出

定母应满足的三条件：

“第一条，定母能除尽相当之泛母($\mu_i|m_i$)。

第二条，定母之最小公倍等于泛母之最小公倍$\{m_1,m_2,\cdots,m_n\}=\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\}$。

第三条，定母两两无等$(\mu_i,\mu_j)=1$，$(1\leqslant i,j\leqslant n)$。”

为什么要使定母具备这三条件？他精辟地解释说：“具第一、二条，则据上论定理及推论，从定母所推之求率即泛母之求率，或以泛母与求率验与剩数不符，则可决(1)式无得数，故倘泛母本未误求，则是已得原题之求率，或决原题不符也。具第三条则用大衍术，求率可推。故此三条为定母之满足(充分)条件。”

“倘缺第一或第二条，定母之求率不足据为泛母之求率，则亦不足据为原题之求率。倘缺第三条，则大衍求一术不能应用，故此三条又为定母之必要条件。”

高均尤为精辟地畅论求定母西法与秦法的特色：“按就理论言之，则求定母，法以析数根为最简当，备具上三条件甚易见。此术黄氏尝用之。[①]劳氏(玉初)谓如遇泛母甚多(大)之数，数根不能一览而知，则考求数根，转繁于原(秦)法。其说是也，均[②]谓宋元人未知有数根，秦氏能离数根而立求法，此正宜详考者也。”

接着他就重点讨论：“论秦氏术所求定母果具上论三条件否？”成为整篇论文最精彩部分。他根据秦术第二条(论元数)、第五条(论复数)有关内容分五层次进行。

其一，求等与古书(《九章算术》)的关系，他说：“中法自古《九章》以来，求等皆用辗转相除，[③]秦氏不言求等法，盖仿古法之旧耳…所谓又相减者，求等皆辗转相除而得。夫除，即累减也。

---

① 见本编第二章第二节，六、黄宗宪的工作。

② 此均字是高均自称。

③ 按即更相减损。

求相等，亦用累减，故曰又。”

其二，论“连环求等、约此存彼”，分①至⑥点：

①秦氏术中之所以连环求等约此乘彼的原因：“既得泛数，乃以等数约一母、存一母，…约后之两母，易于无等耳。”

②“连环求等，约此存彼”的步骤：“任意取两泛母求其等数，或所取、既与他母求等约过者，则用既约之数，不用原泛母。以秦书题草考之，皆然。又云两两者，是遍取任何两个之意，而未明言其取之之次序也。”

③质疑：“约奇弗约偶云云者，既得等数，约一母，存一母。其应约此、存彼？抑应约彼、存此？则秦氏意欲以原母之奇(单)偶(双)定之。此端实于法未密。”他对第二条(论元数)提出与所求结果有无影响事。

“第一事，连环求等，以诸母两两求遍为度，而不定相求之次序。

第二事，以等数约此则乘彼，而约与不约之彼、此，则以奇偶决之。

第三事，泛母者皆奇，则存、约之彼此无定例，而可任约其一，存其一。”

④定检验标准，使约此、存彼后的定母不影响原题的解。高均说：

“假设 $a_1f^{\alpha_1}$，$a_2f^{\alpha_2}$，…，$a_nf^{\alpha_n}$ 为诸泛母($m_1,m_2,\cdots,m_n$)，其 f 为数根之一。诸 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中更无 f，诸 a_i 为正整数，亦可为0。又设 α'_1，α'_2，…，α'_n 为相当诸位约母[①] 中 f 之指数，亦皆为正整数，或0。则所当论者，即诸 α'_i 之和是否等于诸 α_i 中之最

① 约母，指经约此存彼变换后之数，在第四编第四章第一节，一、数学原理定理7.1，我们称为准定母。

大者也。”高均所定的检验标准就是：$\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i=\max\alpha_i$。

⑤高均指出秦术第二条以奇偶定约谁存谁(第二、三事)“能然，非言其必然。”他以反例证秦术“未密”，例中遇两奇，任选“约此存彼”，则

例 1

甲	$243(3^5)$	81	3	3		3
乙	$165(3\cdot5\cdot11)$	165		165	55	55
丙	$54(2\cdot3^3)$		54	54	54	54
丁	$77(7\cdot11)$			77		7

所得约母：3，5 • 11，2 • 3^3，7。他说：“其 3 之指数和小于甲中指数 5。而 243，165 俱奇，改以 3 约 165，存 243，则

例 2

甲	$243(3^5)$	243	$9(3^2)$
乙	$165(3\cdot5\cdot11)$	55	$55(5\cdot11)$
丙	$54(2\cdot3^3)$		$54(2\cdot3^3)$
丁	$77(7\cdot11)$		$77(7\cdot11)$

所得约母：9，55，54，77 中，各数根之指数和又各等于泛母中之最大者。至此高均说：“观例可见虽用秦氏限制以定存、约之彼此，而每数根约母指数之和仍能等于、亦能小于泛母中本数根数之最大者，故未合于约母之必要条件，是其术之疏也”高均又特别申明：“举例中求等相约，本无庸假道于数根，兹附列之，以备考焉。”

⑥为补救秦术之疏，他“试拟两两求等密术。术曰：以诸泛母(m_i)自上而下列出(或自下而上)以首位(m_0)与次位(m_{n-1})以下($m_{n-2},m_{n-3},\cdots,m_2,m_1$)求等(设$(m_n,m_{n-1})=d_1$)。恒约次位以下，而存首位不约。首位与次位以下求遍，乃以次位$\left(\frac{m_{n-1}}{d_1}=m'_{n-1}\right)$与第三位($m'_{n-2}$)以下求等。恒约三位以下，而存次位不约。如是遍求，至于末次位与末位终焉。自下而上者，即以最下者为首，最

上为末，以下者皆易以为上、则连环求等之事已讫，而所得约母指数之和必等于泛母中本数根指数之最大者。”

证明：“以图证之，按术制图，则见凡有一段存者，必能令其正下诸段划尽，而划法则不离乎上下，则所存诸段皆必左右啣接，而不相掩。故连之，适等于最长之长方形，即可知约母每数根指数之和必等于泛母中本数根指数之最大者。”这是说，如以小方块表示泛母中某数根 f，则 f^n 有 n 个小方块。图 5.2.1 中如果 m_4 中有 f^4，m_3 中有 f^7，则按密术“约此、存彼”运算，小方块 a，b，c，d；e，g，h，j，k，l，m 只存 a，b，c，d，k，l，m 七小块。同理 m_4 与 m_2(m_2 中有 f^2)运算的结果存 a，b，c，d；m_4 与 m_1(m_1 中有 f^6)运算后，存 v，w。然后 m'_2(含 k,l,m)与 m'_1(含 v,w)运算，存 k，l，m。长方形条段中共存 a，b，c，d；k，l，m 七小方块就是 m_4，m_3，m_2，m_1 中的最长长方形 m_2 所含方块数。

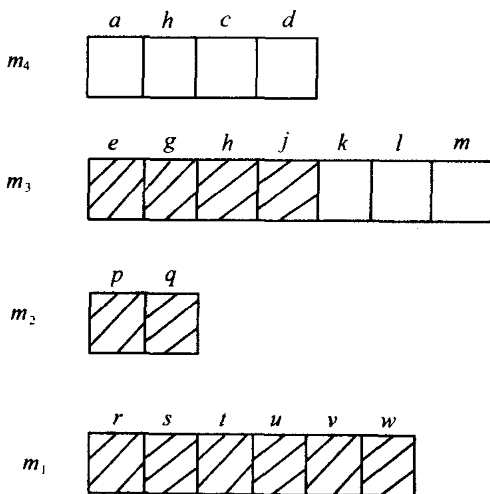


图 5.2.1

高均又指出："此就一数根言之，然此论施于诸数根莫不然。故用斯术，则约母之连乘积必等于泛母之最小公倍也。是约母之条件具矣，故新术可以补秦氏之疏也。"他还回答了质疑中的第一事，即约此存彼的次序问题："按求等之序，秦术总数术虽未明言，而细考各题草，实即用斯术所定之序……然上文举例亦用此序，而其疏不免①，故秦氏之疏在存、约之彼此，而不在求等之次序。"文中还用新术求出 143，265，54，77 和 253，3 750，270，25 两例的定母为例。(图 5.2.2)

	泛母	一变	二三变	约母	
甲	243	243	243	243	(3^5)
乙	3750	1250	1250	1250	(2.5^4)
丙	270	10	1	1	(1)
丁	25	25	1	1	(1)

图 5.2.2

其四，论"求续等，约此乘彼。"

高均指出，经过连环求等，约此存彼手续之后"假令约母所求不误，则依续等术所求定母，其连乘积必仍等于泛母之最小公倍，则定母之第二条件具矣。又续等一变或数变必至诸母无等而止，则定母之第三条件亦具矣。惟续等约一数，复乘一数，不限彼此，则令定母不尽相当之泛母，则第一条件缺矣，是续等原术亦未密也。"于是他："今亦为补正其疏漏续等新术如下：先用第一层拟术求初(次)等讫，乃求续等，以首位(m_n)与次位(m_{n-1})求等($(m_n,m_{n-1})=d_1$)。约首位，复乘次位$\left(\frac{m_n}{d_1},d_1m_{n-1}\right)$。再相求，无

① 指 p. 443 例

等即止，有等则仍约首位。复乘次位，再求等，再约、乘，必至无等而止。乃以首位与他位各相求讫，是为一变。又以次位与三位以下各相求讫，为二变。至于末次与末位，相求终焉。凡约、乘，皆约上位，复乘下位，必至无等而止。”

证明：仍用条段图图解。高均说：“惟约母每根指数之和本等于泛母中此根最高指数。是拟术所得定母，无异于泛母中取各数根指数之最高者，而弃其余数根也。然则定母三条件皆备矣。”他特别补充说：“拟术、求约定母皆不析数根，与古法同。”这就解决了不满足第一条件的问题。

其五，求定母捷法。

这是高均的一项创见。论文标题：“论求约母可省诸变为一变求之”。他先指出：“连环求等原术及前拟术，皆须屡变得之。凡位数为 n，则变数为 $n-1$。其实可省诸变为一变求之。”他的捷法是：“诸泛母自上而下列甲乙位为泛、甲乙于左行。重列泛甲于右行子位。乃以子与泛乙求等，约泛乙为约乙。从约乙复乘子，入丑位。乃以丑与泛丙求等，约泛丙为约丙，以约丙复乘丑，入寅位。如是递推，至于末位而止，则左行即约母。”术后举例(图

左行变约母	左行泛母	右行
𝍡𝍬𝍢	𝍡𝍭𝍢	𝍡𝍭𝍢
𝍭𝍤	𝍠𝍮𝍤	𝍠𝍫𝍢𝍮𝍤
𝍡	𝍭𝍣	𝍡𝍮𝍦𝍫〇
𝍦	𝍯𝍦	𝍩𝍧𝍯𝍠𝍩〇 (即衍母)

图 5.2.3

5.2.3)用中国数码字记数据，对于泛母 253，165，54，77 一变到位地获得定母 243，55，2，7。同时也获得衍母 187 110。如以

《秦九章》卷2第8题(积尺寻源)有泛母八个：130，120，110，100，60，50，25，20原草有七变[①]，改用高均捷法只需一变就得到结果：13，24，11，25，1，1，1，1。

高君心细如发，还指出重要二点："左行约母之积为诸泛母之最小公倍也。此术亦须求续等，与前拟术同。"以积尺寻源题说，其运算应是：

续等	左行变	左行	右行
定母	约母	泛母	
13	130	130	130
24	12	120	130×12=1 560
11	11	110	1 560×11=17 760
25	5	100	17 760×5=85 800
1	1	60	85 800
1	1	50	85 800
1	1	25	85 800
1	1	20	85 800(衍母)

这一捷术，我们已列为第四编第四章第一节，一、数学原理定理7.3。

高均在论述其优于秦术的创见后，又恰当地指出："按以此术求约母多者，较前拟术简捷多矣，而不废前术者，以与原术最近也。"

其六，论复数，其主要论点为

①复数格不必设立："复数为赘设，此格不特赘设，且多致误。"

① 见第四编第四章第二节积尺寻源题分析。

②复数格中有约此乘彼[①]之说，高均批评说："依复数条约此、复乘彼，则约母指数之和将与泛母指数之和等，而定母指数之和亦与泛母指数等，则定母连乘积必大于泛母之最小公倍。"不满足定母条件之二，因此此说谬误。

③按照元数格中对复数的定义：或诸数皆不可尽类，则以诸元数，命曰复数。"不可尽类"指有公约数，秦氏称为总等。高均也说："复数有总等一层也。"秦氏在大衍术中两次提到对复数的处理方案：以诸数求总等，存一位，约众位，始得元数。高均指出："复数于连环求等之前，皆先求总等。存一位，约众位，又以程行二题考之，元数有总等者，亦先求总等，此层前人已悟其于算未密。劳氏(玉初)从之，省去不用，是也。"高均为此作剖析：所谓存一位，约众位，仅在特殊情况下正确。他说："试明其所以致误之由：苟所存一位非本数根指数最高之位，则最高指数必被约减。连环求等后，约母指数之和必小于泛母最高指数，而求续等后，定母指数之和亦将小于泛母最小公倍中本根之指数矣。"他指出："惟所存之位适为指数最高之位，且必总等所有诸数根悉于此位得最高之指数，而后约母定母，可偶含焉。"他的结论是："然则总等一层，非通法，审矣！"

高均又以《秦九章》卷 1 第 2 题(古历会积)三泛数：气分 1 372 340($2^2\cdot3\cdot5\cdot47\cdot487$)，朔分111 036($2^2\cdot3\cdot19\cdot487$)，纪分225 600($2^6\cdot3\cdot5^2\cdot47$)为例，验证其论点。三者总等是 12($2^2\cdot3$)。"今借数根考之，则总等所有数根为 2 与 3。其最高指数皆在第三位纪分中。本题原草以总等约气、朔，而存纪分，适存指数最高之位，故得气定 487，朔定 19，纪定225 600($2^6\cdot3\cdot5^2\cdot47$)，衍母 2 087 476 800($2^6\cdot3\cdot5^2\cdot47\cdot19\cdot487$)诸数皆不误。[②]"

---

① 见大衍术第 2.4 第 12 句。

② 见第四编第四章第三节，古历会积题分析。

"倘约朔、纪而存气分不约，则 2 之最高指数 6 被减为 1，得

气元	1 323 340		气定	68 667
朔元	9 253	如法连环求等又求续等，得	朔定	19
纪元	18 800		纪定	400

衍母421 869 200($2^4\cdot3\cdot5^2\cdot19\cdot47\cdot487$)此衍母不能以纪分约尽，则定母之不可用可见矣，而其致误之由，即在求总等也。"

我们补作说明：

(1)以卷 2 第 2 题(程行计地)为例，复数 300($2^2\cdot3\cdot5^2$)，240($2^4\cdot3\cdot5$)，180($2^2\cdot3^2\cdot5$)，其总数为 $2^2\cdot3\cdot5$。如按高均法则要在三数中选择一个使 2，3，5 的指数都不小于其他两数，以为存数。此例存数不存在，因此原题草谓："先求总等，得六十。只存三百，勿约，乃约二百四十，得四。次约一百八十，得三。各为元数，连环求等"。草中得定母分别为 25，16，9，衍母为3 600。这仅仅是偶合。检视原草运算，并非按元数化定母规则：约此存彼，而是按续等规则：约此乘彼①。无异已先承认三数经存一约二之后连乘积已是泛母的最小公倍数，以续等变换，以满足定母的第三条件：两两互素。

(2)以同卷第 3 题(程行相及)为例，复数 300($2^2\cdot3\cdot5^2$)，250($2\cdot5^3$)，200($2^3\cdot5^2$)，其总数为 $2\cdot5^2$。如按高均法则要在已给三数中选择一个使 2，5 的指数都不小于其他两数，以为存数。此例存数也不存在。原草说："甲乙丙三名日行，求总等，得五十。先约甲、丙存乙，得甲六、乙二百五十、丙四。"各自含 $2\cdot3$，$2\cdot5^3$，2^2。经连环求等，约此存彼，得定母 2^2，3，5^3。数根 2 的指数已小于原来泛母中的最高指数 3。不符合定母条件。至于原术草文把存一、约二的三数求续等、约此乘彼变换，错上加错，我们已有

① 见上同编、章、节程行计地题分析。

述评。[①]

大衍求一术

高均以治历演纪题原草解

$$377\ 873x \equiv 1 \pmod{499\ 067}。$$

用中国数码字录全图[②]并作说明："观于此草，则求一之术，条段自明。然古人本题运以筹策，故各层转变，居其所而不动，不待烦言而自解。载之楮素，则不得不按步分图，顿觉繁重。盖法重运筹，本不求利笔墨耳。"他用相当于第四编第四章第一节，一、数学原理定理2，定理10方法证大衍求一术之真。他还指出："故知奇定相求，必至奇一而止。所谓求一者，即求此一也。"

关于大衍求一术的运算工具，高均能数典念祖，他说："按古《九章算术》约分术曰：可半者半之，不可半者副置分子、母之数，以少减多，更相减损，求其等也。以等数约之。此即求一术之事。惟古用减损，今则商除，稍趋简捷耳。然则求一术之渊源，亦可寻矣。"

大衍总数术

高均对泛用、正用有正确的认识，他说："泛用以本定母约之，余一。以他定母约之，皆尽。故诸泛用并，以各定母约之，皆余一(数学原理，定理18)，即泛用为一个或数个衍母多一也。秦氏则以容一个衍母者为正用。容两个以上者，复设法损之，令只容一个而止……不分正用、泛用而于理皆合，……不必损减也。"

对定母为一及借用的认识："定母得一者，无论得数为何，以定母数之，皆能得问题所设之本位剩数也。然则本定母与本剩数皆可不计(恒等同余式)，而只用他位定母与剩数以求得数也。是总并中可缺本位一总，是无异令本位之用数为0也……秦氏欲令

---

① 见上同编、章、节程行相及题分析。

② 见第四编第四章第四节附表。

各位皆备用数，故立借用数法。然亦自知可省，故曰：或欲从省，勿借，任之为空可也。”

高均还作出相当于数学原理定理17．2的判断。

“**定理**　若泛母若干位有等(专指此若干位之总等，非谓诸母全局之总等)。约衍母得商数乃于所论诸位泛母内各损益若干倍商数，但使损益总数相消，或合一个、或数个衍母，则求率仍无变。”对此还作证明(略)。

他还指出相当于数学原理定理13的判断：“设泛母若干位有等，则此诸位剩数之各较(差)悉能以总等约尽，否则问数无得数。”并作证明(略)。

他还指出秦氏术(4.1段第25句)之谬失：“验元数奇偶同类者，损其半倍；或三处同类，以三约衍母，于三处借之。”他说：“约其义，则其于用数内各损$\frac{M}{K}$也。[①] 此数确成一个全衍母。但K为位数，未必为诸位之总等。则总并共损，亦未必是全衍母，则得数不能无误也。”

总论大衍术疏密

高均总结秦氏术计算算程序一如时曰醇“求一歌括”或第四编第四章第一节末之表。他还总结全文对秦氏术的分条意见，我们在表5．2．1后作了摘要。

大衍术与西法等剩术(同余论)异同

论文说：“等剩式(congruences)创于德人高斯[②]，清嘉庆、道光间(1796—1851年)人也。”当$m|a-b$，则称$a\equiv b \pmod m$为等剩式。“此式倘函未知数，命之曰余程$ax\equiv b \pmod m$(一次同余式)。”他指出大衍术所涉数域不限于整数：“余程中已知未知诸数

① 论文笔误，作$K\frac{M}{d}$，我们据意改正。

② 原文译为果斯。

皆以整数为限，未见有论分数者。此界说视大衍术为隘。”论文分两方面比较中西异同。

其一，一次同余式

$$ax \equiv b \pmod{m}。\tag{6}$$

“假定 a 与 m 有等，而等数不尽 b，则余程必无得数。假令等数亦能尽 b，则以之约 a，b，m 三数后，所得之余程必与原式同其得数”（数学原理定理 9“故可专论 a,m 之无等者”）。

论文用相当于数学原理定理 2 方法化$\frac{b}{a}$为连分数

$$\frac{b}{a}=q_1+\frac{1}{q_2+}\frac{1}{q_3+}\cdots+\frac{1}{q_n}。$$

然后化为 n 个渐近分数，称 n 级近分数。得(6)之特解

$$x_0=(-1)^n j_{n-1}b,$$

它的通解是

$$x=x_0+mt(t\text{ 为任意整数}),$$

对照大衍术所得特解

$$x_0=(-1)^{n+1}j_n b$$

相差 1. 高均为作精湛的对比，和解释说：“试与大衍求一术比而观之，则余程之 a 与 m 即求一术奇、定也。连分数之诸偏商(q_1，q_2,…,q_n)即求一术之诸商也。惟求一术奇不满定，故 q_1 常为空。连分数之诸级近分母(j_1,j_2,…,j_n)即求一术之左率也，其推率之两两相当可证也。其次末级近母 j_{n-1}即求一术之乘率① 也。惟求一术常令右上奇一，乃取左上为常率。是能令 n 常偶也。则$(-1)^n j_{n-1}$常正矣。此则两术之途径稍殊而仍同归者也。盖余程法所取者$(-1)^n$或正或负。而求一术之乘率则为正。(n 偶则乘率，j_{n-1}；n 奇则乘率，$m-j_{n-1}$)乘率常正，故用乘奇，亦常为正，而满去定母，常

① 按大衍术取$(-1)^{n+1}$，故乘率的序号应是 n，即乘率为 j_n。

得正一。若余程之$(-1)^n a j_{n-1}$则虽不常正，而其负时，可累增法数(m)，而亦得正一，故曰殊途而同归也。”

其二，一次同余式组

高均讨论　$x \equiv r_i (\bmod\ m_i)(i=1,2,\cdots,n)$。

他认为：“法数(m_i)两两无等，在大衍则谓定母，同泛母也。”在这种情况下，他介绍西法，相当于说

$$x \equiv \sum_{i=1}^{n} F_i r_i M_i (\bmod\ M),$$

其中，F_i是$M_i F_i \equiv 1 (\bmod\ m_i)$的解

$$M_i = \frac{M}{m_i},\ M = \prod_{i=1}^{n} m_i。$$

当他对照秦氏术中西法相通，深有体会地说：“惟大衍须求最小得数，故复满衍母去之为所求率数。而余程取总式。故任意增减衍母也。然则两术之层层相印，真有闭门造车而合辙之妙矣。”

高均又讨论(2)式中“法数非两两无等”。他说：“在大衍为有泛母，宜求定母。”而西法：“不论泛母求定母法。其于法数不必两两无等之通法”。先取二行

$$\begin{cases} x \equiv r_1 (\bmod\ m_1), \\ x \equiv r_2 (\bmod\ m_2), \end{cases}$$

“则据第一行有　$x = m_1 t + r_1$(t为整数)，代入第二行，得

$$m_1 t + r_1 \equiv r_2 (\bmod\ m_2)。$$

若$d = (m_1, m_2) | r_2 - r_1$，则

$$\frac{m_1}{d} t = \frac{r_2 - r_1}{d} \left(\bmod\ \frac{m_2}{d} \right)”。$$

借以求得t的特解t_0。其通解当为

$$t = t_0 + \frac{m}{d} s，于是$$

$$x = m_1 t_0 + r_1 + \frac{m_1 m_2}{d} s = x_0 + \frac{m_1 m_2}{d} s。$$

此即
$$x \equiv x_0 \left(\bmod \frac{m_1 m_2}{d} \right)。 \tag{7}$$

“此式(7)与(1)式之第三行相和，如法求之，…可代其首三行。如是递推，则可尽诸余程，而以一余程代之。”高均介绍两法解同余式组通法之后，他又兴致勃勃地对照《秦九章》有关成果和清人的工作，他说：“按此递推之法与秦氏有泛求定之法殊科(异)矣。而秦氏实亦有递推之法，特不著于总术九条之中，而治历演纪一题，其法尽在矣。……题极冗长。…沈氏钦裴有改定术；极简明。虽与原术稍有出入，然用递推之意，则犹原术也。”高均就用沈氏术讲明秦九韶也曾经用逐次消去去解题：

“岁率、纪率、朔率皆以分为单一。分者、以日法(16 900)分一日之时间也。故命上元以来积分为 x_0，则 x＝积年×岁率，而以余程译题，则有

$$\begin{cases} x \equiv 0(\bmod \text{岁率}), \\ x \equiv \text{气骨}(\bmod \text{纪率}), \\ x \equiv \text{闰骨}(\bmod \text{朔率})。 \end{cases}$$

沈术先以岁余(即岁率满去纪率)与纪率求等，是犹以岁率(m_1)与纪率(m_2)求等也。乃得气等率(d)、蔀率及入元岁。其蔀率即气等率约纪率$\left(\frac{m_2}{d}\right)$也。其入元岁即冬至与甲子日首一会以来积年也，故得蔀率×岁率＝$\frac{m_1 m_2}{d}$，入元岁×岁率＝x_0，此即先用首二余程求 x_0 及$\frac{m_1 m_2}{d}$之意也。

乃可以 $\begin{cases} x \equiv \text{入元岁} \times \text{岁率}(\bmod \text{蔀率} \times \text{岁率}), \\ x \equiv \text{闰骨}(\bmod \text{蔀率}) \end{cases}$

相和求之，或先求 $x' = x - x_0$，则用

$$\begin{cases} x' \equiv 0(\bmod \text{蔀率} \times \text{岁率}), \\ x' \equiv \text{闰骨}(x_0 \text{满去朔率})(\bmod \text{朔率})。 \end{cases}$$

下端谓之闰缩，其 x' 即朔积年×岁率也。故以元闰与朔率相求，得

朔等数、因数、蔀数、朔积年诸率，乃以朔积年与入元岁相并($x'+x_0$)即得所问积年矣。”高均又说：“此术当是唐宋演撰家所习用，惟袭方程之名。秦氏颇加修改，而非创设，则于术文下自言之者。”

读完高君论文，深受教益。是否可以这样说：如果此文早日被发现和被深入理解，那么70年代比利时学者李倍始的名著《十三世纪中国数学》[①] 必将有根本性改观；曾经在80年代，90年代对某些问题的争论也成为没有必要了。此外如果我们把高均论文与第四编第四章第一节，一、数学原理十九条定理作一比较，其主要方面均已有论述，而且作出严密推导，足证他对数学和数学史造诣之高。

三　钱　宝　琮

钱宝琮(1892～1974年)浙江嘉兴人，浙江大学教授，中国科学院研究员。他于1921年在《学艺》杂志发表“求一术源流考”有关《秦九章》的第一篇论文，以后继续深入研究，有独到见解。1955年从浙江上调北京后，继《九章算术》校点本、《中国数学史》完稿，他又紧接着主编《宋元数学史论文集》(1966年出版)，其中“秦九韶《数书九章》研究”为对秦氏书研究成果的代表作。文中考订和全面介绍秦氏身世，又从一次同余式、多项式方程、线性方程组、勾股测量等方面阐述《数书九章》的突出成就。这是我国文化史上的重要工作，为以后国内外研究工作者奠定了重要基础。

四　李　俨

李俨(1892～1963年)福建闽侯人，从事铁路工程建设工作，中国数学史为其副业。1955年上调中国科学院任研究员、中国自

① 在李倍始书第327页曾提到高均，但文献目录中无高均论文.

然科学史研究室主任，有《中算史论丛》一至五集。在秦氏书的研究方面，力作“大衍求一术之过去与未来”1925年在《学艺》杂志发表[①]，全面介绍秦氏大衍术。文中对有关材料联系非常广泛：宋以前的不定分析、大衍术与连分数、不定方程、历法、大衍术的世界意义，特别是对日本的影响。此文同样为国内外研究工作者奠定了重要基础。

五　许莼舫

许莼舫（？～1965年）江苏无锡人，胡家渡胡氏中学教师。20世纪30年代在中华书局出版《古算法之新研究》（共11章）。以后在中国青年出版社出版《中算家的算术（代数、几何）研究》，对国内外学术界有较大影响。国外文献多次引用其著述。他对古算理论的解释的创见，很有说服力。如在《数学通报》（1965年）著文讨论沈括隙积术便是著例[②]。对秦氏书他在《古算法之新研究》中有两处，值得称道。

其一，第二章求一术　许氏新创求一术简法三种。

第一简法“取题中剩数最小者，遍减诸他组剩数，使本位剩数为零，则本位乘率、用数均可免求。但就他组求得总数，加此最小数，所得亦同。”他以孙子物不知数题为例

$$x\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)\equiv 3(\mathrm{mod}\ 5)\equiv 2(\mathrm{mod}\ 7), \qquad (*)$$

其中$r_1=r_3=2$为最小，据此第一简法，原题可改为

$$x\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)\equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)。 \qquad (**)$$

只需解$x\equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$，以衍数$3\times 7=21$与余数差1相乘，$(**)$的解是21，因此$(*)$的解是$21+r_1=21+2=23$。

我们认为此简法一般也正确，即当r_1如为$\min r_i(i=1,2,\cdots,$

---

① 后收入《中算史论丛》第一集。

② 许莼舫．从刍童求积到隙积和四角垛级数．数学通报，1965(1)：47～49

n)，则 $x \equiv r_1 (\bmod m_1) \equiv r_2 (\bmod m_2) \equiv \cdots \equiv r_n (\bmod m_n)$。　(1)

改解　$x - r_1 \equiv 0 (\bmod m_1) \equiv r_2 - r_1 (\bmod m_2)$

$$\equiv r_3 - r_1 (\bmod m_3) \equiv \cdots \equiv r_n - r_1 (\bmod m_n)。\quad (2)$$

那么(2)的解为　$\sum_{i=2}^{n} M_i F_i (r_i - r_1) (\bmod M)$，

则(1)的解为　$r_1 + \sum_{i=2}^{n} M_i F_i (r_i - r_1) (\bmod M)$。

这一命题我们称为定理 17.4。

第二简法“二剩数相等者，取二组泛母之最小公倍数为泛母，以等剩数为剩数，两组并为一组，亦可省算。”

对于上面同余式组，不妨设 $r_1 = r_2$，此简法认为与同余式组 $x_1 \equiv r_1 (\bmod m_1 m_2) \equiv r_3 (\bmod m_3) \equiv \cdots \equiv r_n (\bmod m_n)$等价。

第三简法“求得乘率后，各乘剩数，得用数，满本位定母去之。…以各剩数乘之，得各总，并之，满衍母去之，得所求数。”

这一简法与张敦仁法(定理 17.3)一致，但许氏法取 $F_i r_i \equiv R (\bmod m_i)$较张氏取 $r'_i \equiv r_i (\bmod m_i)$计算工作量方面衡量，当各有利弊。

其二，第十章三斜求积术　三角形已给三边求面积术世称海伦(Heron)公式。许氏最先指出：“南宋之时，大算学家秦九韶氏亦曾以其他方法单独发见此三斜求积之术，于是海伦氏乃不能专美于前矣。”

为证明秦氏术，他作出不少推导。下面录其有特色者：

证明一　相当于角的余弦定理推导，图 5.2.4 中

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = a^2 + c^2 - 2ax,$$

于是

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a},$$

从勾股定理 $h^2 = c^2 - x^2 = (c+x)(c-x)$把 x 值代入，

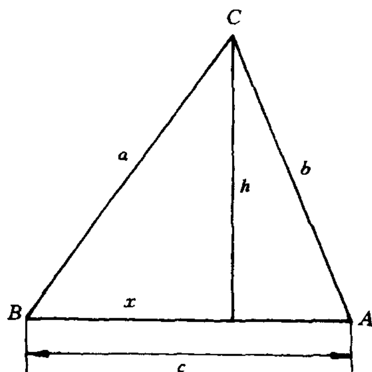


图 5.2.4

又从底高乘积之半就能导出三斜求积公式。

证明二　许氏还从三角形内切圆、旁切圆半径关系推导。(图5.2.5)他设$\triangle ABC$三边和之半为s，内切圆、旁切圆半径分别为r，r_b。从$\triangle ODC \backsim \triangle CEO_b$建立比例关系$OD : CD = CE : O_bE$，于是

$$r : (s-c) = (s-a) : r_b。\tag{1}$$

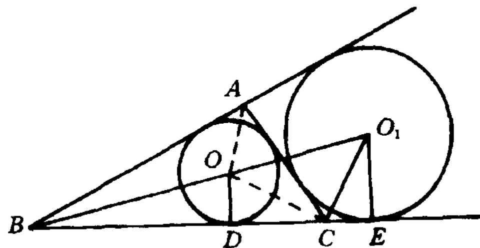


图 5.2.5

又　$$OD : BD = O_bE : BE,$$

即　$$r : (s-b) = r_b : s。\tag{2}$$

(1)(2)两边相乘　$r^2 : (s-b)(s-c) = (s-a)。$

也就是说　　$r^2s^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$。

再从面积$\triangle ABC=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}(a+b+c)r=rs$就得到海伦公式。

证明三　他还在《中算家的几何研究》一书中，以符合秦九韶生活的时代背景的出入相补原理证法。

图5.2.6中由《九章算术·方田》圭田术可得

$\triangle ABC$的面积$A=\frac{1}{2}ah$，自乘得

$$A^2=\frac{1}{4}a^2h^2, \quad (1)$$

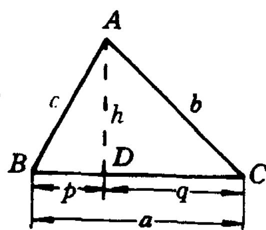


图5.2.6

又由勾股定理有　$h^2=c^2-p^2$，　(2)

以(2)代入(1)得

$$A^2=\frac{1}{4}a^2(c^2-p^2)=\frac{1}{4}(c^2a^2-a^2p^2), \quad (3)$$

又从(2)得　$b^2=h^2+q^2=c^2-p^2+q^2$。　(4)

在图5.2.7中以出入相补原理，知

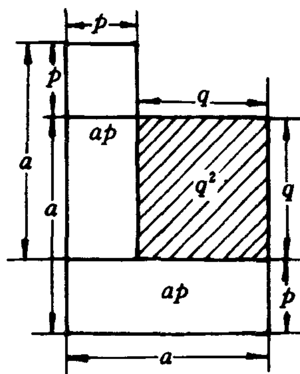


图5.2.7

$$q^2=a^2+p^2-2ap,\quad(5)$$

以(5)代入(4)，

$$b^2=c^2+a^2-2ap,$$

$$p=\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}。\quad(6)$$

以(6)代入(3)就是三斜求积公式。

这一复原设想是合情合理的[①]。

六　王守义

王守义(1912～1976年)山东临清人。1939年齐鲁大学天算系毕业，兰州甘肃师范大学数学系教师。在50年代中期完成《数书九章新释》一稿，1958年科学出版社已列入出版计划。因故撤消出版，退回。后来此稿重起，由1992年合肥安徽科技出版社出版。王守义因故于1957年离开教学岗位。从情况推测他只读到李俨有关论著，钱宝琮1966年发表的代表作“秦九韶《数书九章》研究”论文未能读到，所以《新释》中绝大部分是他自己的研究心得。这是我国第一部全面、系统地用现代数学语言解释《秦九章》的专著，是难能可贵之作。

全书615页，约52万字，按秦氏书原来章、卷、题为序。

每章之前一般都有王守义用现代数学语言解释全章主要内容，有详、有略。例如第一章大衍类多达36页，第九章市物类12页，而第二章天时类1页半，第六章钱谷类仅半页。

每题的《新释》体例：题问、术文之后用字母代表未知数、用公式写出术文实际意义，使原来艰深的文言文变得平易近人。这样做，必然难度很大，但这样做使某些数学史上有争论的问题，昭然若揭。比如秦氏有建立方程和恒等变换方面的熟练技巧并非“不叙明怎样从问题所给的条件导出这个方程式的逻辑思维，而枝

---

① 对照日本今村知商的成果，参见副卷第一卷第六编第二章。

枝节节地说明实、方、廉、隅的数字计算程序。"《新释》的细致工作使秦氏这一功勋显现无遗。举例说，卷6第2题(环田三积)术文："各置环圆径自乘为幂。进位为实，以一为隅，开平方，得周。各置圆环周自乘为幂，退位为实，以一为隅，开平方，得径。以周幂或径幂乘各实，以一十六约之，为实。以一为隅，开平方，得圆积。置环周幂，乘径实，十六约之，为大率。置虚径幂，乘内周实，十六约之，为小率，以二率相减之，余以自乘，为实。并二率，倍之，为从上廉、一为益隅，开三乘方，得环积。置环周自乘，退位为实，一为隅，开平方，得通径。以虚径减通径，余为实径。其有开不尽者，约而命之。"《新释》文顺字从地译为现代数学语言说：

设直径为 d，圆周为 C，$\pi=\sqrt{10}$，则有

$$C^2=10d^2,$$

$$d^2=\frac{C^2}{10}。$$

又设圆积为 A，则

$$A^2=\frac{d^2C^2}{16}=\frac{10d^4}{16}=\frac{C^4}{10\cdot 16}。$$

复设环田积为 x，外圆积为 A_1，内圆积为 A_2，通径为 d_1，外周为 C_1，内周为 C_2，虚径为 d_2，则得

$$x=A_1-A_2=\sqrt{\frac{C_1^2d_1^2}{16}}-\sqrt{\frac{C_2^2d_2^2}{16}},$$

两端平方，得

$$x=\frac{C_1^2d_1^2}{16}+\frac{C_2^2d_2^2}{16}-2\sqrt{\frac{C_1^2d_1^2}{16}}\cdot\sqrt{\frac{C_2^2d_2^2}{16}}。$$

移项后，两端再平方，得

$$\left(\frac{C_1^2d_1^2}{16}+\frac{C_2^2d_2^2}{16}-x^2\right)^2=4\,\frac{C_1^2d_1^2}{16}\cdot\frac{C_2^2d_2^2}{16}。$$

化简，得

$$-x^4+2\left(\frac{C_1^2d_1^2}{16}+\frac{C_2^2d_2^2}{16}\right)x^2-\left(\frac{C_1^2d_1^2}{16}-\frac{C_2^2d_2^2}{16}\right)^2=0。$$

而　　　　　　　　　环田实径$=d_1-d_2$。

《新释》并不是逐句解释，而是有选择地作重点阐述。

草文及筹算图式之后用阿拉伯数字横式列出相应演算，使读者明了术文的实际意义。

正如第三编第二章第二节，对《数书九章》评说中所记秦氏书有数以百计的庇漏和笔误。对此王守义的处理是："原问术草小有讹误进行改正时，均随文修改，并附原文。图中筹码，则照改正数字列出，其中讹误较大的，则另列更正题问术草，并为新释。"

《新释》作者发挥他的专长，在第二章天时类有关题新释中尤有精辟见解，对于秦氏所处南宋社会人文历史背景的理解也是深入的。

对于历来有争议的秦氏题王守义提出新的更正见解：

其一，卷 1 第 2 题（古历会积）前人已有多次更正，但改动过多。王守义认为："为了说明古历会积这类问题的实质，并尽量保存原文字起见，特为更正如次："问古历冬至以三百六十五日四分日之一、朔策以二十九日九百四十分日之四百九十九、甲子六十日各为一周：假令天正(原为"至淳祐丙午十一月")丙辰朔，初五日庚申冬至，初九日甲子，欲求古历气朔甲子一会积年积月积日及历过、未至年数各几何？答曰：
一会积1520年，18 800月，555 180日，历过 1268 年，未至 252 年，但必须是亥正末刻冬至和辰刻 33 刻 72 分 34 $\frac{2}{47}$秒即 8 $\frac{22}{235}$时交朔。"

其二，卷 2 第 3 题(程行计及)前人也有多次更正。王守义认为："原问各数应该有机地联系起来，惟按原设数字，却发生了一

个不可能问题，这个不可能的产生，主要的是秦氏没有掌握 $r_i \equiv r_j$ $(\mathrm{mod}(m_i, m_j))$[①] 的规律，而任意设数的结果。这和古历会积题的朔不及 8 日，气不及 4 日的无解情况是相类似的，这样一来，本问若不略改是无法统一的。本问改之如次：

问有急足三名，甲日行 300 里，乙日行 250 里，丙日行 200 里。先差丙往他处下文字，既 $1\frac{1}{2}$ 日。又有文字遣乙追付，已 1 日。复有文字续令甲赶付乙。三人各不相及，乃同时俱至彼所。先欲知乙果及丙、甲果及乙，得日并里，次欲知彼处去此里数各几何？答曰：乙果追及丙，6 日，行1 500里，甲果追及乙，5 日，行1 500里，彼此去1 500里。”

王守义的工作是开创性的，由于受历史条件的限制，有些地方，特别是秦氏书中要害部分的新释未能涉及本质。例如关于模数化为定母的秦九韶定理(定理 7)，他仅是沿用 50 年代苏联维诺格拉多夫(N. M. Виноградов)著(裘光明译)《数论基础》观点及黄宗宪析因数法求解，这与我国宋时数学处理习惯大相迳庭，当时并无素数概念。又如他力图更正前人更正的不足，但上引两处更正仍误。以古历会积题而言，既求出答数：历过为 1268 年，即自上元至制历年冬至点(亥正末刻)时间应为

$$365\frac{1}{4} \times 1\,268 = 363\,137\text{日}$$

更正题中指出：交朔在丙辰(初一)亥正末刻后 $8\frac{22}{235}$时。

从图 5.2.8 知

$$29\frac{499}{940}\text{应整除}\quad 363\,137 - 4 + \frac{8\frac{22}{235}}{24} = 363\,133\frac{951}{2\,820}$$

① 等价于 $(m_i, m_j) \mid r_i - r_j$。

60应整除 363 137+4=363 141

但两者都不能达到要求，程行计及题的更正也未尽人意。

七 其他学者的工作

在三斜求积公式方面有燕霞(1955)、李迪(1962)文，在量雨测雪方面有程廷熙专文(1963)。杜石然撰文讨论数值解方程与阿拉伯数学的关系(1966)。白尚恕则全面讨论了测望类九题(1966)。[①]

第三节 20世纪(80和90年代)

1980年之冬中国科学技术史学会第一届全国代表大会在北京召开，会上产生首届中国科学技术史学会常务理事领导班子。1981年夏天中国数学史学会代表大会在大连举行。两会犹如一对艳丽的报春花，科学史(含数学史)的活动从此健康展开。众多书刊的出版，频繁的学术会议，展现数学史的深入研究成果。

秦九韶《数书九章》的研究工作也不后人，在一些文集和杂志上对秦氏书的讨论是其中最热门的课题之一。此外经过长时期酝酿，1987年在北京师范大学还召开了“秦九韶《数书九章》成书740周年纪念暨学术研讨国际会议”(图版四)。

会议由北京师范大学、内蒙古师范大学、杭州大学、西北大学联合发起筹备，是国家自然科学基金项目。5月21日至24日在北京师范大学图书馆大楼举行，出席代表55人。其中国内学者50

① 括弧内数字为文章发表年代，文题可查本卷末文献目录。20世纪60年代何洛(何章陆)在浙江师范学院数学系任教，曾有《数书九章选读》稿本。有独到见解，未及发表，70年代他不幸去世。

人来自全国 19 个省市自治区：北京(25)[①]，天津(2)，上海(1)，湖南(2)，湖北(2)，陕西(4)，山西(3)，山东(2)，黑龙江(2)，吉林(1)，辽宁(1)，河南(1)，内蒙古(4)，四川(3)，江西(3)，福建(1)，新疆(1)，江苏(4)，浙江(4)，外国学者 5 人来自美国(2)，日本(2)，比利时(1)，济济一堂，真是少长咸集，群贤毕至。会议共收到论文 56 篇，其中总论 21 篇，大衍术 18 篇，其他课题 17 篇，这些论文不少已在杂志和文集发表。

此外为秦氏书还出版专著《秦九韶与〈数书九章〉》，吴文俊主编，北京师范大学出版社出版，1987。是《中国数学史研究丛书》中继《刘徽与〈九章算术〉》之后的第二部专著，收论文 32 篇，这是综合研究秦氏书的第一部专著。

这 20 年间对秦氏书的工作情况我们分三段总结。

一　秦氏其人其书的研究

李迪(1987a)[②]、解延年(1987)、莫绍揆(1989)、沈康身(1989)都为秦氏立传，严敦杰(1987)发表他工作了 36 年的秦九韶年谱，邵启昌(1988)考证秦氏籍贯。

关于《数书九章》分项作了钻研。

1. 流传与版本

李迪(1986b)、沈康身(1987a)还作部分订讹正误。

2. 与其他学科的关系及其比较

——与中国传统名著　白尚恕、李兆华(1987c)论与《九章算术》的关系，李迪(1996b)论与祖冲之缀术的关系。

——与哲学　周瀚光(1987)

① 括弧内数字表示人数。

② 括弧内数字为论文发表年份，字母为作者同年发表论文序号，论文文题见本卷末文献。

——与理学　周瀚光(1983)

——与道学　周瀚光(1989)

——与数学教育　张素亮(1987)

——与南宋社会　李迪(1987)

3. 比较数学史

——与印度数学　沈康身(1986d,1987b,c)、李培业(1987)、许康(1995)

——与阿拉伯数学　杜石然(1987)

——与和算　沈康身(1986c,1987d)

——与 Avicenna　劳汉生(1988)

——与欧拉的同余式解法　王翼勋(1996)

——与高斯《算术探讨》　沈康身(1992)

4. 数学史学史

——李倍始《13世纪中国数学》述评　白尚恕、沈康身(1987)

——西方对《数书九章》的认识　沈康身(1988)，汪晓勤(1999)

——国内研究情况　李迪(1992a,1996a)

5. 向外国宣扬秦氏书的成就

沈康身撰文分别在印度(1986d)，在日本(1986c)，在德国、美国(1988b)发表。

二　分类研究

我们按《秦九章》所分类阐述

1. 大衍类

为数众多的学者发表论著讨论，主要成果表现在

——大衍术通论　李继闵(1987e,1996b)、莫绍揆(1989,1993)、王翼勋(1990)

——从数论全面考虑大衍术 沈康身(1986a)

——大衍术的推广 刘钝(1987)

——从问数变换为定母的研究 继高均之后，李继闵最先考虑把奇偶概念从单双解释为位置(彼此)关系(1987e)，钱克仁(1982,1990)，梅荣照(1987)，王渝生(1987)，李兆华 (1988)，王翼勋(1992)。他们都各抒己见，而且坦率地指出自己可能的不足处，有的还作出统计比较

——大衍术与大衍求一术 王翼勋(1990a)，汪德营(1987)，段邦宁(1987)考虑计算机处理

——对正用的研究 王翼勋(1990)，尚智丛(1993)

——与清代学者研究成果的比较 王翼勋(1990b)对张敦仁、时曰醇、黄宗宪等人的工作作了探讨。

——与天文历法的关系 李文林、袁向东(1987)，李继闵(1987f，1996a)

众所周知，本类第1题(蓍卦发微)是学习秦氏书的拦路虎，是不得其门而入的、令人生畏的路障，罗见今(1987)，李继闵(1987c)作了通俗易晓的中肯解释，又董光璧(1988)解释了大衍数第7题(程行相及)题文矛盾，曲安京(1991)在同余式范围内作了解释

2. 天时类

——演纪术是与大衍术相辅相成的一次同余式组解法，在前人基础上李继闵(1987a)，王荣彬(1998b)，王翼勋(1997)对第3题(治历演纪)作了进一步探讨

——查有梁(1987)讨论第4题(缀术推星)

3. 田域类

——三斜求积 夏明德(1981)，许康(1987)，程金华(1987) 用多种方法探讨公式的推导

——漂田推积 王翼勋1987年在一篇题为No Parallel line

but the gougu and the chongcha in Qin Jiushao's surveying problems 用英文写的论文中讨论秦氏术文的推导。

4. 测望类

——勾股测量　李培业(1987)，李文铭(1988)，冯立升(1996)

——正负开方术　李俊秀(1987)，李兆华(1993)，王荣彬(1998)，吴文俊(1997)，罗见今(1996)还讨论了与计算机程序的关系

——遥度圆城　郭书春(1982)，高宏林(1987)

——临台测水　王翼勋 1987 年那篇英文写的论文阐述此题与漂田推积公式间的因果关系，能够反映秦氏造术原貌。

5. 赋役类

6. 钱谷类

李迪(1987c)，许康、张杰恒(1998)指出米谷粒分一题是最早的统计学样本文献。

7. 营建类

——与北宋李诫《营造法式》的比较　沈康身(1987f)

——第 4 题(计浚河渠)　白尚恕(1986)

——第 5 题(计作清台)　郭世荣(1988)

8. 军旅类

李兆华(1987)，莫绍揆(1992)

9. 市物类

——线性方程组解法　郭书春(1982)

——第 2 题(均货推本)　沈康身(1987)

——第 3，4，5 题(互易推本、菽粟互易、推计互易)　沈康身(1987)

第三章　《数书九章》研究在国外

《数书九章》原系手抄本。经1842年上海郁松年发起木刻印刷，才能大量流传，有志于此的外国人才有可能方便地购读。我们按国家、分段论述域外学人对秦氏书专心致志钻研实况，以及他们对秦氏书的认识评价。

一　英　国

鸦片战争结束，1842年签订了丧权辱国的南京条约。五年后，即1847年4月6日英国传教士伟烈亚力(A. Wylie 1815～1887年)从伦敦出发，经过4个多月的航行，于8月26日抵达上海。他的任务是经营教会主办的墨海书馆，来华后他勤奋学习，很快掌握汉语。虽然在照顾书店，家庭多故的困难条件下，他还是坚持学习。不但学习汉语，他深知经典著作对中国人思想的深刻影响，他就研读四书五经，特别对书、诗、礼、易、春秋竟作了全文英译，然后他又广泛习读中国历史、地理、宗教、哲学、艺术(含金石)和科学(含数学)。他嗜好购书，以致《教会新报》说他："先生平素不独重外国书籍，而以中国书为至宝。西藏佛碑，宗教经轴，三坟五典，无不俱备。"[①]

1852年6月，也就是他来华后五年，伟烈就与新结识的中国数学大家李善兰(1811～1882)合作翻译欧几里得《原本》后九卷，至1857年才木刻出版。翻译方式是由伟烈口述，李善兰笔录，可

① 汪晓勤博士毕业论文。"伟烈亚力与中西数学交流"，中国科学院自然科学史研究所，1999

见经过五年自学，他的汉语水平之深邃。令人更为惊异的是在西学东传工作的同时，他还着手做中学西播的反向传导。在当时西方视中国人及其文化是愚昧无知的代名词，伟烈这种反潮流意识，是值得引起我们重视的。他在1852年8月起，以“O”为笔名，陆续在《北华捷报》(即《字林西报》,North-China Herald)发表他研究中国传统数学的心得体会，题名“中国科学札记”。其算术部分(Jottings on the Science of the Chinese，Arithmetic)刊载在8月至11月第108，111～113，116，117，119～121期[①]。

伟烈曾经系统地习读中国传统数学，《秦九章》是其熟知的中算一个组成部分。他又通五经(含周易)，因此他在介绍大衍术时竟然以对中国人来说也是拦路虎和路障的蓍卦发微题为例。

他向西方介绍秦氏大衍术之前详细介绍了孙子物不知数题。他说：“在追溯这个解法的发展过程时，我们发现，直到宋末，它才逐渐变得更为清晰，此时秦九韶在他的著作中给出了完整的原理，使我们能够解开上面那一大堆神秘数字之谜。”他用几乎与张敦仁、焦循同样的口气用秦氏大衍术解释孙子的两处术文。

接着他介绍大衍类九题。其中有详有略。第3至第8题只作简介，第2、9题详译题文，而略去答数、术文及草文，对第1题先录题文然后解释说：

“一开始用四个主要的数作为元数——老阳1，少阴2，少阳3，老阴4。在第二行，在每一个数的相应位置上列出另外三数的乘积。

元数	1	2	3	4
衍数	24	12	8	6

第二行的数相加，得50，即是《易经》中所指大衍之数。因50为偶数，因此不适合取为用数、元数两两连环求等，约奇弗约偶，最

① 注意：伟烈西学东传、中学西播工作是同时进行的。

后所得结果为定母，算得衍数如前。

定母	1	1	3	4
衍数	12	12	4	3

以各定母满去衍数，各得奇数

定母	1	1	3	4
奇数	1	1	1	3

凡奇数得一者便为乘率。今左下衍是3，乃与本母4用大衍求一术入之，得乘率3。以乘率对乘衍数得泛用数

定母	1	1	3	4
泛用	12	12	4	9。”

下面他几乎一字不漏地英译秦氏书原文直至“乃画少阳单爻”。他还对大衍类其余八题或多或少地作了解题联系。伟烈此举对西方人研究中算看法的影响非常深刻，起到“一石激起千重浪，万紫千红从此春”的作用。

此外伟烈还十分推崇秦氏书中的正负开方术，他熟读宋元数学。秦氏虽未用立天元一布列方程，但事实上已借以写出方程，并予熟练代数变换，伟烈深知此妙在不言中之理。他介绍说：“在排列了诸项以后，未知数用一种被秦九韶称为玲珑开方的方法求得：这种方法欧洲直到最近才为人所知。秦氏著作中有一例将很好地说明这种方法，要求方程$-x^4+1\ 534\ 464x^2-526\ 727\ 677\ 600=0$的根。”(书影图5.3.1之右)

接着他用秦氏记号及其计算方法列出竖式。(书影图5.3.1之左)

接着他不厌其详地阐述原著的算法：“在上面的例子中，有好几项旁边注明实、方、廉等中文名称，每一项的个位数比它上面一项的个位数向左移两个数位。因为根是一个三位数，根的首位数7置于最上方，然后用7乘隅1，乘积加入下廉0，注意到它所在位置，得700。用7乘下廉700，乘积加入上廉1 534 464，仍旧

720 商 *Shang*.　Value of x, the Monad.
—526727577600 實 *Shih*.
—14940217600
14940217600
0 方 *Fang*.
731124800
776249600
747010880
1534464 上廉 *Shang-lien*.
1044464
64464
—1405536
—1461936
0 下廉 *Hia-lien*.
—700
—1400
—2100
—2800
—2820
—1 隅 *Yu*.
—1

—1	0	1534464	0	526727577600(720
	—700	—490000	731124800	511787360000
	—700		45124800	
		1044464		14940217600;
	—1400	—980000	776249600;	14940217600
	—900		—29238720	
		64464		
	—2100	—1470000	747010880	
	—700			
		—1405536;		
	—2800;	—56400		
	—20			
		—1461936		
	—2820			

图 5.3.1

保持列中位置不变，得1 044 464。又用 7 乘此数，乘积加入方 0，得731 124 800，用 7 乘，乘积加入实，得—14 940 217 600。如此等等。求得根的第二位数 2，把所有项向右移动一位，二位，三位，等等，然后重复同样过程。”

伟烈敏锐地看到并向西方人指出：

“在这一运算过程中，读者立即觉察到了霍纳先生最初发表于1819 年的‘解所有次方程’的著名定理，德摩根(De Morgan，1806～1871)评价这定理是‘必使发明人因为发现了被前人忽略了的简单而普遍合适的算法而置身于重要发明家之列’。评价出自这样一

位大家之口[①] 可称殊荣。应该对霍纳的发明权提出质疑，对于欧洲朋友来说，发现来自天朝帝国的、有着十分合理机会获得优先权的竞争者，或许会是一件意想不到的事。在上面的例子中，负数与正数合并，两数都写出，但是由于这个过程的基本原理对于熟悉霍纳方法的人来说都已十分清楚，为避免啰嗦，已给省略，而秦氏书中则对算法过程中每一步都附有细致的文字交待。

作为比较，我们给出同一方程的霍纳解法。"

伟烈还指出这种数值解法更早的作者："应该看到，同一时代的杨辉在他的《详解九章算法》中精确地给出了开平方和开立方的类似法则，称为增乘方。这些法则引自贾宪的著作。"

我们如实引了伟烈论文中关于秦氏大衍术和正负开方术的陈述。显然他详于后者，而略于前者。对前者的介绍过于简短：无大衍求一术的术文和具体运算过程，无大衍总数术的完整解题过程，更谈不上对不两两互素模的连环求等法则。估计当时西方人读了他的论文能够准确理解前者，还有一大段距离。有可能伟烈自己对同余式组解法未熟谙，以致在译文中出现重要遗漏。这就是早期西方人对大衍术引起各种误解的主因。

一百多年后李约瑟(J. Needham 1900～1995 年)《中国科学技术史》(Science and Civilisation in China)第三卷于 1959 年出版。李约瑟指出："在［中国］历史上，不定分析被称为大衍术。公元 8 世纪头十年僧一行在他的《大衍历》中大概就曾应用过不定分析。"他据张敦仁《求一算术》的探索，认为一行"寻求的从上元开始到开元十二年(724 年)所经过的年数，用现代形式表示就是

$$1\,110\,343y \equiv 44\,820 \pmod{60 \times 3\,040}$$

---

① 德摩根剑桥大学博士。1836～1866 年期间任伦敦大学数学系教授，1883 年任第一任伦敦数学会会长，对 19 世纪数学有很大影响的学者。

$$\equiv 49\ 107 \pmod{89\ 773}$$

五个世纪以后，秦九韶在他的《数书九章》中对这个问题作了完整的解释，这正是伟烈亚力之所以能够理解它的原故……《数书九章》卷3，特别是第3题最接近于一行的方法，虽然所用的术语不同，但凭借其中所提供的线索，我们可以了解到一行的方法。”

李约瑟也注意到正负开方问题，他说：“高于三次的数字方程最早出现在1247年前后的著作中，非常明确地处理了如下方程：

$$-x^4+763\ 200x^2-40\ 642\ 560\ 000=0。”$$

何丙郁(现任李约瑟研究所所长)(图版三)在《科学家传记辞典》(C. C. Gilispie Dictionary of Scientific Biography)为秦九韶立传，全文7页。这是秦氏跻身于世界科学家行列的首次传记，传记大致按照钱宝琮(1966a)论文的框架布局。西方人获知秦氏的身世、学术思想所自。文中举了治历演纪题。在解法方面先讲模互素，然后讲不两两互素，只重复了马蒂生的解法，没有阐明连环求等即第四编第四章第一节定理7的内容，在大衍求一术方面的交代是清楚而细致的。他又重新解释当年伟烈亚力几乎逐字逐句英译的蓍卦发微题前半部分。何丙郁的分析能说明其中要害，令人信服。题后还附了明细表，分14项，对照三上义夫、李约瑟论述之后各家学说的异同。何丙郁的论文还肯定秦九韶应用了与其同代人李冶所用的天元术，虽然二者是有异的：秦用算筹从不同位置列出他的代数方程。何文指出秦氏书中有20多个问题，需要数值解方程，具体地说有$4\ 608x^3-300\ 000\ 000\times 30\times 800=0$，$-x^4-1\ 534\ 464x^2-526\ 727\ 577\ 600=0$，$x^{10}-15x^8+72x^6-864x^4-11\ 664x^2-34\ 992=0$等。

何文还为西方介绍艰涩的术语，如玲珑开方，并再一次强调秦氏是数值解任意次方程的发明人。文中介绍了有特色的三斜求积、蕉田求积、遥度圆城、漂田计积和等差数列、线性方程组等问题。何丙郁在1985年还在《中华文史论丛》撰文比较秦九韶与

意大利卡当诺的工作。在其中指出西方世界对秦九韶创造发明的认识和接受过程。他说："伟烈亚力在1852年最先指出秦九韶的数值解高次方程，并和1819年西方的霍纳方法作比较。1912年日本学者三上义夫详细分析《数书九章》里的一个

$$-x^4+763\ 200x^2-4\ 064\ 256\ 000=0$$

四次方程题，并作结论说：'还有谁可以否定霍纳的辉煌方法在比欧洲早六个世纪已经在中国出现了。'可是西方学者还说他们所得资料不足，不能证实这个数学方法是发生在中国。三上义夫曾经替秦九韶辩护，但是对欧洲某些人没有发生作用，因为他的文章是用日文写的；犯了自己看不见就不存在的毛病。所幸的有了两位中国数学史家李俨和钱宝琮对秦九韶《数书九章》作出许多有启发性的研究，这些研究对李约瑟所撰写的《中国科学技术史》第三卷数学篇有一定影响。这部巨著在推广西方对中国数学的认识方面获得很大成功。苏联尤什凯维契稍后作了比较详细的研究。1973年比利时人李倍始的《13世纪中国数学》把秦九韶的计算程序详细排列。从此好像再没有西方学者对秦九韶的高次方程解法发表辩论了。"

二　德　国

英国伟烈亚力的论文"中国科学札记·算术"发表后四年，毕尔那兹基(K. L. Biernatzki)译成德文，于是秦九韶的工作进一步在欧洲传开。这一译本有一些疏忽和错误，例如他漏译了"用大衍求一术入之"。人们就误解秦九韶还是用猜测的方法得出结果。他还混淆"奇数"与"乘率"，又把不定分析问题单纯地理解为"求未知数的方法"。这一译本对欧洲学者也产生负面的影响。

马蒂生(I. Matthissen)自1876年起发表四篇论文论秦氏不定分析问题。其一是"关于中国代数"(致信M. B. 康托尔揭露毕尔那兹基译文之误)，其二是"印度库塔卡与中国孙子算经的等价

性，其三是大衍术，其四是一行所订太衍历中的余数问题。在第一篇论文中他指出秦氏大衍术与高斯《算术探讨》公式一致。他假定 $m=m_1m_2\cdots m_k$，其中 m_1，m_2，…，m_k 两两互素，又假定 $a_i\equiv0\left(\bmod \dfrac{m}{m_i}\right)$，$a_i\equiv1(\bmod mi)$，$(i=1,2,\cdots,k)$，那么 $x=a_1r_1+a_2r_2+\cdots+a_kr_k$ 是

$$x\equiv r_i(\bmod m_i)$$

的解。他介绍秦九韶的著作还研究了模数 m_i 不两两互素的情形。他言之凿凿地说："方法如下，选定正整数 μ_1，μ_2，…，μ_k，使它们两两互素，且每一个 μ_i 能整除 m_k，又 μ_1，μ_2，…，μ_k 的最小公倍数等于 m_1，m_2，…，m_k 的最小公倍数，这样 $x\equiv r_1(\bmod \mu_1)\equiv r_2(\bmod \mu_2)\equiv\cdots\equiv r_k(\bmod \mu_k)$的每一个解同时满足

$$x\equiv r_1(\bmod m_1)\equiv r_2(\bmod m_2)\equiv\cdots\equiv r_k(\bmod m_k)。$$

因此把上面的方法应用到(μ_i)上去，就可以解出原方程，但是只有在每一个 r_i-r_j 之差都能为对应的模数 m_i 和 m_j 的最大公约数整除时，这种做法才是对的。"

必须指出马蒂生从伟烈亚力语焉不详的介绍中能够悟出秦氏书许多重要环节是值得赞许的。但毕竟未接触到原著，因此还存在许多缺陷。

其一，秦氏怎样从 m_i 选定 μ_i，马蒂生一无所知。

其二，秦氏对一次同余式组解必要条件的掌握分寸，对西方人来说也是一个谜。

其三，马蒂生缠误蓍卦发微是唐僧一行提出，并误导这与筑堤工人所用数据有关等等。

数学、数学史家康托尔(M. B. Cantor，1829～1920 年)在 1858 年误用毕尔那兹基的文章发表《关于数学的历史》。书中用现代记号记出蓍卦发微题，由于发生矛盾，他总结说："看来中国人特别在不定分析研究方面比同时有文化的民族较为逊色。"二十多年后

他的四卷本巨著《数学史讲义》(Vorlesungen über Geschichte der Mathematik)卷 1，1880；卷 2，1892；卷 3，1894～1896；卷 4，1908 陆续出版，共达 4000 页。第一卷论古代——上古至公元 13 世纪）数学。在巴比伦、埃及、希腊数学之后讲中国数学，共 30 页。他对儒家特厚，以孔子语录“知之为知之，不知为不知，是知也”（Wissen，dass man es weiss，von denn was man weiss，und wissen，dass man nicht weiss，von denn was man nicht weiss，das ist wahre wissenschaft. ——so soll confucius)开篇。在阐述古代中国传统数学自《九章算术》以来的成绩之后，他接受马蒂生的意见，承认大衍术的正确性，并且赞美它。

特洛夫凯(I. Tropfke，1866～1939)《初等数学史》卷 1 第四章列余数问题，列大衍术 Ta-yen Regel 并意译为德文 Methode der grossen Erweiferung。记述用这种方法解孙子物不知数题，又选载秦氏书卷 2 第 1 题(分粜推原)。

三　日　本

三上义夫(1875～1950)于 1910 年在德国德累斯顿出版《中国和日本数学发展》(The Development of Mathematics in China and Japan)。全书分上、下编共 47 章，前面 21 章讲中国数学史事，第十一章全面介绍秦氏《数书九章》。这是最早的用英文详细介绍的专著，应该说此书的出版，对西方数学界的影响是大的。全章计 16 页，或详或略地讲了以下各题：

古历会积　分粜推原　圆罂测雨　三斜求积　均分梯田

遥度圆城　积木计余　累收库本　尖田求积

三上义夫在本节重点讲两种算法。

其一，他也从孙子物不知数题入手，用大衍术解释。接着他逐字逐句地英译大衍求一术，并且用更相减损术证明此术为真。他陈述了通数如何化为元数，但回避了难以讲清楚的模数连环求等

问题。

其二，他以尖田求积一题为例，把正负开方法用现代数学语言讲深讲透。

川原秀城，《九章算术》及其刘徽注的日文译者，于1984年在《中国思想史研究》(京都大学中国哲学史研究室)著文“又一种《周易》筮法”(もう一つの易筮法)对秦氏书卷1第1题(蓍卦发微)作出解一次同余式说明。此稿又在1987年北京师范大学纪念秦九韶国际会议再次宣读。

四　前苏联

50年代中期尤什凯维契(А. П. Юшкевич，1906～1998)曾发表论文：“中国学者在数学领域内的成就”[①]，对秦氏书也作了赞扬，介绍了尖田求积题中的四次方程解法。他同样大声疾呼地认为英国霍纳只是“重新发明”。他又按照马蒂生的方式解同余式组 $x\equiv2 \pmod 3\equiv3 \pmod 5\equiv2 \pmod 7$。文中说“秦九韶《数书九章》中有孙子问题解法的详细分析”。当归结为解同余式 $35N_1\equiv1 \pmod 3$，$21N_2\equiv1 \pmod 5$，$15N_3\equiv1 \pmod 7$时，他又说：“由是容易(藉试挑)确定 $N_1=2$，$N_2=1$，$N_3=1$。”最后他说：“刚才所讲的方法后来由伟大的德国数学家1801年出版的《算术探讨》充分完备地重新拟出。无疑，高斯对于其遥远的前人在这问题上所留下的著作是毫无所知的。”我们实事求是地指出：

其一，把正负开方术说成天元术是误解。

其二，在秦氏书中并未分析过孙子问题。

其三，秦氏有解一次同余式的有效工具，怎能说是“藉试挑”这种猜测方法呢？

别列兹金娜(Э. И. Березкипа)，《九章算术》俄文译者。钟情中

① 原著俄文，汉文译本载《数学进展》1956年第2期256～278.

算是从 20 世纪 50 年代中叶开始的。她还译述了孙子、张丘建的专著。由于篇幅多、难度大，她没有全面问鼎秦氏书。1980 年她的专著《中国古代数学》由莫斯科科学出版社出版，全书分 5 章，311 页。对国际上关于中国数学史研究情况作了客观分析，在第一章引言中她说："当前研究中国技术史的兴趣与日俱增。范围已不止在中国境内。中国数学史已是国际学术界聚精会神关注的对象。"

她对孙子物不知数题以及秦氏书有关一次同余式组题有选择地详细叙述，她用现代数学语言解释的大衍求一术是无懈可击的。她肯定中国在这些问题上的突破的重要世界意义。同样她赞美了正负开方术和有关数列求和的成就。

在《中国古代数学》各章内或详或略地介绍了《秦九章》中的：

计布圆阵　蓍卦发微　余米推数　三斜求积　斜荡求积

蕉田求积　临台测水　尖田求积　遥测圆城　表望方城

各题，这对俄语世界读者对秦氏书的认识，无疑将带给积极的影响。

五　比　利　时

1973 年在美国麻省理工学院出版了比利时人李倍始(U. Libbrecht)(图版二)用英文写的《数书九章》研究专著。全书计 586 页。分为 23 章。书名《13 世纪中国数学》(Chinese mathematics in the Thirteenth Century)。作者当时在美国留学，本书是他直接从中国古籍钻研后的成果，在 70 年代来说，此书标志着对秦氏书研究的最好水平。(图 5.3.2 是此书封面)

李倍始任比利时鲁文大学数学教授，中国数学史是其重要副业。1982 年第一届中国科学史国际学术会议的东道主、著名的汉学家。此书是他在荷兰莱顿(Leydon)获得享有盛誉的 Cum laude

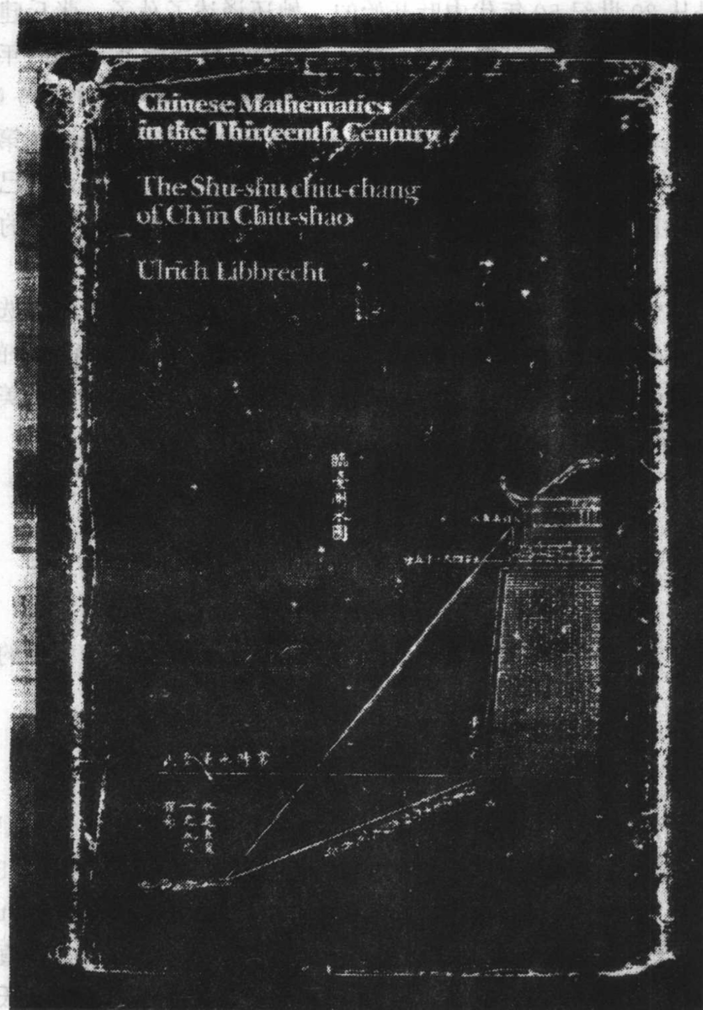

Chinese Mathematics
in the Thirteenth Century
The Shu-shu chiu-chang
of Ch'in Chiu-shao
Ulrich Libbrecht

图 5.3.2

高水平博士论文增订本，是西方世界无敌手的中国数学专著[①]。

李氏书第一编探讨宋元时代数学家以及他们的数学思想、秦九韶的一生、秦氏书版本及历代研究历程。

第二至第五编论述数学内容，对 81 个算题都有接触和分析、讨论，做到主次有节、广征博引，叙说引人入胜。

算术　从围田租亩题用分配比例、互易推本用连比例讨论到卷 18 有关百分比的各题。

几何　李倍始指出《数书九章》的几何学特色

1. 多处使用中国早就熟悉的勾股定理；
2. 相似三角形性质作为解题基础；
3. 平面图形的出入相补原理；
4. 秦氏使用过三种圆周率近似值，但未采用祖冲之的密率。

在讨论几何的第八章就尖田求积、三斜求积、斜荡求积、均分梯田、漂田推积、环田三积以及一些台体、楔形体作为例子条分缕析。其中突出介绍了三斜求积公式。着重阐述中国数学家把几何问题往往作为代数问题处理。对于代数运算及公式一类操作可谓轻车熟路，并认为其中所得方程、法则、算法并不单纯是经验的总结。

“三角”　他以第九章整章讨论与三角有关的内容。他认为由相似直三角形性质形成的重差术到引入角的函数给以特定的如正弦、正切等名称未必是一个进步。但是中国的重差术却缺乏近代三角学所具有的特性。他摘译了测望类问题，并给临台测水题术文提出新的见解。

代数　全书以四章篇幅论秦氏书的代数方面成就。他认为线性方程组解法几乎是完美无缺的。日本关孝和于 1683 年借助于算筹用行列式解线性方程组。谁也不能否认日本数学受到中国数学

① 此书席文 N. Sivin 序第 15 页语

的影响。李倍始认为对关孝和这一成绩中国人也曾助过一臂之力，秦氏书计造军衣题的解法就是行列式法。虽然不能认为秦九韶是克拉美(G. Cramer，1707～1762)方法的先驱者，但是秦法却是盈不足术的一个重要扩张，而且不可能不是行列式。李倍始历举均定劝分、计造石坝、积木计余、方变锐阵、计布圆阵、圆营敷布等题，论述秦氏在等差数列方面的工作。他还以很大篇幅全面论述从贾宪、刘益、杨辉到秦九韶在数值解方程方面的成绩。他认为秦氏虽然不是创始人，但他给出系统而明确的描述，应给以荣誉。又以尖田求积题为例述其解法步骤，对所解方程进行分类。

不定分析 李倍始的工作重点是论述不定分析——解同余式和同余式组，工作做得非常细致。以第五编整编十个章，在中国剩余定理的标题下，首先介绍在中国以外各国家、各地区研究一次同余式组的历史回顾，材料收集得很全面。然后介绍自《九章算术》五家共井题以来直到13世纪在中国不定分析的发展历程。之后论述明、清两代大衍术的工作和成果。又把欧洲人对中国这一领域内的探索经过，也调查得很周到。

他以第十七章整章一字不漏地把秦氏大衍术逐句汉、英对照翻译、解释和举例，处理可谓小心谨慎。然后再奠以大衍术与印度库塔卡、大衍术与造历、大衍术与现代数学等三章。经过如此全面、系统描述，对英语世界读者理解13世纪这部名著，确实带给很大方便，正如何丙郁说："从此好像再没有西方学者对秦九韶的成就发表辩论了。"

像《数书九章》这样重要的典籍，历来已做过不少工作。但是其中仍有空白。李倍始不满足于因循旧说，他对于某些题，特别是那些空白，能善于独立思考提出意见，例如对卷9(复邑修赋)、卷14(计作清台，堂皇程筑)、卷16(圆营敷布，计造军衣)、卷17(互易推本，菽粟互易)、卷18(推计互易，推求本息，推求典本)，国内外都无文献著录探索结果。李氏此举诚难能可贵。此外对

《数书九章》立术或答案有误处，还能发现并正误。

李倍始还提出筹算与笔录的关系。他肯定前者是方便的算具。"秦氏书中为数众多的图式则是运算过程的记录。运算本身是方便的，记录下来倒反是一件谈何容易的事。《数书九章》是《九章算术》的发展。书中81个题难度加大，水平提高，有些内容又是前所未有的。"这段话是他经过充分比较后所得出的正确结论。

在第二十一章李倍始用大量可靠史料对秦氏大衍术的发明，作出客观分析。他由浅入深地对一次同余式组解法提出十种高度。

1. 提出问题，给出特解，未述解法
2. 零散设题，算法限于特殊数据
3. 限于一套数据的某种算法
4. 对特殊例的证明
5. 对两两互素模的一般算法，未解
6. 对两两互素模的一般算法，有解
7. 不两两互素模的一般算法，未证
8. 不两两互素模的一般算法，并提出有解条件
9. 给出5的证明
10. 给出7的证明

从这十个高度的比较，他为数学家的工作质量排了名次(表5.3.1)：

表5.3.1

数学家(书稿)	世纪	十个高度									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
孙子	4～5	√	√								
斐波那契	13	√	√	√							
秦九韶	13	√	√	√		√	√	√	√		
杨辉	13	√	√	√							

续表

数学家(书稿)	世纪	十个高度									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
阿古洛斯	14	√	√								
严恭	14	√									
《慕尼黑手稿》	15	√	√	√	√	?					
玉山若干	15	√	?								
《哥廷根手稿》	16	√	√	√	√	√	√	√			
程大位	16	√	√								
斯库廷	17	√	√	√		√					
贝维立基	17	√	√	√	√	√				√	
欧拉	18	√	√	√	√	√	√			√	
高斯	19	√	√	√	√	√	√			√	
斯蒂尔吉斯	19	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√

斯蒂尔吉斯(T. J. Stieltjes)(1856～1894)，欧拉/高斯，秦九韶，Beveridge(1669 年)，哥廷根抄本(1550 年)，斯库廷(Van Schooten，1657 年)，慕尼黑抄本，斐波那契，杨辉，孙子，阿古洛斯(I. Argyros，1350 年)，程大位，严恭，玉山若干即雷基奥蒙坦(Regiomontanus，1436～1476)。

秦九韶名列第三。李倍始说："考虑到秦九韶所处时代，美国著名科学史家萨顿(G. Sarton)对秦的赞扬并不过分。"

有些学者以为大衍术源出印度库塔卡，李倍始为澄清事实真相，他提出鉴定的科学根据，经过认真比较作出了令人信服的结论："中国大衍术与印度库塔卡没有任何历史渊源关系。"

在第六编又介绍了南宋社会经济背景。

在充分肯定《13 世纪中国数学》是一部有价值的好书的同时，我们还应该指出某些不足之处。

枝节问题有待人们专题整理更正，因限于篇幅，不赘述。这里提较大的问题。

其一，由于中国素无素数概念，而对于不两两互素模的同余式组必须求得与等价的两两互素模组。在此矛盾面前，秦九韶总结出两两连环求等后一整套“约一存一”，“约一乘一”等科学方法(定理 7)。李倍始在解释此法则时却误以为：“如果数 m_1，m_2，…，m_n 不两两互素，则把它们分解为素因数。假设 $L.\ C.\ M.\ (m_1,m_2,\cdots,m_n)=1^p\times2^q\times3^r\times5^s\times\cdots\cdots$。求得正整数 μ_1，μ_2，…，μ_n，且两两互素而 $L.\ C.\ M.\ (m_1,m_2,\cdots,m_n)=\mu_1\mu_2\cdots\mu_n$，$m_i$ 又能整除对应的 μ_i，则 $N\equiv r_i(\mathrm{mod}\ \mu_i)(i=1,2,3,\cdots,n)$ 可代替 $N\equiv r_i(\mathrm{mod}\ m_i)$。”[①] 这非但有违实际时代背景，而且非常遗憾，因此飏弃了秦氏精彩的华章。

其二，李倍始能够对清代学者的有关专著巨细靡遗地钻研，实在难得。这在中国学者也是不易具有的良好条件[②]。某些领会准确，例如对张敦仁《求一算术》在求定母过程中，他译“约分”为 Reducing of the moduli，译“再约”为 Further reduction，后面加一括弧说明是 compensation(补偿)，这就细致地刻画出张氏约一存一、约一乘一的原始思想。对于秦氏书中连环求等问题李倍始以为是“一个约简非互素模数的复杂方法，甚至张敦仁也未必能正确地掌握应用。”(Even Chang Tun-jen was not always able to apply it correctly)[③] 这也是事实。但是很可惜他没有发现时曰醇对此术所作重要解说，以致对《求一术指》的评价也是低调的：“没有什么新内容”(They do not contain anything new)。[④] 又他

---

① 李倍始，1973，p. 357

② 李倍始工作的比利时 Louvain 大学图书馆有丰富的汉文线装书藏书。

③ 见李倍始，1973，p. 306

④ 见李倍始，1973，p. 305

引用赫师慎(L. Van Hee,1873～1931)的说法："(黄宗宪)用欧洲的方法把计算给简化了。"我们已在本编第二章第一节讲过，《求一术通解》是在黄宗宪出使英国五年前出版的，所以算法是他自己的创作，这不容混淆。李倍始对于反乘率也很敏感。但是他对此评价失当，他说：第二个"上角寄数"经常是 1，与"天元一"没有什么不同。秦氏与黄氏的方法之间，没有什么差别……在那时(1874 年)不定分析在欧洲已发展到了高水平，而黄氏的方法在数学史上是没有现实意义的(The second "top corner number", which is always 1,is nothing other than the tien-yuan-i. There is not the slightest difference between the methods of Chin and Huang. At that time (1874) indeterminate analysis had already developed in Europe to such a high level that Huang's method has no real interest for the history of mathematics.)[①] 事实却不然，黄宗宪的创见是解同余式组的新方法，我们已列入数学原理，作为定理 19。在 1996 年还有专题论文论述。[②]

六　法　国

马若安(J. -C. Martzloff)于 1987 年在巴黎出版专著《中国数学史导论》(Histoire des Mathèmatique Chinoises)，十年后 1997 年 S. W. Stephen 作英译，书名 A History of Chinese Mathematics，在德国 Springer-Velag 出版。书中为秦九韶立传(法文本 pp. 144～147)，简要地介绍他的成就，首先提到大衍术及其有关十个算题：大衍术是为了建立年序学的计算方法，并指出这种算法与 500 年之后德国高斯《算术探讨》的结果是一致的。在书中还指出秦氏书中出现西方所谓海伦公式以求三角形面积以及

① 见李倍始，1973 p. 309

② 王翼勋，1996，pp. 40～47

数值解高次方程的重要贡献。

七　美　国

卡约黎(F. Cajori，1859～1930)《数学史》所述秦九韶的工作，因受到材料来源影响与实际有很大距离。斯密士(D. E. Smith，1860～1944年)两卷本《数学史》(1923～1925)只字未提秦氏书。狄克逊(L. E. Dickson，1874～1954年)写了三卷巨著《数论史》(1919～1923)，其第二卷论丢番图分析，嗣第二章论一次不定方程和同余式，其中标题为“中国余数问题”讲了8页。中国材料很少，但有力地陈述当年马蒂生坚持秦氏大衍术与高斯《算术探讨》有关内容一致。

著名科学史家、哈佛大学首任科学史教授萨顿(G. Sarton)出版《科学史引论》(Introduction to the History of Science. 卷1，1927；卷2，1931；卷3，1947)，在卷2数学与天文学部分他为秦九韶立传：秦氏身世，其主要工作——不定分析和高次方程。把秦的工作等同于哈里奥、鲁菲尼和霍纳。萨顿称誉秦九韶是“他的民族、他所处时代以至一切时期的最伟大数学家之一。”(One of the greatest mathematicians of his race, of his time, and indeed of all times.)

从第四编对秦氏工作的充分分析，又从本编第一章的全面比较，我们认为萨顿对秦九韶的赞美是恰如其分的。

第 六 编

南宋时代 杨辉

我们已在第三编开头提到南宋数学界两颗靓丽的明星，秦九韶其人、其书已分别在第三至第五编陈述。第六编述杨辉的工作。

第一章 杨辉及其数学专著

杨辉字谦光，钱塘(今浙江省杭州市)人。他的著作留传至今种类很多、方面广、且有特色。他的生平《宋史》无传。所著署有时间的专著都集中在两段时间：13世纪60年代初期和70年代中期，因此可判断他生活在南宋之末，直至宋亡(1279年)。他是秦九韶的同代人，但略后于秦。两人曾生活在同一时间、同住南宋京都临安，但是所著书风格迥异，互不征引，真令人啧啧称奇。

据陈几先序《日用算法》："钱塘杨辉以廉饬[①]己，以儒饰[②]吏。吐胸中之灵机，续前贤之奥旨。从奇而偶，由晦而彰。内可以知外，表可以知里。其用心岂为运牙筹计金谷而已哉。"知杨辉曾做过地方官员。

在《田亩比类乘除捷法》卷上丘田条说："台州量田图有牛角

①、②饬、饰都作整治讲。

田，用弧矢四法，此说方是。”查宋嘉定修《赤城志》[①]卷13“版籍门”记“嘉定十五年(1222年)黄岩县经界田九十三万九千一百六十二亩一角三十步”。从两种文献比较，杨辉可能在台州工作有年。

又《续古摘奇算法》卷上在正解法中记：“辉伏睹京城现用官斛，号杭州百合[②]，浙郡一体行用。”又说“况栲栳藤斗，循习用之。”卷下说：“辉因到姑苏，有人求三七衰分，继答之。”由此可知，他的行踪到过嘉兴、苏州一带。栲栳今通称笆斗，藤制量具。至今嘉兴方言称为“克老”。

在杨辉遗书中可知他与陈几先、史仲荣、刘碧涧、丘虚谷等人过从甚密，但四人行状也均不详。

从文献统计杨辉先后著书五种共二十一卷，它们是

(一)《详解九章算法》十二卷(1261年)

(二)《日用算法》三卷(1262年)

(三)《乘除通变算宝》三卷(1274年)

(四)《田亩比类乘除捷法》二卷(1275年)

(五)《续古摘奇算法》二卷(1275年)

可把前两种称为前期著作，后三种称为后期著作。

第一节　前期著作

一　《详解九章算法》

本书是杨辉为《九章算术》及其刘徽、李淳风注所作进一步

---

① 台州宋时名赤城。

② 十合一升，百合十升，即一斗。

细草、图、说，是遗留至今第二部九章注(残本)[1]。难能可贵的是：

其一，本书保存了《九章》刘徽序，而经文主要仅存商功、均输、盈不足、方程、勾股五章。南宋《九章算术》木刻本缺刘序，经文则仅存方田、粟米、衰分、少广、商功，这两种版本汇为一起才成全璧。本书所收五章，题也有缺漏。

其二，本书为各题补插图、补解释、补比类、推广《九章》术文。

其三，本书重为分类，并述北宋以来学者新见解，合称纂类。

全书十二卷，原著已佚。明初编辑《永乐大典》时曾分条抄入算法部。1842年上海郁松年刊刻《宜稼堂丛书》时，按所能收集的条目辑为《详解九章算法》，连贯编排，不分章，次序已凌乱，并把纂类附在书末作为附录。

据近人严敦杰1966年研究，杨辉原著十二卷应复原为：

卷首　全书插图　据《乘除通变算宝》卷上说："《九章二百四十六问…列图于卷首。" 又据《永乐大典》存本书残章少广云："立草在《九章》卷首布置图内。"

卷一　对基本运算的说明　《乘除通变算宝》卷上："《详解[九章]算法》第一卷有乘除，立问一十三题，专说乘除"，可以证明。

卷二　方田　全卷无存。

卷三　粟米　今《永乐大典》卷16 343算法十四尚可辑出3题，余无存。

卷四　衰分　在《永乐大典》卷16 343算法十四中尚可辑出1题，余全佚。

卷五　少广　在《永乐大典》卷16 344算法十五中尚可辑出整

---

[1] 众信杨辉《详解九章算法》是在贾宪《黄帝九章算经细草》的基础上加工提炼的力作。

卷，杨辉还补了开四次方 1 题。贾宪增乘方法都在此卷。又《田亩比类乘除捷法》卷下也说："开方带从段数草图活法，详载《九章》少广。"

卷六　商功　仅存 13 题，缺 15 题。

卷七　均输　存 19 题，缺 1 题。

卷八　盈不足　整卷全。

卷九　方程　存 16 题，缺 4 题。

卷十　勾股　整卷全。

卷末　纂类　整卷全。

杨辉所作详解有四种形式：

①"解题"是对九章原术的通俗易晓的解释。

②"比类"是对九章原术的比喻补充和推广，也包括重新分类。

③"草"是从术文到答数所作计算过程的描述。

④"法"是新添的术文。

二　《日用算法》

原著久佚。

从《永乐大典·诸家算法》存本书序文："夫黄帝九章乃法算之总经也。辉见其机深法简，尝为详注。有客谕曰：谓无启蒙日用，为初学者病之。今首以乘除加减为法，称、斗、尺、田为问，编诗括十三首，立图草六十六问，用法必载源流，命题须责实有。分上下卷，首少补日用之万一，亦助启蒙之观览云耳。景定壬戌季夏钱塘杨辉谨序。"

严敦杰于 1966 年据今存此书题问，推定《日用算法》内容：

卷上

　释九九、八十一句

　乘除加减

释斤平数 今存1题[1]
释斗斛数 今存8题
释丈尺数
释田亩数
卷下
异乘同除 今存1题
衰分、仓窖、垛积、修筑题

第二节 后期著作

杨辉在13世纪70年代中期的数学专著三种通称《杨辉算法》，其中

一 《乘除通变算宝》

全书三卷

卷上 算法通变本末 一开头有"习算纲目"为杨辉对数学教育的理论性论说。之后为与商业有关的乘除法算题。

卷中 乘除通变算宝 续论商业有关的乘除法算题。结合论求一、身前因等筹算速算法。

卷下 法算取用本末 系统论述1～300的筹算乘除速算法。每隔一段插入与商业有关的算题。

可以认为这部书是《日用算法》的继续与发展。

二 《田亩比类乘除捷法》

全书二卷

卷上 是《详解九章算法》第二章的继续和发展，也是《九

---

① 见第559～560页书影。

章算术·方田》的摘编和补习。本卷含长田形、圭田、斜田、圆田、环田、宛田和丘田。从面积计算、类比与乘法有关的商业计算算题。此外又把原来是连续量的面积问题类比到离散的圭垛、梯形垛、方箭、圆箭等数列求和问题。

卷下　继续讨论图形面积问题，而是反过来从已给图形的面积反算某些线段。所论图形有直线形也有圆及其部分。从类似于《九章算术·少广》开头十一个题那样，已给长方形面积、一边长，求另一边长。又引入其先辈刘益《议古根源》，选论其中23个题。一般都用代数方法研究几何问题。和秦九韶类似，建立方程（有二次、有四次、系数含负数）数值解方程，有具体计算过程，求出正根。

上、下卷都附很能说明问题的插图。

三　《续古摘奇算法》

全书二卷，体例与其他四部专著不一样，是杨辉的数学随笔，很有特色。

卷上含：

纵横图（幻方和异形幻圆）

剪管术、三女归盟、六十甲子纳音、求年内日甲、地支逢宿、甲子逢宿（一次同余式（组））

倍息一月（数列求和）

正斛法、量仓法（计量）

诸田不求积步、竟答亩数（面积速算）

开河定日、共买纱绢、买果求停（分配比例）

卷下含：

率分身（雉兔同笼、百鸡问题等二元、三元问题，杨辉称元为率）

互换（各种比例问题）

变换活法（乘除速算）

合分入互换(妇人盈杯等合作问题)

衰分(分配比例)

盈不足(双假设法)

方圆论(方、圆等长度、面积计算)

海岛题解(以《孙子算经》有关问题比照解释和证明《海岛算经》第1题)

第三节 杨辉数学专著版本及其流传

杨辉所著算书五种，据明程大位《算法统宗》卷13算经源流说：“[宋]嘉定、咸淳、德祐等年又刊各书：《详解黄帝九章》、《详解日用算法》、《乘除通变本末》、《续古摘奇算法》。”清陆心源《皕宋楼藏书志》卷48称：“《田亩比类乘除捷法》二卷……”可见在宋代已有木刻本传世。《杨辉算法》有明代洪武古杭勤德堂木刻本。

明成祖朱棣编纂《永乐大典》(1403～1406)。杨辉所著书被分散抄入事韵第16 329～16 364卷，大典迭遭大劫，劫余第16 343至16 344卷中竟存杨氏专著数十页，弥足珍贵。际此盛世，《大系》第五卷出版，我们选录其中片断四则书影，志念。

一　《日用算法》片断

楊輝日用算法：菽每石七百八十五文，麥每石一貫一百六十文。今用錢二百九十七貫，糴到菽麥共三百石，問本各幾何。

答曰：菽一百三十六石　麥一百六十四石

解題：菽麥爲問，分身爲法。分率術曰：共物爲實，以賤率乘之。供爲賤價以減總錢，餘爲貴實。貴物所多之數，貴賤二率相減，餘爲法，求見一價所多之差除之，先見貴物。以貴物減總數，餘爲賤也。

麥百六十四石

菽百三十六石

一貫一百六十文麥價

積一百二十八貫七百四十文

積一百六貫七百六十文

七百八十五文菽價

多菽三百七十五

積六十一貫五百

菽麥共三百石，共錢二百九十七貫文。

草曰：共物爲實，菽麥共三百石，以賤率乘之。菽賤每石七百八十五，麥乘得二百三十五貫五百文，以減總錢二百九十七貫，餘爲貴實。六十一貫五百。貴賤二率相減餘爲法。菽石價七百八十五，麥石價一貫一百六十，相減餘三百七十五爲法，除之。以法除六十一貫五百文，先得貴物麥一百六十四石。以貴物麥也減總數菽麥總數，餘爲賤實

置上商二百名曰方法二百乃命上商除實四萬餘三萬一千八百二十四。二乘方法，得四百步，一退爲廉四百，下法再退，百下均之，於上商之次，續商第二位得數六十，共爲二百六十，廉法之次，照上商置隅六十，以廉隅二法皆命上商除實二萬七千六百，餘四千二百二十四。二乘隅法併於廉，得五百二十，一退五百二十，下法再退，於末位下定。下入於上商置第三位得數二百六十之次，商置八，下法之上亦置八爲隅除實適盡合問。

平方圖

二百六十八

自方二百名
方法積四萬

一廉長二百闊六十積一萬二千

一廉長二百六十闊八步積二千八十

隅自方六十積三千六百

積六十四

二　《九章算术·少广章·开方》杨辉解题

楊輝詳解解題　圓三象天。方四象地。圓居方四分之三。以積求方
則求除之妙用。考究源流。莫不由此。法曰。置積爲實。別置一筭名曰下
法。原下之法。於實數之下。自末位常超一位。初求時過一位。今超一位
約實至首位盡而止。一下定一。一百下定十。一萬下定百。百萬下定千。於
實上商置第一位得數。以方法一一。二二。三三。四四。五五。六六。七七。八
八。九九之數爲商。商本體實數。下法之上。亦置上商數。即原求法數也
名曰方法。於本積內。去其一方。命上商除實。法實相呼。以此積數二乘
方法一退爲廉。一方帶兩直。以助其狀如廉。故二乘退位。下法再退。下
法即定位之筭。再退重定。於上商之次。續商第二位得數。與上意同。於
廉法之次。照上商置隅。一方帶二廉。正缺一角。自即名隅。以方廉二法
亦原求之法也。皆命上商除實。二乘隅法。併入廉法一退。倍隅入廉。作
一大方。以求次位得數。下法再退。前意商置第三位得數。下法之上。照
上商置隅。以廉隅二法。皆命上商除實。第二位解意同。得平方一面之
數。更有不盡之數。依第三位體而倍隅入廉退位商之。　草曰。置積爲
實。七萬一千八百二十四步。別置一筭爲下法。原下之法。從末常超一
位約實。百下約十。萬下約百。實上商置第一位得數。二百。下法之上。亦

商第二位

以上商得六十，以乘下法为隅，命上商除实。

作法求第三位

以上商得数，乘下法增入廉隅

作法求第三位

廉法一退，下法再退。

商第三位

以上商乘下法为隅，并入廉，皆命上商除实尽。

增乘開平方法。以商數乘下法，遞增求之。商第一位，上商得數以乘下法為乘方。命上商除實。上商得數以乘下法入乘方。一退為廉。下法再退。商第二位，商得數以乘下法為隅。命上商除實訖，以上商得數乘下法入隅，皆名曰廉。一退，下法再退，以求第三位商數。商第三位用法如第二位求之。

增乘開平方圖。以圖點法，下用可知。

布位定位

四步　二十　八百　一千　七萬

𝍦𝍩𝍧𝍱𝍣

列置一筭名曰下法，定一 |

超一位定十

超一、位定百

商第一位

𝍡 隅

二相二十七萬內除四萬

𝍢𝍩𝍧𝍱𝍣

𝍡 上商乘下法得二百名方

| 下法定百

上商得數以乘下法為平方，命上商除實。

作法求第二位

𝍡

𝍢𝍩𝍧𝍱𝍣

上商乘下法增入方

| 下法

以上商得二乘下法增入平方

作法求第二位

𝍡

𝍢𝍩𝍧𝍱𝍣

𝍫 廉

一退

| 法

方法一退為廉，下法再退。

六　十五　二十五爲數　十　加五爲十五　四加一爲五

求第五位

六　十五　二十　十五五爲　五加一爲六

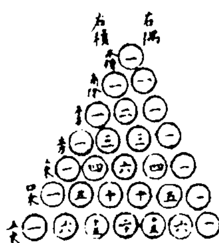
上廉　二廉　三廉　四廉　下廉

楊輝纂類賈憲立成釋鎖平方法曰置積爲實別置一筭名曰下法於實數之下自末位常超一位約實至首位盡而止實上商至第一位得數下法之上亦置上商名曰方法命上商除實二乘方法一退爲廉下法再退於上商之次積商第二位得數於廉法之次照上商置隅以方廉二法皆命上商除實二乘隅法併入廉法一退下法再退商置第三位得數下法之上照上商置隅以廉隅二法皆命上商除實盡得平方一面之數積有分子者以分母乘其全入內子入以分母再二次自乘乘之　積圓者以圓法十二乘之　開平方求積如分母自乘而一　增乘開平方法曰第一位上商得數以乘下法爲平方命上商除實上商得數以乘下法入平方一退爲廉　第二位再商得數以乘下法爲隅命上商除實訖以上商得數乘下法入隅皆名曰廉一退下法再退以求第三位商數　第三位如第二位用法求之

三　贾宪“开方作法本源”、“立成释锁平方法”、“增乘开平方法”杨辉详解

楊輝詳解開方作法本源（出釋鎖算書，賈憲用此術）

原本空



左衺乃積數，右衺乃隅算，中藏者皆廉，以廉乘商方，命實而除之。

增乘方求廉法草曰：釋鎖求廉本源，列所開方數，如前五乘方，列五位，隅算在外，以隅算一自下增入前位，至首位而止。首位得六，第二位得五，第三位得四，第四位得三，下一位得二。復以隅算如前陞增，遞低一位求之。

求第二位　六　舊數　五加十而止　四加六為十　三加三為六　二加一為三

求第三位　六　十五　舊數　十加十而止　六加四為十　三加一為四

求第四位

四百下廉一百二十下法定一又於上商之次續商置得數第二位四以乘下法入廉一百二十四乘下廉入上廉共五十八百九十六乘上廉併為立方一十三萬一千五百八十四命上商除實盡得三乘方二面之數如三位立方依第二位取用　又術曰兩度開平方開第一次千方得一千一百五十六開第二次千方得三十四

永樂大典卷之一萬六千三百四十四

四　《九章算术·少广章》杨辉补开四次方题

楊輝詳解積一百三十三萬六千三百三十六尺。問爲三乘方幾何。

答曰：三十四尺。

解題：三度相乘，其狀臨直，遞增三乘開方法。草曰：上商得數，下法增爲立方，除實，即原來意。置積爲實，別置一算名曰下法。於實末常超三位約實，一乘超一位，三乘超三位，萬下定實。上商得數三十，乘下法生下廉三十，乘下廉生上廉九百，乘上廉生立方二萬七千，命上商除實，餘五十二萬六千三百三十六，作法商第二位得數，以上商乘下法入下廉共六十，乘下廉入上廉共二千七百，乘上廉入方共一十萬八千。又乘下法入下廉共九十，乘下廉入上廉共五千四百。又乘下法入下廉共一百二十，方一，上廉二，下廉三，下法四，退：方一十萬八千，上廉五十

清罗士琳作《续畴人传》时，论杨辉，说："辉所著书，载于［明］文渊阁书目，阮相国(元)访之三十年，通人学士俱未之见。嘉庆庚午(1810年)相国以少詹事在文颖阁总阅全唐文。于《永乐大典》中抄得杨辉摘奇及议古等百余番。嗣督漕淮安，嘱江上舍、郑堂藩排比整齐之。然掇拾残剩之余，究非全帙也。"可见阮元从《永乐大典》录出杨氏书首尾不全，都是散帙。

鲍廷傅于乾隆丙申(1776年)刊《知不足斋丛书》，其第二十七集有《续古摘奇算法》卷下。

"嘉庆甲戌(1814年)夏，黄丕烈于同郡故家得杨辉算法，皆散叶，且颠倒错乱殊甚。暇日招李锐至百宋一廛相与验其文义，排比整齐，得书六卷，首尾序目无缺欠。亟命工装成一巨册，椟而藏之。由是识与不识，咸知为稀世宝矣。"说见李锐《杨辉算法·跋》。李锐所得六卷即第二节所说后期著作三种六卷，内缺《续古摘奇算法》卷上。

道光壬寅(1842年)郁松年刻毛岳生家藏石研斋抄本(残)《详解九章算法》，又续刻《杨辉算法》六卷。并由宋景昌校勘，别作《札记》列书后。与秦九韶《数书九章》并列入《宜稼堂丛书》。(图版五)

上海商务印书馆于1922年影印《宜稼堂丛书》本，30年代排印《丛书集成初编》时又据宜稼堂本于1936年出版《详解九章算法》及宋景昌《札记》铅字本。1937年，1939年分别出版《算法通变算宝》、《田亩比类乘除捷法》(附《续古摘奇算法》缺卷上)，陈敬衡、殷师竹校对。

台北商务印书馆于1980年出版《宛委别藏丛书》收杨辉算法，其中《续古摘奇算法》也缺卷上。

《杨辉算法》三种曾东传朝鲜。于宣德癸丑(1433年)翻刊明洪武古杭勤德堂本。在《田亩比类乘除捷法》中有跋，说："观察使臣辛引孙，引奉内旨，嘱府尹臣金乙辛，刊官李好信命工锓梓。"

又重刊朱世杰《算学启蒙》的金始振在1660年所作序中也提到《杨辉算法》，他说，“岁丁酉(1657年)居忧抱病无外事，适得抄本杨辉算书于今金沟县令郑君浠。”

日本石黑信由(1760～1836)《算法书籍目录》载：“大明宣德八年宋杨辉算法三册。本书为关孝和所传写，时宽文元年次辛丑(1661)。”三上义夫于1917年将此足本《杨辉算法》抄寄李俨，今藏北京中国科学院自然科学史研究所。

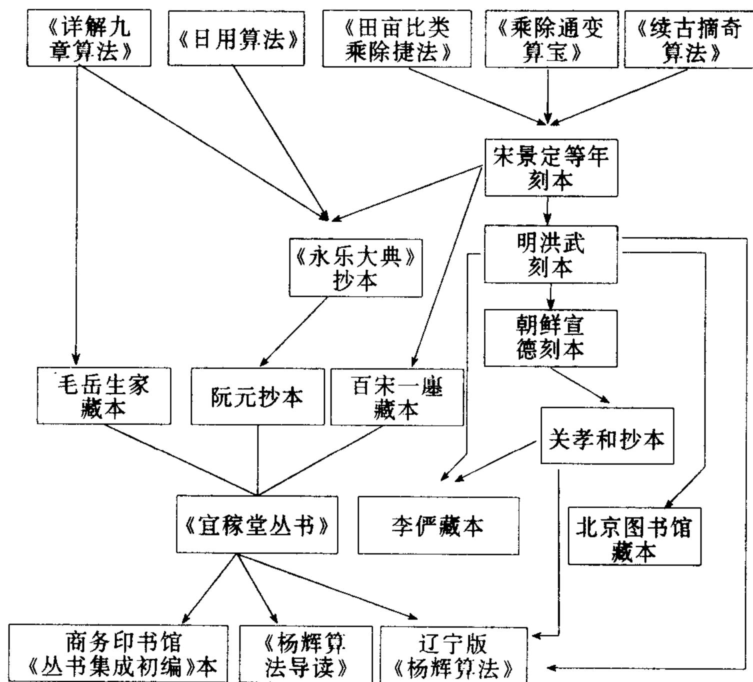
北京图书馆藏有朝鲜癸丑刊本《杨辉算法》，是杨守敬旅日时收购捐赠者。

综上所说，杨辉后期著作即《杨辉算法》三种迭经宋、明刊刻，且有域外翻刊本；而其前期著作中的《日用算法》向无刻本，《详解九章算法》这样力作曾雕版行世，后殆佚。郁松年在此书宋景昌《札记·序》中说：“是书为毛君生甫(岳生)家藏本，每叶俱有石研斋抄本五字。卷末有石研斋秦氏印，未知秦氏为何许人也。”石研斋抄本虽为残本，但系海内外惟一孤本，凤毛麟角，其珍贵可知。此外所幸劫余的《永乐大典》尚存有两书散条可以辑录，其中特别重要的文献如贾宪的增乘开方术和开方作方本源图俱出于此。

1997年湖北教育出版社出版《杨辉算法导读》，郭熙汉著；辽宁教育出版社出版《杨辉算法》，孙宏安著，对杨辉后期著作都作细致今释。为《杨辉算法》足本，填补了1842年郁松年《宜稼堂丛书》本《杨辉算法》的空白。

杨辉算书流传及版本流程见表6.1.1。

表 6.1.1　七百多年来杨辉数学专著流传及版本流程表



第四节　在杨辉数学专著所见南宋社会

杨辉所著书深入民间生活、生产，从此可以了解到南宋末年社会情况，分二段陈述。

一　计　量

长度

在《续古摘奇算法》卷上有尺样，虽经辗转影摹，但较之照

相缩放，失真度小，经测量宋1尺＝31.5厘米，与出土宋尺都可以作为宋一尺实长计量参考。在长度进制上与《秦九章》无分歧，但对纺织品匹的计量有出入，在《乘除通变算宝》上、中、下三卷作4丈6尺（一见），4丈8尺（二见），4丈9尺（二见），5丈1尺，5丈4尺各一见。又田亩进制无角，亩下十进，如三亩七分四厘五毫二丝八忽(《续古摘奇算法》卷下)。

量制

在《续古摘奇算法》中有专节正斛法，论其事。

“夏侯阳仓曹云：古者凿地，方一尺，深一尺六寸二分，受粟一斛。至汉王莽改铸铜斛，用深一尺九寸二分。至宋元嘉二年(425年)徐受重铸，用二尺三寸九分。至梁大同元年(535年)甄鸾校之，用二尺九寸二分。然时异事变，斗尺不同。以古说今，临时较定，始可引用。若欲审之，以掘地作穴，方广三尺已下。以今时斗，量米一斛，置诸穴中。概令平满，临时增减，取米适平，然后出之。径量以知深浅，乃可为斛法定数。辉伏睹京城(临安，今杭州市)现用官斗，号杭州百合，浙郡一体行用。未较积尺积寸者，盖寸势上宽下狭，维板凸突，又有提梁，难于取用。况栲栳藤斗，循习为之。今将官升与市尺较证，少补日用万一。

每立方三寸，受粟一升。每方五寸，深五寸四分，受粟五升。每方一方，深二寸七分，受粟一斗。每方一尺，深一尺受粟五斗……每方一尺，深二尺七寸，受粟一石。”

上引杨辉正斛法，与古《九章》委粟术所定标准：“程粟一斛，积二尺七寸。刘徽注：二尺七寸者，谓方一尺，深二尺七寸，凡积二千七百寸”同义。从杨辉所附尺样及出土宋尺折算杭州百合[①]，即杨辉所说官斗应合今

$$31.5\times31.5\times31.5\times1\times1\times2.7=84\ 390.86\text{立方厘米}$$

① 这里的百合应作斛理解。

宋时量具至今未见出土文物，沈括《梦溪笔谈》谈宋时标准量具二次，又《永乐大典》记嘉定九年(1216 年)安徽宁国府文思院斛宋量具，俱可作为当时实物含容积参考①。

二　经　济

物价

粮食　菽(豆)石价 785 文　麦石价1 160文(《日用算法》)

水果《续古摘奇算法》卷下有水果每个价：桃 9 文，柑 7 文，林檎 5 文，桔 3 文，李 2 文。

纺织品　每匹价

绫 8 贯　罗 7 贯 776 文(《续古摘奇算法》卷下)，绢 3 贯 360 文，2 贯 330 文(《田亩比类乘除捷法》卷上)，葛 3 贯 750 文，布 2 贯 500 文(《乘除通变算宝》卷下)。

金属

银　每两 3 贯 400 文(《田亩比类乘除捷法》卷上)，又每两 5 贯 700 文(《乘除通变算宝》卷中)，7 贯 360 文，14 贯 285 文(《乘除通变算宝》卷上)。

铜每斤 9 文，锡每斤 7 文(《乘除通变算宝》)。

田亩

每亩 20 贯(《乘除通变算宝》卷上)，又 10 贯 600 文(《乘除通变算宝》卷中)。

工资

工匠每工(工作日)支米 3 升 6 合(《田亩乘除比类捷法》卷上)。

---

① 参见本《大系》第四卷第 477 页。

税收

杨辉算书多次提到“官收税钱每贯扣纳头子钱[①] 56 文(《详解九章算法》,《乘除通变算宝》)。

展省

在第三编第三章第四节经济已介绍《秦九章》记载南宋币制混乱，官方有所谓展省之制，770 文当 1 贯。在杨辉算书中也一再记述这一官方创导的弄虚作假行为。例如：“足钱九十六贯二百五十文。问：伸作七十七陌几何？”(《乘除通变算宝》卷中)除此以外量制上有省斛：8 斗 3 升作 1 斛。如：“求斛米二百二十九石八升，问：为八斗三升法斛几何？(答数 276 石)(《乘除通变算宝》卷中)在衡制上也有省秤：1 斤作 1 斤 4 两。如：“一百一十二斤足秤，问为省秤几何？(答数：140 斤)(《日用算法》)南宋币制、计量制度的混乱，地区与地区之间差异也大，这些非常现象产生了许多太平盛世难见的应用题。

---

① 在杨辉算书中一再出现“头子钱”。这是宋时按一定比例在法定租赋外加收或在官府出纳时抽取的税钱，为一种附加税。

第二章 算 术

第一节 中国数码字

杨辉与秦九韶的数学活动都在 13 世纪中叶南宋京城及其周围。值得引起我们注意的是两人记数法不一致。明人程大位记法接近秦九韶。清人记法又与杨辉、李冶一致。杨辉书确流传日本，秦九韶专著是否传日本，仅是猜测而已。但江户时代和算都用杨辉式甚至与李冶、清人相同数码字。现列表对照，以供查考。

表 6.2.1

纵 横	纵式数码字										横式数码字									
数 字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
秦九韶	〇	𝍠	𝍡	𝍢	×	〇̄	𝍥	𝍦	𝍧	×̄	〇	𝍩	𝍪	𝍫	×	〇̍	𝍮	𝍯	𝍰	×̍
杨 辉	〇或空	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	伍	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨	〇	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	伍	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
李 冶	〇	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨	〇	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
程大位	〇	𝍠	𝍡	𝍢	×	Ꮾ	𝍮	𝍯	𝍰	文	〇	𝍩	𝍪	𝍫	×	Ꮾ	𝍮	𝍯	𝍰	⊥×

第二节 口 诀

大约在元末明初,珠算取代筹算逐渐成为我国传统计算工具。珠算之所以能够成为良好算具，原因有二：其一，算盘数位固定，而各位数值以算珠多少计数，上下拨动非常灵活，优于算筹。其二，运算有相应口诀，特别是除法，适合汉语单音节发音，一音一词，初学者只要把口诀背熟，琅琅上口，得心应手，熟能生巧，

能快速得到准确结果。至今仍是商业计算，小学数学教育三算必不可少的算具。

杨辉在《乘除通变算宝》中叙述他的“九归新括”，是后来珠算归除口诀的先声。杨辉原作理论上正确，但不押韵，不顺口。经过几代人的努力，从下表追迹朱世杰《算学启蒙》(1299年)、程大位《算法统宗》(1592年)有关工作，其脉络很清楚。当然杨辉所造口诀是筹算速算(除法)所需(表6.2.2)。

在“足斛米二百二十九石八升，问：为八斗三升法斛几何”一题中，理应作除以83的运算。杨辉在术中说：“用八十三归。从实上位求起，言十次身，言知退位布之。”下有除法十句歌括：“见一下十七，见二下三十四，见三下五十一，见四下六十八，见四一五作五，退八十三成百。见五下一百二，见六下百十九，见七下百三十六，见八下百五十一。”对照今珠算八归三除飞归口诀，当知其远源所自：“见一下加一十七，见四下加六十八，见七加一下三六，见六加一下一九，见三下加五十一，见二下加三十四，八十三除一飞归。”

在“葛布二百三十七匹，每匹三贯七百五十文。问：钱几何”一题中，“术曰：置布匹数，以斤求两价念法，从尾损之。”杨辉斤求两法则为：“[①]一求尅退六二五，二求尅退一二五，三求一八七五，四求尅退二十五，五求三一二五是，六求除退三七五，七求四三七五退，八求就身退除五。”这是后世斤求两的最早版本：“一退、六二五，二、一二五，三、一八七五，四、二五，五、三一二五，六、三七五，七、四三七五，八、五，九、五六二五，十、六二五，十一、六八七五，十二、七五，十三、八一二五，十四、八七五，十五、九三七五。”古制一斤16两，用斤求两歌诀可以化连除、连乘为一次乘法。在商业数学中曾起很大作用。

① 用斤求两口诀变换 $237\times375=237\times(1\,000-625)$。

表 6.2.2

杨辉《乘除通变算宝:九归新括》	朱世杰《算学启蒙·总括·九归除法》	程大位《算法统宗·九归歌》
二归:见一作五。	二一添作五,逢二进成十。	二一添作五,逢二进一十,逢四进二十,逢六进三十,逢八进四十。
三归:见一下二十一,遇三成十。	三一三十一,三二六十二,逢三进成十。	三一三十一,三二六十二,逢三进一十,逢六进二十,逢九进三十。
四归:见一下十二,见二作五,遇四成十。	四一二十二,四二添作五,四三七十二,逢四进成十。	四一二十二,四二添作五,四三七十二,逢四进一十,逢八进二十。
五归:见一作二,见二作四,遇五成十。	五归添一倍,逢五进成十。	五一倍作二,五二倍作四,五三倍作六,五四倍作八,逢五进一十。
六归:见一下四,见二下十二,见三作五,遇六成十。	六一下加四,六二三十二,六三添作五,六四六十四,六五八十五,逢六进成十。	六一下加四,六二三十二,六三添作五,六四六十四,六五八十二,逢六进一十。
七归:见一下三,见二下六,见三下十二,遇七成十。	七一下加三,七二下加六,七三四十二,七四五十五,七五七十一,七六八十四,逢七进成十。	七一下加三,七二下加六,七三四十二,七四五十五,七五七十一,七六八十四,逢七进一十。
八归:见一下二,见二下四,见三下六,见四作五,遇八成十。	八一下加二,八二下加四,八三下加六,八四添作五,八五六十二,八六七十四,逢八进成十。	八一下加二,八二下加四,八五下加六,八四添作五,八五六十二,八六七十四,八七八十六,逢八进一十。
九归:见一下一,见二下二,见三下三,见四下四,遇九成十。	九归随身下,逢九进成十。	九一下加一,九二下加二,九三下加三,九四下加四,九五下加五,九六下加六,九七下加七,九八下加八,逢九进一十。

第三节　速　　算

按照速算经验，近代学者总结有如下原则：

①一个数加上(减去、乘以或除以)1，10，10^2，…10的幂比加上(减去、乘以或除以)其他数要快。

②一个数加上(减去、乘以或除以)1，2，3前面三个数字比加上(减去、乘以或除以)其他数字要快。

③加上(减去、乘以或除以)有n个数位的数比加上(减去、乘以或除以)有n个数位以上的数要快。

④用n个个位数分别去乘(除)一个数，比用这n个个位数乘积去乘(除)要快。[①]

如果能综合运用这些原则，效果更好。

杨辉在《乘除通变算宝》中提出五种速算法。至今有现实意义，现选录如下

一　相乘六法

单因

“细物一十二斤半、税一，今有二千七百四十六斤。问：税几何?”

“术曰：八因以代一二五除也。”

这是说　$2\,746\div12.5=2\,746\div100\times8$

重因

“绢二百七十四匹，每匹四十八尺，问：共几尺?”

“草曰：置绢数六因之，八因之。”

此即　$274\times48=274\times6\times8$

---

① 对筹算说，更见效果。

身前因

乘数的个位数是 1，就用这种算法。

“二百三十二斤，每斤三十一文。问：钱几何?”

“草曰：置斤数为身，于身前三因之。”

这是指先记下 232，以 3 乘此数，向前移一位，并入此数，就得到结果：

```
   2 3 2
 6 9 6
 7 1 9 2
```

损乘

“九乘者损一，八乘者损二，七乘者损三。”

“官收钱二万六千四百一十贯，每贯除头子钱五十六文，问：共得若干?”

“草曰：五十六，本是七因、八因，今易为损法。当先用“损三”以代七因，“损二”以代八因，而得答数。”

相当于说，改用如下算法

```
(i)     26 410 …2 641×10      (ii)    211 280 …21 128×10
     −   5 282 …2 641×2            −    63 384 …21 128×3
        21 128                         147 896
```

二　加法五术

用加法简化乘法

加一位

当乘数为 11～19 时适用，例如

274×16 相当于改计算

```
   2 7 4
   1 6 4 4 ……274×6
   4 3 8 4
```

加二位

乘数是 111～119 时适用，例如

“官加税钱三百四十二贯，每贯扣头子钱五十六文。问：收钱几何？”

“草曰：置总钱三百四十二贯，先隔位加二，次加一，加身折半。”

这相当于说 $342\times56=342\times112\div2=(34\ 200+342\times2)\div2$ 相当于做竖式

```
  342
    684……隔位加二
   342……  次加一
─────────
2│38 204
  19 152
```

加隔位

当乘数是 101～109 时适用

“地一百七亩，价一十贯六百文，问值几何？”

“草曰：置一百七亩，隔位加六。”(答数1 134贯 200 文)

对于 $107\times106=10\ 700+107\times6$

```
   107
+    642 ……隔位加六
──────────
  11 342
```

重加

“乘数烦者约之，用加一位之法加讫，重加。”

“税钱二百四十七贯，每贯加纳一文九分五厘。问：几何？”

“草曰：置税钱为身，先加三，又加五，合问”。

$$247\times195=247\times13\times15$$

```
   247
     741……247×3
─────────
   3 211
  16 055……3211×5
─────────
  48 165
```

连身加

当乘数为21～29时适用

“铜二十九铊，每铊二十三斤。问：重几何？”

“草曰：置铜数为身，先加二，后入身。”

算法相当于

$$29\times23=290+29\times3+296$$

```
29
 97……先加三
29……后入身
———
667
```

三 减法四术

用减法简化除法，先把除数首位化为1，相应地也缩小或扩大被除数相应的倍数。

减一位

“原纳头子钱一十九贯一百五十二文，原纳税钱，每贯扣头子钱五十六文。问：本税钱若干？”

“草文：置元税钱数两折半，作四贯七百八十八文，减四合问。”

原题是求 19 152÷56。杨辉把19 152两次折半化为4 788，除数化为14。在术文后附有运算过程相当于

```
 4788
−42……14×3
——————
  588
 −56……14×4
——————
   28
  −28……14×2
——————
    0
```

答数是 342。减一位适用于除数 11～19。

减二位

“米九十七石三斗一升，每人给三斗七升。问：给几人？”

“草曰：三因积数，身外减一一，合问。”

把　9 731÷37 化为　29 193÷111

$$
\begin{array}{r l}
29193 & \\
-222 & \cdots\cdots 111\times 2 \\
\hline
699 & \\
-666 & \cdots\cdots 111\times 6 \\
\hline
333 & \\
-333 & \cdots\cdots 111\times 3 \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

答数是 263

重减

“题烦者，折之，作两次减，或三次减，位简必捷。”

“支钱四百四十一贯三百二十文，给一百八十七人。问：各得几何？”

“草曰：一百八十七人为法，若用减二位之术，不亦繁乎？莫若用重减。草曰：置支钱总数，先减一，后减七，合问。”

这就是说：441 320÷187＝441 320÷11÷17 做两次“减一位”法，就得到结果2 360

隔位减

当除数是 101～109 时适用

“丝每一十两，耗三钱。今有丝重二千八百二十二两二钱。问：本几何？”

“草曰：置丝为实，隔位减三，合问。”

原题是求　28 222÷103

改做减法运算，相当于：

```
  2 8 2 2 2
-2 0 6·········103×2
    7 6 2
-   7 2 1······103×7
      4 1 2
-     4 1 2······103×4
          0
```

得答数 274。

四 求一代乘除

前面已在第二编第三章述北宋学者沈括有关数学的业绩，其中第四节为算术，首列求一之术。杨辉“求一代乘除”当是沈括求一术的具体应用。在乘法时：“倍法(乘数)必折实(被乘数)，倍实必折法”；在除法时“倍法必倍实，折法必折实”。目的是使乘(除)数有数字 1，便于运用上面已举的速算法则。杨辉也注意到必须因地制宜，灵活机动。

“二百三十八亩，每亩二百四十步。问：共几步？”

“求一草曰：半法、倍实，加二，合问。”

“出钱一千三百五十贯九百文买银，每两五贯七百文。问：得银多少？”

“不用求一草曰：置出钱数，三归，减九，合问。”

这是说本题 1 350 900÷5 700＝1 350 900÷3÷1 900

“五千七百一十二步。问：得几亩？”

“求一草曰：半法，半实，减二，合问。”

五 乘除速算表

在《乘除通变算宝》卷下杨辉总结四种速算法，对于乘数(除数)是 1～300 者应该用哪一种算法为宜，作出建议。他特别强调：“随题用法则捷，以法就题者拙。”虽然前面已提出过加一位，加二位，减一位，减二位等算法，杨辉并不拘泥于此，在表中择优采用，现录 11～39，以示一斑。

表 6.2.3　乘法速算

乘数	算　法	乘数	算　法	乘数	算　法
21	三因、七因	28	倍实，加四	34	二因、加七
22	倍实，加一	29	连身加	35	七因、折半
24	倍实，加二	31	身前因三	37	加一一，用三除
26	倍实，加三	32	倍实，加六	38	二因，加九
27	三因，九因	33	三因，加一	39	三因，加三

表 6.2.4　除法速算

除数	算　法	除数	算　法	除数	算　法
11	减一	21	减五、减四	31	四因 、减二四
12	折半、加五、九归	22	折半、减一	32	两折、加二五
13	减三	23	折半，更减一五	33	三归，减一
14	折半、七归	24	折半，减二	34	折半、减七
15	二因、三归	25	四因	35	二因、七归
16	折半，却加二五	26	折半、减三	36	两折，九归
17	减七	27	三归，九归	37	二因，减一一
18	折半，九归	28	折半，减四	38	折半，减九
19	三归、减三	29	四因、减一六	39	减九

杨辉所提出的各种速算法符合四项速算原则，在小学数学教学中可以有选择地采用。自沈括以来系统整理，结合生活实际深入讨论，比较省时、省力的算法杨辉率先迈出第一步。

第四节　素因数分解及指数律

我国素无素数概念。我们发现在杨辉的乘法速算表中他对于

表 6.2.5 杨辉对素因数的认识

数	杨辉语	分解	数	杨辉语	分解	数	杨辉语	分解	数	杨辉语	分解
21	三因、七因	3,7	61	加二二,折半	素数	107	隔位加七	素数	161	七因,退七七	7,23
23	退七十七	素数	63	加一,损三	7,9	109	隔位加九	素数	163	加六三	素数
27	三因、九因	3,9	67	加三四,折半	素数	113	加一三	素数	167	加六七	素数
29	连身加	素数	71	加四二,折半	素数	117	九因、加三	9,13	169	两次加三	13,13
31	身前因三	素数	73	加四六,折半	素数	119	七因,加七	7,17	171	加九,损一	9,19
33	三因,加一	3,11	79	加五八,折半	素数	121	两次加一	11,11	173	加七三	素数
37	加一一,三除	素数	81	两次损一	9,9	125	三番折半	5,5,5	179	加七九	素数
39	三因,加三	3,13	83	加六六,折半	素数	137	加三七	素数	181	加八一	素数
41	两折,加六四	素数	89	退一一	素数	139	加三九	素数	183	三因,身前六因	3,61
43	加七二,两折半	素数	91	七因、加三	7,13	143	加一、加三	11,13	187	加一,加七	11,17
47	加八八,两折半	素数	97	隔位退三	素数	149	加四九	素数	189	三因,七因,九因	3,7,9
51	三因,加七	3,17	101	隔位加一	素数	151	加五一	素数	191	加九一	素数
53	折半,隔位加六	素数	103	隔位加三	素数	153	九因、加七	9,17	193	加九三	素数
57	三因,加九	3,19	105	七因,加五	7,15	157	加五七	素数	195	加三、加五	13,15

续表

数	杨辉语	分解	数	杨辉语	分解	数	杨辉语	分解
197	加九七	素数	243	三因、两次九因	3,9,9	277	连身加七七	素数
199	加九九	素数	245	两次七因,折半	7,7,5	279	三因,隔位退七	3,93
203	七因,两折,加一六	7,23	247	加三、加九	13,19	281	连身加八一	素数
209	加一,加九	11,19	251	连身加五一	素数	283	连身加八三	素数
211	连身加一一	素数	253	加一,退七七	11,23	285	加五、加九	15,19
217	七因	7,31	255	身前五因	15,17	287	七因	7,41
223	连身加二三	素数	257	连身加五七	素数	291	三因,隔位退三	3,97
225	两次加五	15,15	259	七因	7,37	293	连身加九三	素数
227	连身加二七	素数	263	连身加六三	素数	295	加一八,两折	5,59
229	连身加二九	素数	267	三因,退一一	3,89	297	三因加一损一	3,11,9
231	加一	11,3,7	269	连身加六九	素数	299	加三,退七七	13,23
233	连身加三三	素数	271	连身加七一	素数			
239	连身加三九	素数	273	加三	13,21			
241	连身加四一	素数	275	两折半,加一	5,5,11			

数的因数分解已很熟练，他所作最简因数分解，虽无素数之名，事实上已是素因数分解。下面摘 21～299 之间奇数的情况。（表 6.2.5）

从表中我们注意到杨辉在这方面的工作情况：其一，除了偶素数 2 以外，3～293 之间的素数在表内都已出现。其二，遇到素数他只说“连身加”或“加××”，无法析因。其三，因为是速算表，有时因数不是最简的，如 9，15。做两次乘法，比“损一”，“连身加五”简便。其四，还有少数缺陷，例如 177 误以为是素数：“加七七”，其实 177＝3×59。

在《续古摘奇算法》卷上设题：“一文日增一倍，倍至三十日。问：计钱几何？（答数:107 万 3 741 贯 824 文）

题后术文说：“以十度八因。”注文：“一度八因超三日数。十度八因超三十日数。”这就是

$$2^{30}=(2^3)^{10}。$$

又术：“五度六十四乘之。”注文：“六十四乃六日数，五度乘为三十日。”

$$2^{30}=64\cdot 2^5=2^6\cdot 2^5。$$

又术：“以三度三十二乘出，得数自乘，亦同。”

$$2^{30}=(2^3\cdot 32)^2=(2^3\cdot 2^5)^2。$$

于此可见他对二数相乘，幂指数相加的性质已很熟悉。回溯到北宋学者沈括《梦溪笔谈》卷 18 技艺“棋局都数”条[①] 有关指数律的运用，杨辉再次正确掌握，说明在宋代，中国数学界已熟娴此术。

---

① 见第二编第三章第六节。

第五节　比　　例

比例是从来算书永恒主题之一，杨辉比例论述与秦九韶各具特色。

一　简单比例

《详解九章算法》粟米、衰分两章虽已失去，在杨辉其他专著可见他以互换术作商业计算十分熟练。例如在《续古摘奇算法》卷下设题："金立方一寸（谓长宽高皆是十分）再自乘，得一千分，重一斤(即十六两)。今有金立方七分(再自乘得三百四十三分)。问：重几何?"

用《九章算术》今有术算出答数：5两6钱8分8厘。

二　反比例

在《详解九章算法》均输章第5题(三人舂粟)中，杨辉论反比例所取率说："粝、粺、糳米率，反求为衰。以衰分法求之。求米等者，以粝、粺、糳率数为母，皆以一为分子、母互乘子，以乘其分为衰。即与五爵均钱，高爵出少，以次渐多问、同。"他的解释，具体明确，胜于《九章》。

三　分配比例

杨辉在《续古摘奇算法》卷下论衰分术说："衰分、互换、商除三法自可通用……《九章》衰分问五人均五鹿，用一、二、三、四、五为衰，如牛马羊均衰，用一、二、四为衰，女子善织日自倍，用一、二、四、八、十六为衰……皆准绳之数。"他又在均输章五县赋粟题解题中注说："即衰分也…大意明均其粟，暗均其钱也。"他自拟三题较《九章》复杂多变，解法也很别致。

1."三人均一百,只云甲多乙五文,丙得钱如乙七分之五。问:各几何?"(答数:甲40,乙35,丙25)

解法说:"于百文内先减出甲多乙五文,余九十五文。题云:丙得乙七分之五,丙当以五为衰。甲乙各以七为衰,并之,得十九为法。以九十五乘列衰,以法除之,得数。却增原减五文添甲。合问。"这样做比较设乙所有为 x 文,则甲有 $x+5$,丙有为$\frac{5}{7}x$,然后解

$$x+x+5+\frac{5}{7}x=100$$

要快速得多。在此基础上,他又把问题变动为

2."三人均一百。欲令乙得甲三分之二,丙少甲二十八文。问:各几何?"(答数:甲48,乙32,丙20)

他的解法为:"增二十八,并一百为总钱,以应丙少甲二十八文之数。题云乙得甲三分之二,当以甲衰三,乙衰二,丙亦衰三。并八为法。各以衰乘总钱,以法除之,各得。却于丙内退二十八,合问。"

在《续古摘奇算法》卷上之末"并率除"有分配比例三题,其中有一题是加权分配比例。

3. 买桃每个九文,林檎[①]每个五文,李子每个二文。今支钱三贯文,欲买一停[②]桃,二停檎,三停李。问:各得几何?(答数:桃120个,计1贯80文,林檎240个,计1贯200文,李子360个,计720文。)

术文说:"并一桃、二檎、三李价钱,共二十五,为法。除总数,先得桃子之数。二因为林檎,三因李数。以各价因之,即得。"

本题以 9×1,5×2,2×3 为分配率。以和25除3贯。购桃、

① 江南称为花红,形如苹果略小。

② 加物分成若干份,其中一份称为一停。

林檎、李个数分别为 120，240，360。

四　复比例

《续古摘奇算法》卷下有题，杨氏所著书仅此一例：

“六十四人、八日开河一千六百积尺。今添夫三十六人，开十二日。问：开几积尺？（答数：3 750）

“重互换术曰：六十四人乘八日为法，（即五百十二工）六十四人添三十六人，共六十人乘十二日（即一千二百工），以乘一千六百尺为实。以法除之。”

五　连比例

《续古摘奇算法》卷下：“辉因到姑苏（苏州）有人求三七衰术。继答之，尤不可不得，以补衰分之万一。”有题：

“今有四人分钱九百二十八贯。欲递以三七衰分。问：各得几何？”（答数：甲 548 贯 800 文，乙 235 贯 200 文，丙 100 贯 800 文，丁 41 贯 200 文。）

题意甲、乙、丙、丁按甲：乙＝乙：丙＝丙：丁＝7：3 的比分钱。杨辉在求四人分钱的连比时，计算正确。他说：“列置甲、乙、丙七、丁三。丙七不可为三，以三因丙、丁，生乙衰：甲、乙（49），丙（21）、丁（9）。乙之衰不可为三。亦以三因下位，生甲衰：甲（343），乙（147），丙（63），丁（27）。副并四衰，得五百四十为法。以所均之钱。各乘列衰，以法除之，合问。

杨辉于此考虑把 1 份桃子值 9×1＝9，2 份林檎值 5×2＝10，3 份李子值 2×3＝6 共 25 文作为一个单位。3 贯＝3 000文含 3 000÷25＝120 个单位。因此共买桃 1×120 个，林檎 2×120＝240 个，李 3×120＝360 个。这样理解对于数学启蒙教育很有好处。

第六节 数 列

一 等差数列和二阶等差数列

杨辉在前人基础上善于把已知形状、大小几何图形的求面积、体积的连续量问题转化为离散量的垛积问题。

平垛

在《田亩比类乘除捷法》卷上他点明了平面图形求面积与求其内部格点个数情况相同、也不相同。他指出要害:"连垛虽然圭田相似，却用梯田法。"其《详解九章算法》方田部分虽已散失，但仍能在他的其他专著中看到他从连续量推广到离散量的引申于此，举《田亩比类乘除捷法》卷上四例。(图 6.2.1)

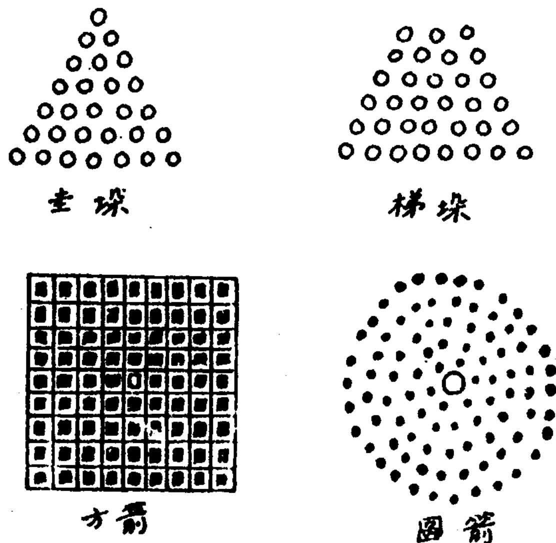


图 6.2.1

1. “今有圭垛一堆。上一束，底宽八束，[高八束]。问：共几束?”

2. “今有梯垛。上有九束，底宽十六束 [高八束]。问：共几束?”

“术文：并上下广，以高乘，折半。”

3. 方箭　外围三十二只，问：共箭几只?（答数:81）

“术文：内围八只，并外围三十二，共四十只，折半。以四层乘之，合问。”

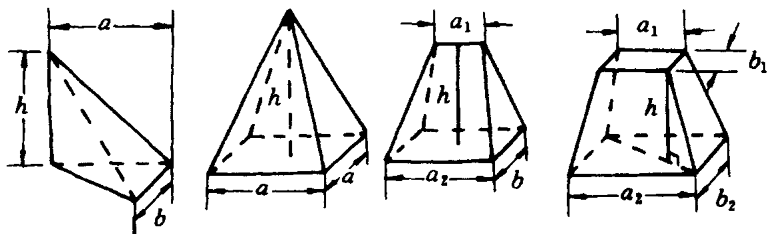
4. 圆箭：外围三十只，共箭几只?（答数:91）

“术文：内围六只，并外围三十，共三十六只。折半。以五层乘之，合问。”

上引四题都看成是等差数列。前二题是显然的。第 3 题以内围 8 开始，依次是 16，24，32 四项数列。第 4 题是 6，12，18，24，30 五项数列。圆箭亦称圆束，我们已在第四编第一章第七节详说。

堆垛

在《详解九章算法·商功》中杨辉在相应立体图形之后作类比：推广为离散量情况下的堆垛问题。于此选录四例（图 6.2.2 为四种对应立体的形状）。



鳖臑　　方锥　　刍甍　　刍童

图 6.2.2

1. 鳖臑——三角垛

“三角垛下广一面十二个，上尖。问：[高十二个] 计几何?”(答数:364)

“术文：下广加一，乘之(下广)。平积、下广加二乘之，立高方积，如六而一。”

这就是数列 1，3，6，10，…，$\frac{1}{2}n(n+1)$[①]。只要把下广设为 n，术文就是三角垛求和公式

$$S=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)。$$

2. 方锥——方垛

“菓子一垛，下方一十四个，问计几何?”(答数,1 015)

“术文：下方加一，乘下方为平积。又加半为高，以乘下方为高积。如三而一。”

这里的数列是 1，4，9，…，n^2。只要下方记为 n 个，术文就是方垛求和公式：

$$S=\frac{1}{3}n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)。$$

3. 刍甍垛

“果子一垛，下长九个，上长四个，广六个，高六个。问：计多少?”(答数:154)

“术文：倍下长，并入上长，以广乘之。高与广同。副置一位。又高乘之，并之为实。如六而一。”

这里数列是 4×1，5×2，6×3，7×4，8×5，9×6，一般说刍甍垛上长是 n 个，高(层)是 h 个，那么下长是 $n+h-1$ 个，下广是 h 个。术文是说，此垛垛积(个数)是

---

① 顶上放 1 个，第二层放 3 个，第三层放 6 个果子，…就堆成鳖臑垛。其余堆垛可类推。

$$S=\frac{1}{6}((2(n+h-1)+n)\ h^2+(2(n+h-1)+n)\ h)$$①。

4. 刍童垛

"果子一垛。长四个、广二个，下长八个，下广六个。高五个。问：计几何？"（答数:130）

"术文：倍上长，并下长，以上广乘之。别倍下长，并上长，以下广乘之。此刍童治本积之法。以上长减下长，余亦并之。果子乃是圆物，与方积不同，故增入此段。以高乘之。如六而一。"

这数列是 4×2，5×3，6×4，7×5，8×6。一般说，如刍童垛上长是 n 个，上广 m 个，高(层)是 h 个，那么下长 $n+h-1$，下广 $m+h-1$。术文是说，此垛垛积(个数)是

$$S=\frac{h}{6}((2n+(n+h-1))\ m+(2(n+h-1)+n)\cdot(m+h-1)+(n+h-1)-n)$$②

这里的刍童垛公式就是沈括隙积术。而刍甍垛公式是刍童垛公式的特殊情况($m=1$)，而方垛又是刍甍垛的特殊情况($m=n=1$)，读者不难验证。杨辉对于三角垛和方垛深知底边果子个数与层高的关系。所以在《乘除通变算宝》中的命题，只给出底边果子个数："三角垛，底面七个，问：积几何？"（答数:84）"四隅垛(方垛)底层六个，问：积几何？"（答数:91）

这里平垛是等差数列，堆垛是二阶等差数列。

二　等比数列

前面已在第四节举了以 2 为底的幂数列，杨辉在《续古摘奇算法》卷上还有题："初日三钱，以后递作三倍，问：一月之计若

---

① 把刍甍垛看成刍童垛，按沈括隙积公式得到同样结果。

② 当上长 n，上广 m，高 h 为已给，S 也已确定。

干?”(答数:2 058亿9 113万2 094贯 649 文)其术文对于等比数列 $3, 3^2, \cdots, 3^{30}$第三十项算法提出不同方法。

其一,“置初日三钱,用五度自乘,九而一”,这就是

$$3^{30}=(((((3^2)^2)^2)^2)^2)^2\div 9=3^{2^5}\div 3^2。$$

其二,“以三凡四次自乘,用三除,余(商)自乘之,合其数。”这是说

$$3^{30}=((3^2)(3^2)(3^2)(3^2)\div 3)^2=(3^{2^4}\div 3)^2。$$

与以 2 为底的幂数列一起考虑,说明我国古代数学家对幂指数律的熟练技能技巧。

第三章　几　　何

《九章算术》方田、商功、勾股三章与几何学关系密切。杨辉《详解九章算法》的方田章已佚，在《田亩比类乘除捷法》中还可以窥测其有关内容，而其创新处偏重代数，将在下一章陈述。商功章有关垛积的论述已详上一章。在勾股章有不少创见，我们分二节介绍。

第一节　勾　股　术

一　首创、整理、解释新术语

杨辉对于勾股章有过深入钻研，直角三角形勾、股、弦和差关系厘为 13 种(表 6.3.1)，其中最后四种：

弦较和、弦和和、弦和较，弦较较

系新创。三字中第二个字较或和是指同三角形勾、股的差或和，第三个字和或较是指弦与第二个字含义的和差，这种说法影响深远，直至明清不衰。

原来刘徽注《九章算术・勾股》第 16 题末尾出现过这些运算关系，但未列专门术语。刘徽还为勾股容圆直径定新义："又可以股弦差减勾，勾弦差减股为圆径。又弦减勾股并，余为圆径，并勾弦差、股弦差、减弦，余为圆径。"杨辉悟这四种不同运算实为一种结果，他总结说："圆径与弦和较等"，即

$$d=a+b-c。$$

那么其余三种量有何相应的几何意义？美国 D. W. Hasan 在

表 6.3.1 勾股生变十三名图

名称	释　名	假令数	变段	勾股较 $b-a$	股弦较 $c-b$	弦和较 $a+b-c$	今释“变段”之意	自乘积数
勾	直田阔（a）	8	2	0	1	1	$a=(c-b)+((a+b)-c)$	64
股	直田长（b）	15	3	1	1	1	$b=(b-a)+(c-b)+((a+b)-c)$	225
弦	田两隅衰（c）	17	4	1	2	1	$c=(b-a)+2(c-b)+((a+b)-c)$	289
勾股较	勾减股（$b-a$）	7	1	1	0	0	$b-a=b-a$	49
勾弦较	勾减弦（$c-a$）	9	2	1	1	0	$c-a=(b-a)+(c-b)$	81
股弦较	股减弦（$c-b$）	2	1	0	1	0	$c-b=c-b$	4
勾股和	勾共股（$a+b$）	23	5	1	2	2	$a+b=(b-a)+2(c-b)+2((a+b)-c)$	529

续表

名称	释　名	假令数	变段	勾股较 $b-a$	股弦较 $c-b$	弦和较 $a+b-c$	今释“变段”之意	自乘积数
勾弦和	勾共弦（$a+c$）	25	6	1	3	2	$a+c=(b-a)+3(c-b)+2((a+b)-c)$	625
股弦和	股共弦（$b+c$）	32	7	2	3	2	$b+c=2(b-a)+3(c-b)+2((a+b)-c)$	1 024
弦较和	弦与勾减股（$c+a-b$）	24	5	2	2	1	$c+(b-a)=2(b-a)+2(c-b)+((a+b)-c)$	576
弦和和	勾股共弦（$a+b+c$）	40	9	2	4	3	$a+b+c=2(b-a)+4(c-b)+3((a+b)-c)$	1 600
弦和较	弦减勾股共数（$(a+b)-c$）	6	1	0	0	1	$(a+b)-c=((a+b)-c)$	36
弦较较	以弦减勾股较（$c-(b-a)$）	10	3	0	2	1	$c-(b-a)=2(c-b)+((a+b)-c)$	100

1979年作出有趣的回答，文题："论直角三角形的内切圆与旁切圆直径"[①]。图6.3.1中他借助于$\triangle IAB+\triangle IAC+\triangle ICB=\frac{1}{2}(a+b+c)\frac{d}{2}=\frac{1}{2}ab$得证。[②]文中还运用类似方法推导在$a$，$b$，$c$三边上的旁切圆直径。例如在$AC$边(即$b$)上的旁切圆直径$d_b$，是借助于

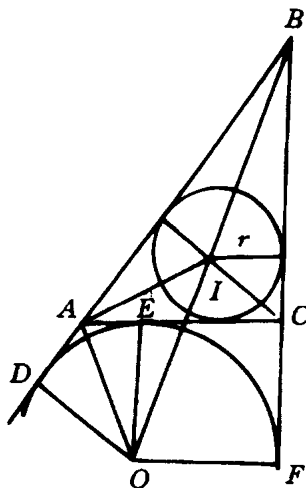


图 6.3.1

$$\triangle ABC+2\triangle AOE+\text{正方形 } FOEC=2\triangle BOD$$

得　　$d_b=c+b-a$(弦和较)，相应地又导出

$d_a=c-b+a$(弦较较)，

$d_c=a+b+c$(弦和和)。

在无意中他在杨辉之后七百年赋予新意。

① D. W. Hasan, On the radii of inscribed and escribed circle of right triangle, The Mathematical Teacher 1976(6)

② 《九章算术·勾股》第16题得同样结论：$d=\frac{2ab}{a+b+c}$

“旁要”是周时九数之一，自《九章算术》以来罕见有人解释。杨辉在勾股容方题说：“勾股旁要法曰：直田斜解勾股二段，其一容直其一容方，二积相等。”杨辉以余形释旁要。

二　改进、新创命题证法

我们于此举三例。

例 1. 勾股章第 11 题(户高于广)在直角三角形中已给 $b-a$，c，求 a。其关键问题是从已给条件求出 $a+b$，再从和差关系求 a，b。杨辉的解法是“弦自乘变勾幂二，半较幂四，半较乘勾四”(图 6.3.2 左)，即 $c^2=2a^2+4\left(\frac{1}{2}(b-a)\right)^2+4\left(\frac{1}{2}a(b-a)\right)$。然后，“半较自乘，倍之，减积”得所求(图 6.3.2 中画斜线的为“减积”)。

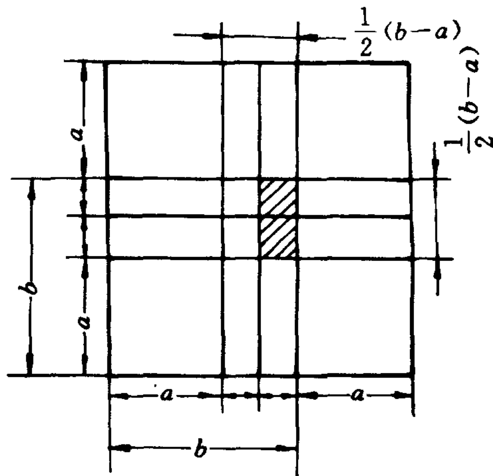


图 6.3.2

$$c^2-2\left(\frac{1}{2}(b-a)\right)^2=2a^2+2\left(\frac{1}{2}(b-a)\right)^2+4\left(\frac{1}{2}a(b-a)\right)$$

$$=2(a^2+2\left(\frac{1}{2}a(b-a)\right)+\left(\frac{1}{2}(b-a)\right)^2$$

$$=2\left(a+\frac{1}{2}(b-a)\right)^2=\frac{1}{2}(a+b)^2。$$

杨辉最后说："余见之后图，半之，开方，…减半较为勾，加较为高。"这就是：$\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(b-a)=a$，$a+b-a=b$。这是一个很别致的解法①。从此还可以获知，他熟练的几何和代数恒等变换能力。

2. 勾股章第14题(二人同立)已给$(c+a):b$，a，求b，c。《九章算术》的术文分两步走：(i)先求$a:b:c$。(ii)从已知比求b，c。第(i)步的答案是

$$a:b:c=a(c+a):b(c+a):c(c+a),$$

其中$c(c+a)=\frac{1}{2}((c+a)^2+b^2)$，$a(c+a)=(c+a)^2-\frac{1}{2}((c+a)^2+b^2)$。刘徽注为之作了出色的几何以及代数证明。杨辉不以此为满足，他又借助于熟练的几何代数恒等变换，另作探索，他在读完刘注后，提出自己的主张：

"勾弦和自乘变勾幂二段、股幂一段、勾乘弦二段"

意即
$$(c+a)^2=2a^2+b^2+2ac。$$

"股率自乘、股幂一段"：$b^2=b^2$，

"并而勾幂、股幂、勾乘弦各二段：

$$(c+a)^2+b^2=2a^2+2b^2+2ac,$$

"半之各一段，为弦。"

$$\frac{1}{2}((c+a)^2+b^2)=a^2+b^2+ac=c^2+ac=c(c+a)。$$

"以减和，求勾"

$$(c+a)^2-\frac{1}{2}((c+a)^2+b^2)=a^2+ac=a(c+a)。$$

---

① 原著图见679页6.6.14。

3. 勾股章第 16 题(勾股容圆)当勾股弦分别为 a，b，c 时，《九章算术》指出三角形内切圆直径

$$d=\frac{2ab}{a+b+c}。\tag{1}$$

刘徽为之作了两个证明，d 的表达式还有二种

$$d=a+b-c,\tag{2}$$

$$d=\sqrt{2(c-a)(c-b)}。\tag{3}$$

在勾股章第 12 题(纵横不出)中刘徽已证(2)(3)等价，但(1)，(3)是否等价未及推导。杨辉在《详解九章算法》中作图并证，填补了空白。(图 6.3.3)证法技巧性很强。

图 6.3.3

为说明问题，我们另作图(图 6.3.4)，他在边长为 a，b 的长方形内作线段使其分成四个长方形：面积分别为

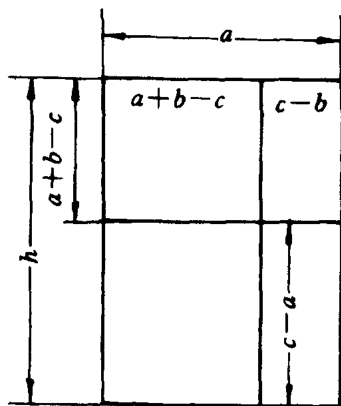


图 6.3.4

$$(a+b-c)^2,\ (a+b-c)(c-a),$$
$$(a+b-c)(c-b),\ (c-a)(c-b)。$$

从(2)，(3)知　$(c-a)(c-b)=\frac{1}{2}(a+b-c)^2$。

他把这四块都以$(a+b-c)$为一边的长方形按照$c-a$，$a+b-c$，$c-b$，$\frac{1}{2}(a+b-c)$次序自上而下，又自下而上地排成一个狭长的长方形，它的面积显然是$2ab$，而另一边边长是$a+b+c$，于是命题(2)，(3)等价已证。

第二节 勾股比例

刘徽作《海岛算经》，是《九章算术》勾股章的深入和推广。原著有图有证，对海岛刘序讲得很清楚："辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于勾股之下。"后来图、注尽失，唐时李淳风注仅是演算细草而已。原著术文如何推导，成为千古之谜。杨辉结合《孙子算经》有关算题，终于借助于出入相补原理得到结果，他在《续古摘奇算法》卷下之末生动地说其思考经过："海岛…实九

章勾股之遗法也。迄今千余载间……未闻解白作法之旨者。辉尝置海岛小图于座右[1]，乃见先贤作法之万一，……今将孙子度影量竿题问，引用详解，以验小图。姑以一问，其余好学君子自能触类而考，何必尽传？”

杨辉把《孙子算经》度影量竿题作为辅助问题来印证海岛小图。他所作辅助题是：“假如竿(DL)不知高，从竿脚量远 25 尺(LM)。在 1 丈表(BM)后退 5 尺($MN=EK$)，则窥穴(K)望表与竿齐平，其入目窥穴高(KN)4 尺。问：竿高多少？”（答数，40 尺）杨辉为此作图(图 6.3.5，我们加注字母)列出公式，相当于说，所求竿高

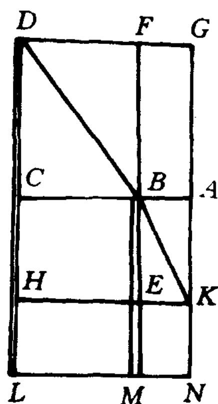


图 6.3.5

$$DL=\frac{\text{表高}-\text{人目高}}{\text{退行数}}\times\text{竿表距}+\text{表高}$$

$$=\frac{BE\times BC}{EK}+BM。$$

杨辉为此解释说：“直田($DGKH$)之长名股(GK)，其宽名勾

① 见第 651 页图 6.6.1。

(HK)。于两隅角斜界一线，其名弦(DK)。引外分二勾股($\triangle DHK$,$\triangle DGK$)。其一勾中容横(长方形 $HCBE$)，其一股中容直(长方形 $ABFG$)。二积之数皆同。”这里用余形定理，推导出

$$BE \cdot HE = BF \cdot GF$$

这一关键条件，使公式得证。必须指出这是相似直角三角形性质定理的证明，是当年刘徽注勾股章时所忽略的重要环节。

在此基础上，杨辉把《海岛算经》第1题改编为两个，孙子度影量竿题：“隔水有竿(VG)不知其高，立二表(UC,TD)，各高1丈，前后相去15尺。自前表后退行5尺，于窥穴内(E)望表人目高 $FR=4$ 尺，与竿齐平。又从后表退行8尺，亦窥穴(F)望表与竿齐平。问：竿高几何？”（答数：竿高40尺，前表去岸隔水25尺）

他从左半长方形 $GNEH$ 中取面积相等的余形(图6.3.6)[1]

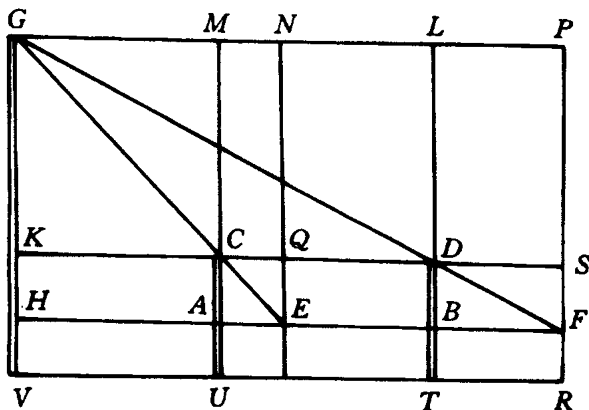


图 6.3.6

$$长方形\ KCAH = MNQC。\tag{1}$$

① 比较第651页图6.6.1杨辉《海岛》小图。

又从大长方形 $GPFH$ 中取余形

$$\text{长方形 } KDBH = LPSD。 \tag{2}$$

(1)，(2)两式左右端相减，得到

$$\text{长方形 } CDBA = LPSD - MNQC = (DS - CQ)KG,$$

这就是 $AB \cdot AC = (BF - AE)KG$，

于是得到竿高

$$GV = KG + VK = \frac{AB \cdot AC}{BF - AE} + VK。$$

同理可以推导出前表与竿的平距。从相等余形

长方形 $KCAH = MNQC$，

得 $AH = \dfrac{KG \cdot CQ}{AC}$，

其中已知 $KG = \dfrac{AB \cdot AC}{BF - AE}$，

那么所求平距 $AH = \dfrac{AE \cdot AB}{BF - AE}$。

杨辉把竿高和平距模拟刘徽的山高和山远，虽以小喻大，论证严密，为历史悬案解密。他说："今恐后人不知先贤用心之源，故以隔水望木题为问，验重差之术。引用海岛第一题。好事者得之，自可引而申之，以发其余，岂小补哉?"中国数学史学会第一届年会1981年在大连召开，吴文俊宣读论文《〈海岛算经〉古证复原》曾指出："杨辉是依据当时仍在流传的古海岛图来论证的"，吴氏"引而申之，以发其余"，在论文中对其余八题作出全面古证复原[①]，"岂小补哉"。

① 吴文俊.《海岛算经》古证复原. 九章算术与刘徽. 北京：北京师范大学出版社，1987：162～182

第四章　代数与不定分析

第一节　线性方程组

刘徽注方程章用文字解释，无图式。杨辉在《详解九章算法》率先用矩阵形式用今称初等变换算法解线性方程组，最终使系数矩阵变换为三角形矩阵，然后回代得答数，较刘徽的工作尤为清晰。

杨辉对解“方程”(线性方程组)有系统论述，步骤为(i)排列逐项问数。(ii)“命首位物多者为主，以邻行数增乘求等，余物与价亦倒乘之。以原多物对减，其余次第增减，价可为实，物可为法而止。”杨辉将《九章算术》“遍乘直除(法)”改为“遍乘减”这是一大进步。在章末尾“总说”中他讲得更是具体，以二行为例，他说:“去一、存一以考其数。如甲乙行列诸物与价，术以(i)甲行首位(a_1)遍乘其乙，(ii)复以乙行首位(a_2)遍乘其甲，求其有等，(iii)以少行减多行，先去其物，减其钱，见一法一实，(iv)如商除之。现用矩阵表达，杨辉的“总说”更为清楚。

$$\begin{matrix}\text{甲行}\\ \text{乙行}\end{matrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(i)}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2a_1 & b_2a_1 & c_2a_1 \end{pmatrix};$$

$$\text{(ii)}\begin{pmatrix} a_1a_2 & b_1a_2 & c_1a_2 \\ a_2a_1 & b_2a_1 & c_2a_1 \end{pmatrix};$$

$$\text{(iii)}\begin{pmatrix} a_1a_2 & b_1a_2 & c_1a_2 \\ a_2a_1-a_1a_2 & b_2a_1-b_1a_2 & c_2a_1-c_1a_2 \end{pmatrix};$$

$$\text{(iv)}\begin{pmatrix} a_1a_2 & b_1a_2 & c_1a_2 \\ 0 & b_2a_1-b_1a_2 & c_2a_1-c_1a_2 \end{pmatrix}。$$

所求一个未知数是 $\dfrac{c_2a_1-c_1a_2}{b_2a_1-b_1a_2}$。

以杨辉为方程章第 1 题所作解题为例，我们用阿拉伯数字录下其四个图式及其说明文字：

$$\text{(i)}\ \begin{matrix}\text{上禾}\\ \text{中禾}\\ \text{下禾}\\ \text{实}\end{matrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 39 & 34 & 26 \end{bmatrix}$$

“以首位物多者为主，右三以物少者，左、中二行增乘求等。余物与价亦例乘之。左三乘右、中行。”

↓

$$\text{(ii)}\ \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & 9 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \\ 78 & 102 & 39 \end{bmatrix}$$

“以原乘多行右行四位对减中、左二行上禾，尽而止。”

↓

$$\text{(iii)}\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{bmatrix}$$

“其余次第增减，令存中禾者以多数中五、遍乘少行左行、以原乘多行中行对减之，中禾尽而止。”

↓

$$\text{(iv)}\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{bmatrix}$$

“下禾为法，斗数为实，除之每秉得二斗……四分之三、中行内减下禾一束二斗四分斗之三，余二十一斗四分斗之一，为中禾五秉之实。除之一秉，得四斗四分斗之一。右行内减中禾二秉、下禾一秉实十一斗四分斗之一，余二十七斗四分斗之三，为上禾三秉之实。除之，得九斗四分斗之一。”

从上面实录可见其运算过程与今称高斯消去法没有什么不同。尤其令人感兴趣的是，其运算末尾三角形矩阵赫然呈现吾人

面前。与秦九韶须解至单位矩阵止，从计算方法要求考虑，杨优于秦。

我们知道《九章算术·盈不足》后12题都作两次假设，以盈不足多少，按前八题盈不足术化为算术解法。事实上后12题都是线性方程组问题。杨辉已敏锐地看到这一点。第14题(大器小器)："今有大器五、小器一，容三斛。大器一、小器五，容二斛。问：大、小器各几何？"(答数：大器，$\frac{13}{24}$；小器，$\frac{7}{24}$)杨辉在此问解题中相当于据题意列出矩阵

$$\begin{array}{r} \\ \text{大器} \\ \text{小器} \\ \text{容} \end{array}\begin{array}{c}\text{左}\quad\text{右}\\ \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\end{array} \xrightarrow{\text{左}\times 5-\text{右}} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 24 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{右}\times 24-\text{左}} \begin{bmatrix} 0 & 120 \\ 24 & 0 \\ 7 & 65 \end{bmatrix}$$

就得解。

第二节　多项式方程

杨辉在《田亩比类乘除捷法》卷上论图形中已给出某些线段长度求图形面积；又在同书卷下，《详解九章算法》少广章、勾股章已给图形面积(体积及其高维积)反算图形中的某些线段长度。后者用到布列方程和解方程的知识。他祖述并身体力行其先辈贾宪和刘益的成果，保存我国几濒失传的稀世之珍。杨辉和李淳风注立圆术(祖暅球积)、秦九韶写演纪(上元积年)鼎足而三，卓著功勋。有关贾、刘多项式方程的工作已在第一编陈述，不再赘。属于杨辉自己的工作，将在本编第六章有关节继续。这里选录《详解九章算法》少广章佚题，今硕果仅存在劫余《永乐大典》卷16 344(原件在英国剑桥大学图书馆)[①]。此为"递增三乘开方术"即解四

① 见第一章第三节，四、《永乐大典》书影。

次方程

$$x^4=1\ 336\ 336。$$

杨辉借助于贾宪增乘方法，按部就班，一板一眼，坚持作解，可见其功力之深。我们补添筹式、释代数意义并加横式综合除法，以为对照。见表6.4.1。

第三节　不定分析

杨辉对不定分析有深邃的认识，他分别在《详解九章算法》和《续古摘奇算法》俱有著述，对在他以前发生过的不定分析现象：五家共井、百钱百鸡和物不知数三题俱有讨论、引申，并且力所能及地作出专题研究。前面已在本卷第三编中以大量篇幅宣扬秦氏在不定分析方面的不朽业绩。秦氏的同代人杨辉在这一领域内也有杰出贡献，只是侧重面不一样，应该评估为异曲同工。

一　不定方程组

齐次方程

《九章算术·方程》第13题(五家共井)是我国数学史上，也是世界数学史上的不定分析开山之作。它与其他17个适定方程混杂在一起，因为是齐次方程，易于把不定方程与适定方程混为一谈：《九章算术》的答数就以特解视为通解：丈、尺、寸，其言凿凿，以一概全。刘徽注至此，就曾明智地指出：这应是不名数，且为一组率："举率以言之。"明确了特解与通解之别，及其正确答案。

杨辉对本题很欣赏，他称此种"方程"为"分母子方程"，并说："古人变五家借绠逮深为问，可谓佳作"，他为本题作"解题"。从这一个别问题，可以供人们推出同型题的一般解。他的解法，相当于说，对于

表 6.4.1 杨辉“递增三乘开方术”程序表

程序	杨辉原文	筹算式	代数意义
(i)	积一百三十三万六千三百三十六尺，问为三乘方几何？ 置积为实。别置一算名曰下法，于实末常超三位约实。	商 实 |≡|||⊥|||≡⊤ 立方 上廉 下廉 下法 |	解 $x^4=1\ 336\ 336$ 对方程缩根变换：$x=10x_1$，得 $10\ 000x_1^4=1\ 336\ 336$ ① 对方程①减根变换：$y=x_1-[x_n]$， 估计 $[x_1]=3$ 得 (i) 10 000　0　0　0　−1 336 336 |3 　　　3 000　90 000　270 000　810 000 (ii) 10 000　30 000　90 000　270 000　−526 336 　　　30 000　180 000　810 000 　10 000　60 000　270 000　1 080 000 　　　30 000　270 000 　10 000　90 000　540 000 　　　30 000 (iii) 10 000　120 000　540 000　1 080 000　−526 336 减根后方程为 $10\ 000y^4+120\ 000y^3+540\ 000y^2+1\ 080\ 000y$ $=526\ 336$②
(ii)	上商得数，乘下法生下廉，乘下廉生上廉，乘上廉生立方，命上商除实。	商 ≡ 实 ≣||⊥|||≡⊤ 立方 =⊤ 上廉 |||| 下廉 ||| 下法 |	
(iii)	作法商第二位得数：以上商乘下法入下廉，乘下廉入上廉，乘上廉入方。 又乘下法入下廉，乘下廉入上廉。 又乘下法入下廉。	商 ≡ 实 ≣||⊥|||≡⊤ 立方 |⊤ 上廉 ≡|||| 下廉 —|| 下法 |	

续表

<table>
<tr><th>程序</th><th>杨辉原文</th><th>筹算式</th><th>代数意义</th></tr>
<tr><td>(iv)</td><td>方一、上廉二、下廉三、下法四退</td><td>商　𝍫𝍣
实　𝍭𝍡𝍮𝍢𝍫𝍥
立方　𝍩　𝍰
上廉　𝍭𝍣
下廉　𝍠𝍪
下法　𝍠</td><td rowspan="2">对方程②扩根变换：$10y=y_1$ 得
$y_1^4+120y_1^3+5\ 400y_1^2+108\ 000y_1=526\ 336$　③
对方程③减根变换：$z=y-[y_1]$
估计 $[y_1]=4$
$$\begin{array}{lrrrrrl} \text{(iv)} & 1 & 120 & 5\ 400 & 108\ 000 & -526\ 336 & \lfloor 4 \\ & & 4 & 496 & 23\ 584 & 526\ 336 & \\ \hline \text{(v)} & 1 & 124 & 5\ 896 & 131\ 584 & 0 & \end{array}$$
$(z^3+124z^2+5\ 896z+131\ 584)(z-4)=0$　④
解得　$x=34$</td></tr>
<tr><td>(v)</td><td>又于上商之次，续商置得数。以乘下法入(下)廉，乘下廉入上廉，乘上廉并为立方。命上商除实尽，得三乘方一面之数。</td><td>商　𝍫𝍣
实
立方　𝍩𝍢𝍩𝍤𝍰𝍣
上廉　𝍭𝍧𝍱𝍥
下廉　𝍠𝍪𝍣
下法　𝍠</td></tr>
</table>

$$\begin{cases} a_1x_1 + x_2 + & = x_{n+1}, \\ a_2x_2 + x_3 & = x_{n+1}, \\ \cdots & \\ x_1 + a_nx_n & = x_{n+1}。\end{cases} \quad \text{(i)}$$

设 $A=1+\prod_{i=1}^{n}a_i$，并把 x_1，x_2，…，x_n 都扩大 A 倍后，改记为未知数 X_1，X_2，…，X_n，

$$\begin{cases} a_1X_1 + X_2 & = Ax_{n+1}, \\ a_2X_2 + X_3 & = Ax_{n+1}, \\ \cdots & \\ X_1 + a_nX_n & = Ax_{n+1}。\end{cases} \quad \text{(ii)}$$

以五家共井题 $a_1=2$，$a_2=3$，$a_3=4$，$a_4=5$，$a_5=6$ 为例，则 $A=721$。

杨氏的解法程序为

"五绠数为分母，相乘得七百二十，借绠数、借一为分子并之，得七百二十一为深积。副列各户本绠所借及深积"。

(i)

	左	③	②	①	右
甲	1	0	0	0	2
乙	0	0	0	3	1
丙	0	0	4	1	0
丁	0	5	1	0	0
戊	6	1	0	0	0
深积	721	721	721	721	721

"如方程，正负入之，只求戊[绠]，可取诸绠。"①

二乘左行，以①行同名减之。甲空、乙正无入，负其一乙，戊一十二，积七百二十一。"② 这就变换为(ii)

↓

① 杨氏之意，只求得戊绠长多少(深积的多少倍)，系数矩阵就成为三角形。即可借助于回代，求其他绠长。

② 行名：左，②，①，右为笔者所拟。

$$
\text{(ii)}\quad
\begin{matrix} \text{左} & ③ & ② & ① & \text{右} \end{matrix}
$$

$$
\text{(ii)}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 2\\
-1 & 0 & 0 & 3 & 1\\
0 & 0 & 4 & 1 & 0\\
0 & 5 & 1 & 0 & 0\\
12 & 1 & 0 & 0 & 0\\
721 & 721 & 721 & 721 & 721
\end{bmatrix}
$$

“五乘左行，以①行异名减之：乙空、丙负无入，正其一丙，戊三十六，同名加积，得二千八百八十四。”这已变换为(iii)

↓

$$
\text{(iii)}\begin{matrix}\text{甲}\\ \text{乙}\\ \text{丙}\\ \text{丁}\\ \text{戊}\\ \text{深积}\end{matrix}
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 2\\
0 & 0 & 0 & 3 & 1\\
1 & 0 & 4 & 1 & 0\\
0 & 5 & 1 & 0 & 0\\
36 & 1 & 0 & 0 & 0\\
2\,884 & 721 & 721 & 721 & 721
\end{bmatrix}
$$

“四乘左行，以②行同名减之：丙空、丁负无入，负其一丁，戊一百四十四，同名减积，得一万八百一十五。”这已成为(iv)

↓

$$
\text{(iv)}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 2\\
0 & 0 & 0 & 3 & 1\\
0 & 0 & 4 & 1 & 0\\
-1 & 5 & 1 & 0 & 0\\
144 & 1 & 0 & 0 & 0\\
10\,815 & 721 & 721 & 721 & 721
\end{bmatrix}
$$

“五乘左行，以④行异名减之：丁空，同名加戊，为七百二十一，加积，得五万四千七百九十六。”积为实，戊为法，除得戊绠。

↓

$$
\text{(v)}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 2\\
0 & 0 & 0 & 3 & 1\\
0 & 0 & 4 & 1 & 0\\
0 & 5 & 1 & 0 & 0\\
721 & 1 & 0 & 0 & 0\\
54\,796 & 721 & 721 & 721 & 721
\end{bmatrix}
$$

戊绠$=54\,796\div721=96=X_5$

矩数矩阵已成为下三角形，于是杨辉便回代。

“递除(去)丁、丙、乙、甲所借，以求四缏”例如 5 丁缏+76 =721，于是丁缏=129=X_4，4 丙缏+129=721，丙缏=148=X_3；易得乙缏=191=X_2；甲缏=265=X_1 把 X_1，X_2，X_3，X_4，X_5 的相对值连同 A 一起考虑，就得到

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = 76 : 129 : 148 : 191 : 265 : 721。$$

杨辉为读者进一步理解他的理论，在本题“比类”中另拟一题：“三人易物：甲以朱二两、粉一两，乙以粉三两、丹一两，丙以丹四两、朱一两皆得椒一斤。问：各价几何?”(答数：椒2 500，朱 900，粉 700，丹 400)

如设朱、粉、丹(都是颜料)每两值 x_1，x_2，x_3，椒(花椒，香料)每斤值 x_4。据题意就是解齐次不定方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = x_4, \\ 3x_2 + x_3 = x_4, \\ x_1 + 4x_3 = x_4。 \end{cases}$$

杨辉如法算出 $A=2\times3\times4+1=24+1=25$ 后，列出“方程”，出 $X_3=400$。从三角形系数矩阵，逐步回代，得出结果

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 900 : 700 : 400 : 2\ 500。$$

非齐次不定方程组

杨辉在《续古摘奇算法》卷下有三题是这一类型。其中第 1 题直接引《张丘建算经》百钱百鸡题，解法也从原著，他所摹拟的两题，其一，

“钱一百，买温柑、绿桔、扁桔共一百枚，只云：温柑一枚七文，绿桔一枚三文，扁桔三枚一文，问：各买几何?”(答数：温柑 6，值 42 文；绿桔 10，值 30 文；扁桔 84，值 28 文)。”

据题意，如设三种水果个数依次是 x_1，x_2，x_3，则问题是要解不定方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 100, \\ 7x_1 + 3x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 100。 \end{cases}$$

据题意如果设温柑、绿桔、扁桔个数分别为 x，y，z，那么问题就是要解不定方程组

$$\begin{cases} x+y+z=100, \\ 7x+3y+\frac{1}{3}z=100。\end{cases} \tag{i}$$

杨辉引《辨古通源》① 解法，显示当时特色，解法大意是："100 个钱的 3 倍，减去 100 个钱，柑值的 3 倍 21 减去 1，余数是 20。绿桔值的 3 倍 9，减去 1，余数是 8。合并两余数，得 28。200 除以 28，得整数 6，这就是所求温柑。绿桔各 6 个，而(200－6×28)÷8＝4。这是温柑与绿桔个数的差。因此所求温柑、绿桔共 16 个，而扁桔为 84 个。"

我们试作解释：对于(i)式可变形为

$$\begin{aligned} x+y+z&=100, \\ 21x+9y+z&=300。\end{aligned} \tag{ii}$$

《辨古通源》中所说两个余数，实在就是两式相减后 x，y 的系数

$$20x+8y=200。 \tag{iii}$$

如所求温柑、绿桔个数之差设为 t。即

$$x=t+y。 \tag{iv}$$

于是(iii)式变为

$$\begin{aligned} 20x+8(x-t)&=200, \\ 28x&=200-8t。\end{aligned} \tag{v}$$

x 用 t 表示，有许多方式，只有

$$x=6+\frac{32-8t}{28} \tag{vi}$$

---

① 程大位《算法统宗》在算经源流中引有《辨古算法》不知是否就是《辨古通源》。

时，t 是整数使 x 有正整数解 $x=6(t=4)$。古人虽无现代代数运算工具，但是杨辉引文给我们以古人获得不定方程特解方法的信息。其中所得温柑数、温柑与绿桔差数。从而得绿桔数与扁桔数，显然是从相当于计算(vi)式，然后回代(iv)，(ii)两式，才得到一组特解。

用同一解法也易于获得《张丘建算经》百钱百鸡题的一组特解 8，11，81。

其二，

“醇酒每斗七贯，行酒每斗三贯，醨酒三斗值一贯。今支十贯，买酒十斗。问：各几何？”（答数：醇酒 6 升，4 贯 100 文；行酒 1 斗，3 贯文；醨酒 8 斗 4 升，2 贯 800 文）杨辉说：“偶见写本，有此类问，亦无成术。”

如设三种酒容量分别为 x，y，z 斗，本题要求解

$$\begin{cases} x+y+z=10, \\ 7x+3y+\frac{1}{3}z=10。\end{cases} \tag{i}$$

那么非负整数解仅有 $x=1$，$y=0$，$z=9$ 一组。杨辉就事论事论此题解法：“宜云，三价中以一价除出一位所得之数，其余二物共价，如双身法(二元适定方程)求之。”这是说先假设某一种酒，不妨说是 $y=1$，在酒容量及酒所值中分别除去它相应的数，于是(i)变成

$$\begin{cases} x+z=9, \\ 7x+\frac{1}{3}z=7。\end{cases} \tag{ii}$$

解此方程组这就得到答数：$x=0.6$，$y=1$，$z=8.4$(非整数解)

杨辉所拟题及其解法对解其他同类型题也有指导意义，第一例解法与阿拉伯数学家阿尔·卡西《算术钥》(1427 年)百钱百鸟

题相像[①]。第二例解法与清代学者解百钱百鸡题设想相像[②]。

二　同余式(组)

在《续古摘奇算法》卷上杨辉有多处论同余式(组)，可以分为三种类型

同余

“求本年内日甲起例[③]

乙亥年[④]正旦癸酉。问十一月二十六日冬至是何日甲?[⑤]答曰：壬辰。

总术曰：置正旦积数(有图在后)求只月[⑥]者，加三十，求双月，只加零日；退小尽。遇闰月通理。满六十去之，以所存余数，命日甲数图。”

后面附有两张图(表)

岁旦日甲积数图[⑦]

丁酉 1	戊戌 2	己亥 3	庚子 4	辛丑 5	壬寅 6	癸卯 7	甲辰 8
乙巳 9	丙午 10	丁未 11	戊申 12	己酉 13	庚戌 14	辛亥 15	壬子 16
癸丑 17	甲寅 18	乙卯 19	丙辰 20	丁巳 21	戊午 22	己未 23	庚申 24
辛酉 25	壬戌 26	癸亥 27	甲子 28	乙丑 29	丙寅 30	丁卯 31	戊辰 32
己巳 33	庚午 34	辛未 35	壬申 36	癸酉 37	甲戌 38	乙亥 39	丙子 40
丁丑 41	戊寅 42	己卯 43	庚辰 44	辛巳 45	壬午 46	癸未 47	甲申 48
乙酉 49	丙戌 50	丁亥 51	戊子 52	己丑 53	庚寅 54	辛卯 55	壬辰 56
癸巳 57	甲午 58	乙未 59	丙申 60				

---

① 第五编第一章第三节第四段。

② 沈康身．九章算术导读．p. 585

③ 原著如此，义为求本年内某日天干地支序号。

④ 乙亥即 1275 年。

⑤ 求此日天干地支序号。

⑥ 杨辉定义只月(奇数月)为小月，29 日；双月为 30 日。

⑦ 此表以丁酉为首序号为 1，第 61 日又是丁酉，60 日为一周期。

术文是说，在“积数图”内查出癸酉相对于以丁酉为首数的序号(37)，是十一月(只月)，加 30，加零日(26)；退小尽[1] (6)，总和为 $37+30+26-6=87\equiv27 \pmod{60}$。杨辉另造取年内日甲图，以丙寅[2] 为首数作天干地支顺序。其 27 号为壬辰，即作为答数。

显见杨辉以此题阐明同余概念，以模 29，30，60 来确定今年内某日的天干序号，是很有意义的练习。

但是此题及其术文、答数都误。其一，阴历并不永是奇数月是小，偶数月是大。其二，即使假定奇月小，偶月大，那么十一月初一日以前已过月数为 10，已过日数为 5(60－1)。又如设乙亥年正旦癸酉(年初一)在积数图内序数为 m，所求十一月干支日是第 n 日，那么那一日干支序号应是

$$m+n-1+5(60-1) \pmod{60} \equiv m+n-6 \pmod{60}。$$

本例 $m=37$，$n=26$ 答数是 57，癸巳。并非壬辰。

此外，不知道为什么积数图以丁酉为首。如果以甲子为首(见第四编第四章第三节大衍类范题分析古历会积脚注)更符合传统历法习惯。

公共周期

杨辉举了三例，相当于解同余式组 $x\equiv0 \pmod{m_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$

其一是《孙子算经》卷下第 35 题(三女归逢)。这相当于解

$$x\equiv0 \pmod 3\equiv0 \pmod 4\equiv0 \pmod 5。$$

术文说：“三、四、五日相乘”。这里三模两两互素，所求公共周期 $x=\{3,4,5\}=3\times4\times5=60$。

其二“乙亥年正月初十午日逢角宿。问：后何日再会?”(答

① 小尽，小指小月，小尽指在问题时间范围内的小月数。

② 丙寅上距首数丁酉 30－1＝29 日。

数：168日）这相当于秦九韶“古历会积”或“治历演纪”题的补充题。就原理说，都是求周期的公共周期，只是少了一个周期，且周期数据简单：都是整数。但较孙子题加深一步：模不两两互素，作为孙、秦题的过渡，就数学教学说很是相宜。

角宿是二十八宿之一，我国古代天文学家在天球黄道、赤道两侧选定28个区域，各以特定恒星为观测点。其视运动为28日绕天极一周。题目是说：正月初十天干序为午日[①]，在固定观测方向看到角宿。问：几日以后的午日又看到角宿？这显然是求：

$$x(\text{日})\equiv 0 \pmod{12}\equiv 0 \pmod{28}。$$

术文说：“二位相乘（得三百三十六，折半（一百六十八日）。”按照秦九韶两两连环求等的算法，所求应是

$$x=12\times 28\div(12,28)=84,$$

可见本题的解，杨不如秦，所求数不是最小公倍数。

其三“甲戌年（1274年）正月十七乙未日遇昴宿。问：何日再会？”（答数：乙亥年3月24日）

昴宿也是28宿之一，问题是求下次乙未日又遇昴宿，要过多少时间？所求数当是 $x\equiv 0 \pmod{60}\equiv 0 \pmod{28}$ 其最短时间是 $x=60\times 28\div(60,28)=60\times 28\div 4=420$（日）“术曰：二位相乘、折半，或再折半，皆可相会。”杨辉意识到420，840都是答数，而且他还进一步计算”定所会日。以求出月数（420日作14个月）并（加上）原问月日（正月一月十七日），加小尽（甲戌年6个小月，乙亥年正月小月），并为（15个月又24日）所会月日。

本题杨辉所作解无误[②]。

一次同余式组

关于余数都不等于零的同余式组，杨辉在《续古摘奇算法》卷

---

① 午至午，地支一周期为12日。

② 联系到第五编第二章第二节傅种孙所举第3例有异曲同工、古今相通之妙。

上举5题，其中第1题即《孙子算经》卷下第26题(物不知数)。所提解法(术文)大致就是孙子原著。他又从孙子比较隐晦的叙述，深明其确实含义后，又摹拟设题四问，模数仍都是两两互素，但富有变化，同余式个数也增加到四个。各自答数及相应解法和演算(草文)都正确无误，相当于解：

Ⅰ. $x \equiv 2 \pmod 3 \equiv 3 \pmod 5 \equiv 0 \pmod 7$,

Ⅱ. $x \equiv 1 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 8 \equiv 3 \pmod 9$,

Ⅲ. $x \equiv 3 \pmod{11} \equiv 2 \pmod{12} \equiv 1 \pmod{13}$,

Ⅳ. $x \equiv 1 \pmod 2 \equiv 2 \pmod 5 \equiv 3 \pmod 7 \equiv 4 \pmod 9$。

杨辉称其解法为剪管术。把x看成是一根长长的定长管子，按照题给各种模的长度一段一段地剪去，各已知剩下多少长。从剩下的长度，相应的模，求这根管子有多长。如此理解同余式组，形象地道出问题的本质。杨辉所拟题又与生活实际挂钩，应该列入世界数学名题，可惜德人特洛夫凯《初等数学史》卷1第4章未见引用，这是因为杨辉书对外宣扬不够所致。例如上引第1题原著是：“用工不知其数。差人支犒①，每三人支肉一斤，剩五两八铢(乃三数剩二)，每五人支钱一贯，剩零四百(是五数剩三)，每七人支酒一揔，恰撞成揔②。(是七数无剩)问：总工所支各几何?”(答数:98人,钱19贯600,酒14揔,肉312斤10两16铢)

这是说：1(斤)=16×24=384(铢)，5(两)8(铢)=128(铢)，而1(斤)÷3=128(铢)=5(两)8(铢)。以若干斤肉犒赏工人，每3人得1斤，分到最后，剩下5两8铢，$\frac{1}{3}$斤。可见最后1斤肉只犒赏2人，所以杨氏自注“乃三数剩二”。同样的道理：以若干贯钱犒赏工人，每5人得1贯，分到最后剩下400文=$\frac{2}{5}$贯。可见

---

① 犒，义为赏。

② 揔，义为坛。

最后 1 贯钱只犒赏 3 人，杨氏自注“是五数剩三”，就是此意。

杨辉与秦九韶同在南宋京城，但所得数学信息，杨辉远远不如秦氏，以致仅能借助于孙子物不知数题及其解，作走得不太远的探索。前面曾对秦氏大衍术分为八个步骤。由于杨辉所拟题模数均系两两互素，他对上引四题所作解，仅及五步：(i)列出同余式组，(iii)求衍数，(vi)求用数，(vii)求各总，(viii)并总，得所求数。以上引第 4 题为例，其术文说

“二数余一，下三百一十五，5×7×9。

五数余一，下一百二十六，2×7×9；题内余二，下二百五十二，2×2×7×9。

七数余一，下五百四十，6×2×5×9；题内余三，下一千六百二十，3×6×2×5×9。

九数余一，下二百八十，4×2×5×7；题内余四，下一千一百二十，4×4×2×5×7。

并之，三千三百〇七、满总法。六百三十去之，余百五十七，为答数。”其中乘率 $F_1=1$，$F_2=1$，$F_3=6$，$F_4=4$，全凭猜测或试验，在术文中未见他用过大衍求一术。这又是杨不如秦的另一方面。

第五章 幻方和幻圆

将从 1 至 n^2 的自然数排列成纵横各有 n 个数的正方形(方阵)，使每行、每列，有时还要求每条对角线上的 n 个数的和都等于 $\frac{1}{2}n(n^2+1)$(幻和)。称这样的方阵为 n 阶幻方①，杨辉称为纵横图。幻方现在仍是组合数学研究的课题：广义幻方、幻体、双随机矩阵都是它的推广，探讨中国幻方的发展历程是组合数学前史的重要内容，日益受到国内外数学界的重视。

纵横图是《续古摘奇算法》最重要的内容，列于卷上之首。其中洛书图为三阶幻方，四四图为四阶幻方 2 则，五五图为五阶幻方 2 则，六六图为六阶幻方 2 则，衍数图为七阶幻方 2 则，九九图为九阶幻方 1 则，百子图为十阶幻方 1 则。共幻方 11 例。此外攒九图为幻圆，聚五图、聚六图、聚八图、八阵图、连环图为异形幻圆。共 6 例。

第一节 幻　方

杨辉著录的八种幻方各种都指出幻和及幻方和。其中对于 n 阶幻方和他总结有公式：“并上(1)下(n^2)数，以高数(n^2)乘之，折半，得数”，即 $\frac{1}{2}n^2(1+n^2)$。而幻和，把幻方和“以行数(n)除之”，即 $\frac{1}{2}n(1+n^2)$。

---

① 所有元素加上(乘以)相同自然数称为同型幻方。

他指出三阶、四阶幻方构造法，虽是最低阶幻方构造法，但具有一般意义。

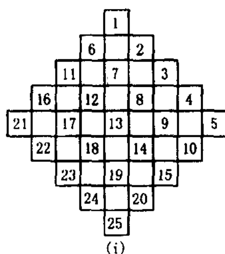
除了十阶幻方例是半幻方外，其余都是幻方，但都不是完美幻方。

一　三阶幻方

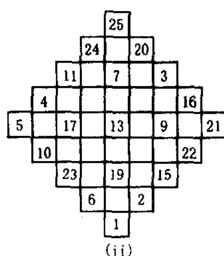
我们知道，三阶幻方只有一个，即洛书图。杨辉说："天数一、三、五、七、九，地数二、四、六、八、十，积五十五。"① 其构造法是"九子斜排，上下对易，左右相更，四维挺出。戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足。"前面四句为构造程序，后四句形象地说明所构造出来的洛书图九个数字的位置。杨氏这一适用一般奇数阶的构造法，与欧洲人所说 Bachet 法相一致，但杨法要早出三百多年。这构造十六字诀还可以推广以构造任何奇阶幻方。以五阶为例：②

(i)"各子斜排"排出自然方阵如图 6.5.1(i)；

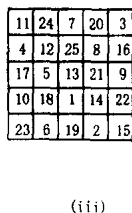
(ii)"上下对易"元素 1，2，10；25，20，24 两两互易位置；



(i)



(ii)



(iii)

图 6.5.1

(iii)"左右相更"元素 21，16，22；5，4，10 两两互易位置，

---

① 《易·系辞上》："天一地二，天三地四，天五地六，天七地八，天九地十……天数二十有五，地数三十。凡天地之数，五十有五。"

② 这"十六字诀"针对五阶幻方，我们据情已改动二字。

其余 13 个元素在原位置保留不动，如图 6.5.1(ii)；

(iv)“四维挺入”把元素 25，24，20；5，4，10；1，6，2；21，16，22 沿 5×5 方阵的边作反射变换，即构成五阶幻方(图 6.5.1(iii))。

二　四阶幻方

对偶数阶幻方中的 $4m$ 型(偶偶数)，杨辉以 $m=1$，即四阶幻方提出两种构造法。

其一，易换法。术文说：“以十六子依次第作四行排列。先以外四角对换，复以内四角对换。”书中的花十六图即借以构造。当 $m=2, 3, \cdots$，偶偶数阶幻方，此法也都适用，只须添加某些条件就可以了。

其二，求等法。杨氏在易换法术文之末还有一段话：“对换止(只、衹)可施之于小。”阶数增大后的偶偶数阶幻方构造不便，他就另作作法：“以子数分两行

(一，　二，　三，　四，　五，　六，七，八
十六，十五，十四，十三，十二，十一，十，九)而(上，下)二子皆等十七。又分为四行，而横行先等(三十四)，乃不易之数。却以此数编排直行之数，使皆如原来一行之积(三十四)而止。绳墨既定，则不患数之不及也。”对一段话的意义，下面试作推导。(图 6.5.2)

16	1
15	2
14	3
13	4
12	5
11	6
10	7
9	8

(i)

13	9	5	1
14	10	6	2
15	11	7	3
16	12	8	4

(ii)

16	9	5	4
14	11	7	2
15	10	6	3
13	12	8	1

(iii)

4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13

(iv)

图 6.5.2

(i)把1～16十六个数，排成二列，两横行上下二数和都是17；

(ii)在此现象启发下，又把1～16排成自然方阵最上最下两行各对应元素差都是3，因此各行元素和之差为12；其中间二行各对应元素差都是1，各行元素和之差为4；

(iii)把(ii)中(13,16)；(1,4)对换，上、下二行元素和都是34。把中间二行(10,11)；(6,7)对换，行的元素和也是34。(iii)中左右列对应元素各差12，总和的差48；中间二列对应元素各差4，总和的差是16；

(iv)是把(iii)中(16,4)；(13,1)对换，左右两列元素和都各等于34，把(11,7)；(10,6)对换，中间两列元素和也都各等于34。并不影响(iii)中各行的和。

已构造成四阶幻方，即杨辉四四图中的阴图。

三 五阶幻方

我们已从杨辉所创三阶幻方十六字诀构造法推广，任何奇数阶幻方可赖以构造，但是他自己却没有发现这一妙用，因此他的五五图二例，俱未发现用此法的痕迹。杨辉也只给出此二例，未作任何构造方法的说明。

文献记载法国科学院院士 B. Frenicle de Bessy 在17世纪时曾以镶边法从小到大以获得任意阶幻方。看来杨辉五五图第一例(图6.5.3)就是用镶边法构成，它的核心幻方是三阶幻方，其镶边的外围十六个数，分成互为补数的八对。从此可见是他有意识地、煞费苦心之作，早出 Frenicle 四百年。

仔细审阅其五五图第一例，其核心三阶幻方乃由元素7,8,9，12，13，14；17，18，19构成。按照十六字诀方法易于构造出以这些元素组成的幻方，其幻和为39。就是把自然数1～25中其他的十六个数，排成分别和为26的八对数对

1	23	16	4	21
15	14	7	18	11
24	17	13	9	2
20	8	19	12	6
5	3	10	22	25

图 6.5.3

1	2	3	4	5	6	10	11
25	24	23	22	21	20	16	15

(上行称为小数，下行称为大数)

由于五阶幻方的幻和是 65，在三阶幻方以外镶一边，如果取右上角为 1，则左下角为 25；那么镶边左列除如果左上角取 21，则右下角取 5，那么镶边左列除了已取 1，5 两元素外，其余取二个大数(否则此列幻和大于 65)。而右行已填 21，25，因此其余三元素非取小数不可。设依次为 x_1，x_2，x_3，而 $21+x_1+x_2+x_3+25=65$，$x_1+x_2+x_3=19$。从小数中挑选三个：$x_1=11$，$x_2=2$，$x_3=6$。左列有相应的元素 15，24，22。类似地考虑上面镶边行非有二大数不可，设左起第二、第三元素为大数 $26-x_4$，$26-x_5$，那么下面镶的边当有幻和内必须有一个大数：$65=5+x_4+x_5+26-x_6+25$

$$x_4+x_5-x_6=9$$

现在仅余下三个小数 3，4，10 就易于确定 $x_4=3$，$x_5=10$，$x_6=4$，这就是五五图第 1 例。以杨辉代数才能，这一系列计算是游刃有余的。

五五图的阴图(图 6.5.4)不是镶边幻方：其核心三阶方阵并

非幻方，它的构造方案很是奇突。有文献指出①这一幻方的构造以1～25的首四数1，2，3，4；中央数，13，末尾四数22，23，24，25按照三阶幻方构造法，把这九个元素布置在(图6.5.5)左上角(4)，上行中(25)，右上角(2)，左行中(3)，中央(3)，右行中(23)，左下角(24)，下行中(1)，右下角(22)作为框架。而其余八对数外层：(19,7)；(15,11)；(12,14)；(6,20)；内层(18,8)；(5,21)；(10,16)；(9,17)的和都等于26。显然框架八个数同方向四对数(2,24)；(25,1)；(4,22)；(23,3)的和也分别等于26。不仅是两条主对角线，中央横行、中央竖行的幻和都是65，而其余四行、四列的幻和也是65。杨辉怎样会设计这一构造法，迄今仍是一个谜，有待人们探索，可以说是一个世界难题。这一幻方每元素加上8，就是幻方图6.5.4。②

12	27	33	23	10
28	18	13	26	20
11	25	21	19	31
22	16	29	24	14
32	19	9	15	30

图 6.5.4

4	19	25	15	2
20	10	5	18	12
3	17	13	9	23
14	8	21	16	6
24	11	1	7	22

图 6.5.5

① Lam Lay-Yong，1977，p. 299

② 显然以1，2，3，…，n^2构成的幻方，$1+h$，$2+h$，$3+h$，…，n^2+h也构成同一类型的幻方，h为任意自然数。

四　六阶幻方

杨辉所作六阶幻方有二例。六阶幻方是奇偶数($2m+2$ 型)的最简单者。这不是按十六字诀偶偶数阶 $4m$ 型，对角线元素对换所能驭。如果是用镶边的办法逐层扩大，获致新的幻方，检验杨辉六阶二例中，不存在中央核幻方。他应别立蹊径构造此二例。李俨《中算史论丛》第四集(1954)："中算家的纵横图研究"有提示："似先制二幅图，再以洛书数代入而得。"据此线索，我们试作探讨，其构造程序为：

(i)把 1～36 排成四列九行矩阵，它有以下性质：

行＼列	4	3	2	1	和
1	28	19	10	1	58
2	29	20	11	2	62
3	30	21	12	3	66
4	31	22	13	9	70
5	32	23	14	5	74
6	33	24	15	6	78
7	34	25	16	7	82
8	35	26	17	8	86
9	36	27	18	9	90
和	288	207	126	45	666

①每行四元素之和依次增大 4；

②每列九元素之和依次增大 81；

③同行第一、四元素和等于二、三元素和。

(ii)把九个行的和形成的等差数列按照洛书图构成十六字诀写出新的三阶幻方[①]

70	90	62
66	74	82
86	58	78

(iii)使这三阶幻方的九个元素各含四列九行矩阵中对应(和)的一行四个数。由于同行内数的特性，可以使排列成二阶"幻方"(仅横行之和相等)。此方阵，六横行幻和是 111，(图 6.5.6)是显然的。三条"双列"十二元素之和是 222 也是显然的事。至于要求六竖列的幻和也是 111，可借助于把二阶"幻方"同一行元素的对换(不影响行的幻和，也不影响双列的元素和)。如(20,11)，(23,14)，两两对换……，就成为杨辉六六图的第一例

① 与洛书图是同型三阶幻方。

(图 6.5.7 左)。注意，它不是半幻方，而是幻方。

(iv)使这三阶幻方的九个元素变换为九个二阶“幻方”后，可以适当作另一番调整,还可以构造出为数众多的其他六阶幻方。杨辉的六六图第二例——阴图，就是其中的一个(图 6.5.7 右)

13	22	18	27	20	11
31	4	36	9	29	2
21	12	23	14	16	25
30	3	32	5	34	7
17	26	10	19	15	24
35	8	28	1	33	6

图 6.5.6

13	22	18	27	11	20
31	4	36	9	29	2
12	21	14	23	16	25
30	3	5	32	34	7
17	26	10	19	15	24
8	35	28	1	6	33

4	13	36	27	29	2
22	31	18	9	11	20
3	21	23	32	25	7
30	12	5	14	16	34
17	26	19	28	6	15
35	8	10	1	24	33

图 6.5.7

五 七阶幻方

杨辉记七阶幻方二例：衍数图[①] 及其阴图(图 6.5.8,左、右)。

46	8	16	20	29	7	49
3	40	35	36	18	41	2
44	12	33	23	19	38	6
28	26	11	25	39	24	22
5	37	31	27	17	13	45
48	9	15	14	32	10	47
1	42	34	30	21	43	4

4	43	40	49	16	21	3
44	8	33	9	36	15	30
38	19	26	11	27	22	32
3	13	5	25	45	37	47
18	28	23	39	24	31	12
20	35	14	41	17	42	6
48	29	34	1	10	7	46

图 6.5.8

说明文字仅："纵横(幻和)一百七十五，共积(幻方和)一千二百二十五。"未及构造法。自来各家注释也未尽如人意。有文献[②] 指出：把 1～49 排出自然数方阵(6,5,…,9 上)，其中九个元素(以外围圆圈为记)，11，17，23；19，25，31；27，33，39 分为三组，它们是以和谐数 $k=8$ 的数列，其中 $a=11$，$h=6$，所构成的三阶幻方，它是衍数图的核心幻方。这里有两个问题：其一，上文已说明 1，2，3，…，n^2 构成了幻方，那么其相应元素以 $1+h$，$2+h$，$3+h$，…，n^2+h 也是幻方。进一步说其相应元素改为 a，$a+h$，$a+2h$，…，$a+(n-1)h$；$a+k$，$a+k+h$，…，$a+k+(n-1)h$；$a+2k$，$a+2k+h$，…，$a+2k+(n-1)h$； … ；$a+(n-1)k$，$a+(n-1)k+h$，$a+(n-1)k+(n-1)h$，仍是幻方。k 被称为和谐数[③]。

① 衍数一词当出自《易・系辞传》："大衍之数五十，其用四十有九。"杨辉与秦九韶是同代人，都受儒家思想影响非常深刻，固以名图。

② Lam Lay-Yong，1977，p. 303

③ W. S. Andrew，Magic Squares and Cuber，NY，1960

其二，怎样把这九个数 11，17，23；19，25，31；27，33，39 构造成幻方？还是仿照 1，2，3，…，9 洛书图构造十六字诀(图 6.5.9 下)。这里所构成的三阶幻方，适是衍数图的核心幻方。在它外围以和为 50 的八个数对：41，9；18，32；36，14；35，15，40，10，38，12；24，26；13，37 构成第二层镶边。又以和为 50 的十二个数对：49，1；7，43；29，21；20，30；16，34；8，42；46，4；2，48；6，44；22，28；45，5；47，3，构成第一层镶边。在镶这两层边时，要解或凑若干线性方程组，杨辉是解题的优胜者。衍数图是其杰作之一。

49	42	35	28	21	14	7
48	41	34	27	20	13	6
47	40	33	26	19	12	5
46	39	32	25	18	11	4
45	38	31	24	17	10	2
44	37	30	23	16	9	3
43	36	29	22	15	8	1

		27		
	33		19	
39		25		11
	31		17	
		23		

		23		
	33		19	
11		25		39
	31		17	
		27		

33	23	19
11	25	39
31	27	17

图 6.5.9

与五五图第二例一样，七七图第二例——阴图，也不是镶边

幻方，其构造法同样是未全解之谜。已有文献指出①，值得我们注意的自然数列 1～49 前面四数，末尾四数及其中央数，恰居自然数 1～9 构成的洛书图。各元素按大小排列在相应位置：

```
4  9  2          4   49   2
3  5  7 ———→ 3   25   47
8  1  6          48   1   46
```

可以认为以 25 为核心，四个数对：2，48；49，1；4，46；47，3 都有等和 50。而其外围内、中、外三重镶边，中心对称，另外二十四个数对：

内层：四个和为50的数对，27，23；11，39；26，24；45，5。

中层：八个和为 50 的数对，15，35；36，14；9，41；33，17；8，42；22，28；37，13；31，19。

外层：八个和也是 50 的数对，21，29；16，34；40，10；43，7；30，20；32，18；2，38；6，44。

经过这样布局，其主对角线，其纵横中央行列幻和显然都等于 25＋50×3＝175。而其余行、列竟也有幻和 175。也就是说杨辉所作阴图(图 6.5.8 右)是幻方！这当然不是偶合。但是他为什么要选择 1，2，3，4；25；46，47，48，49 排列成洛书图框架？怎样安排这二十四数对，使这方阵刚好是幻方？必须经过解许多次线性不定方程组，其艰巨劳动是不言而喻的。

六　八阶幻方

杨辉八阶幻方有二例：易数图及其阴图(图 6.5.10，6.5.14)易数源自八卦，衍为六十四卦，因以名图。此二图仅注："纵横二百六十(幻和)，共积二千八十(幻方和)，"余未着一字。此二图如何构造，各家众说纷纭。

---

① Lam Lay-Yong，1977，p. 304

61	4	3	62	2	63	64	1
52	13	14	51	15	50	49	16
45	20	19	46	18	47	48	17
36	29	30	35	31	34	38	32
5	60	59	6	58	7	8	57
12	53	54	11	55	10	9	56
21	44	43	22	42	23	24	41
28	37	38	27	39	26	25	40

图 6.5.10

关于易数图。从杨辉所给结果我们得到启示，构造偶偶阶数幻方的另一种一般方法，以四阶幻方为例。先把 1～16 自然数按序，如下排成两双列：

12	5	16	1
11	6	15	2
10	7	14	3
9	8	13	4

2	15	16	1
7	10	9	8
13	3	4	14
11	6	5	12

40	25	48	17	56	9	64	1
39	26	47	18	55	10	63	2
38	27	46	19	54	11	62	3
37	28	45	20	53	12	61	4
36	29	44	21	52	13	60	5
35	30	43	22	51	14	59	6
34	31	42	23	50	15	58	7
33	32	41	24	49	16	57	8

左右两双列，同行各含二元素，共八行，都有等和是四阶幻和之半 17。调整各双列元素结构，相当于在正方形方阵内先把自然数 1～8 从右上角开始，逆时针(1,2)离开中轴，(3,4)贴紧中轴；顺时针(5,6)贴紧中轴，(7,8)又离开中轴。再在这八个数同行近旁，添写具有等和的补数 16，15，14，13，12，11，10，9。新的四阶幻方已构成，理由是显然的。

同样方法可以构造杨辉的易数图。

把 1～64 自然数按序、如下排成四双列。同行各含二元素，共三十二行，都有等和，是八阶幻和之半，65。调整各双列元素结

构，相当于在正方形方阵内先把自然数 1～32 从右上角开始：逆时针(1,2)离开中轴，(3,4)贴近中轴；(5,6)离开中轴，(7,8)贴近中轴；顺时针(9,10)，(11,12)，(13,14)，(15,16)；逆时针(17,18)，(19,20)，(21,22)，(23,24)；又顺时针(25,26)，(27,28)，(29,30)，(31,32)布置完毕，然后在这三十二个数同行近旁添记具有等和 65 的补数。易数图已构成。

李俨另有设想①：把 1～64 自然数排成双列，然后循折线路径排入正方形方阵内，惜未示理由。(图 6.5.11)

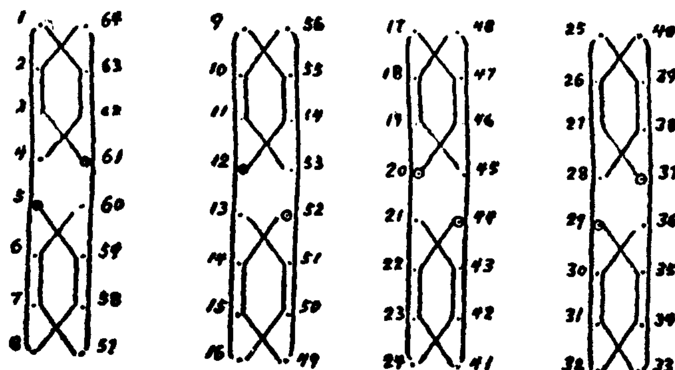


图 6.5.11

关于阴图，杨辉在四阶幻方花十六图所示构造方法可以造出任意偶偶数阶幻方，用同样方法杨辉填记了阴图。

把 1～64 自然数排成如下正方形方阵，并分成上、下、左、右四块，每块含十六个元素，划上四个交叉对角线对，对角线所划到的三十二个元素在原位置保留不动，其余三十二个元素按规则两两相对于方阵对称中心对换。它们是：(63,2)，(62,3)，(59,6)，(58,7)，(45,16)，(41,24)，(17,48)，(9,56)，(53,12)，

① 李俨．中算史论丛．第一集，1954：191

(45,20)，(42,13)，(44,21)，(31,34)，(30,15)，(27,38)，(26,39)这些数对都有等和 65。这就构造出幻方。(图 6.5.12)设想(图 6.5.13)

57	58	59	60	61	62	63	64
49	50	51	52	53	54	55	56
41	42	43	44	45	46	47	48
33	34	35	36	37	38	39	40
25	26	27	28	29	30	31	32
17	18	19	20	21	22	23	24
9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	3	4	5	6	7	8

57	7	6	60	61	3	2	64
16	50	51	13	12	54	55	9
24	42	43	21	20	46	47	17
33	31	30	36	37	27	26	40
25	39	38	28	29	35	34	32
48	18	19	45	44	22	23	41
56	10	11	53	52	14	15	49
1	63	62	4	5	59	58	8

图 6.5.12

把它贴在圆筒上，使以 57 开头的列，与以 64 的头的列相邻，然后再沿以 60，61 为首的列相邻线剪开，摊平，就成为阴图。(图 6.5.14)

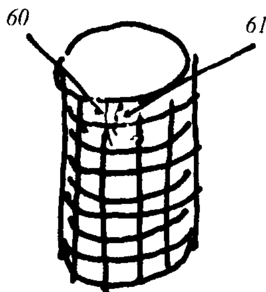


图 6.5.13

61	3	2	64	57	7	6	60
12	54	55	9	16	50	51	13
20	46	47	17	24	42	43	21
37	27	26	40	33	31	30	36
29	35	34	32	25	39	38	28
44	22	23	41	48	18	19	45
52	14	15	49	56	10	11	53
5	59	58	8	1	63	62	4

图 6.5.14

李俨另有设想①，把 1～64 自然数排成双列(图 6.5.15)，然后循折线路径排入方阵内，也可获得此阴图，惜也未示理由。

① 李俨．中算史论丛，第一集．1954：194

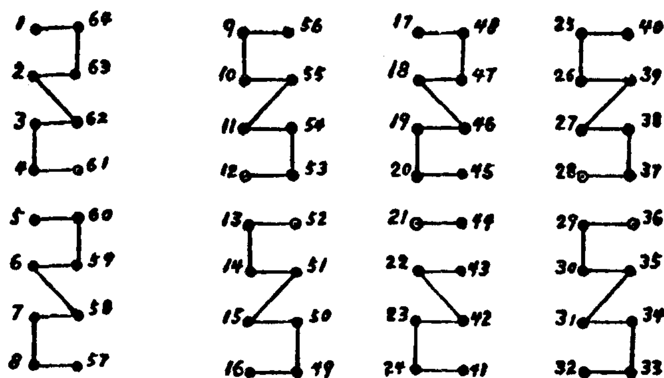


图 6.5.15

七 九阶幻方

杨辉造九阶幻方一则，称九九图(图 6.5.16)只说其纵横三百六十九，共积三千三百二十一，未言其所自。李俨认为“九九图与六六图具同样性质，且为洛书图的复形。”我们据以详注。

(i)把 1～81 排成九行九列矩阵。它有下面的性质：

①每行九元素之和依次增大 9。

②每列九元素之和依次增大 81。

③同行第一、六、八，二、四、九，三、五、七元素和相等。

行＼列	9	8	7	6	5	4	3	2	1	和
1	73	64	55	46	37	28	19	10	1	333
2	74	65	56	47	38	29	20	11	2	342
3	75	66	57	48	39	30	21	12	3	351
4	76	67	58	49	40	31	22	13	4	360
5	77	68	59	50	41	32	23	14	5	369
6	78	69	60	51	42	33	24	15	6	378
7	79	70	61	52	43	34	25	16	7	387
8	80	71	62	53	44	35	26	17	8	396
9	81	72	63	54	45	36	27	18	9	405
和	693	612	531	450	369	288	207	126	45	3 321

31	76	13	36	81	18	29	74	11
22	40	58	27	45	63	20	38	56
67	4	49	72	9	54	65	2	47
30	75	12	32	77	14	34	79	16
21	39	57	23	41	59	25	43	61
66	3	48	68	5	50	70	7	52
35	80	17	28	73	10	33	78	15
26	44	62	19	37	55	24	42	60
71	8	53	64	1	46	69	6	51

图 6.5.16

(ii)把九个行的和形成的等差数列按照洛书图构造法写出三阶幻方，每元素各自又构造一个小三阶幻方。

360	405	342
351	369	387
396	353	378

(iii)使这些小三阶幻方的九个元素各含九行九列矩阵中对应(和)的同行九个数。由于同行内的数的特性又可以排成三阶方阵。使三行各自含有等和的数。又在同行内对换所含数(这并不影响行的幻和)使九阶方阵最终成为幻方。使人特别感到有兴趣的是 1～9 九个数所居位置刚好在九个小三阶幻方中央列的最下面一格。

因此，杨辉对九九图的构造法对于 $3n$ 阶幻方的构造有一般意义。

八　十阶幻方

杨辉造十阶幻方一则，称百子图(图 6.5.17)，只注云："纵横五百五，共积五千五十。" 对其构造程序也无叙说。有文献[①] 认为杨辉有可能按下面程序构造

① Lam Lay-Yong, 1977, pp. 310～311

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

图 6.5.17

(i)写出 1～100 十行十列自然数方阵，使每行有十阶幻方幻和 505(下表)。

(ii)在行的幻和不变前提下调整列中元素位置。在奇数行中(1,10)，(2,9)，(3,8)，(4,7)，(5,6)各列元素对换，其结果如下页表，偶数列和比幻和都少 5，而奇数列和都大 5。

列 行	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	和
1	100	81	80	61	60	41	40	21	20	1	505
2	99	82	79	62	59	42	39	22	19	2	
3	98	83	78	63	58	43	38	23	18	3	
4	97	84	77	64	57	44	37	24	17	4	
5	96	85	76	65	56	45	36	25	16	5	
6	95	86	75	66	55	46	35	26	15	6	
7	94	87	74	67	54	47	34	27	14	7	
8	93	88	73	68	53	48	33	28	13	8	
9	92	89	72	69	52	49	32	29	12	9	
10	91	90	71	70	51	50	31	30	11	10	
和	955	855	755	655	555	455	355	255	155	55	5 050

行＼列	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	和
1	1	20	21	40	41	60	61	80	81	100	505
2	99	82	79	62	59	42	39	22	19	2	
3	3	18	23	28	43	58	63	78	83	98	
4	97	84	77	64	57	44	37	24	17	4	
5	5	16	25	36	45	56	65	76	85	96	
6	95	86	75	66	55	46	35	26	15	6	
7	7	14	27	34	47	54	67	74	87	94	
8	93	88	73	68	53	48	73	28	13	8	
9	9	12	29	32	49	52	69	72	89	92	
10	91	90	71	70	51	50	31	30	11	10	
和	500	510	500	510	500	510	500	510	500	510	5 050

(iii)注意到各列都普遍存在和是100的相邻数对，而上、中、下同列相邻三连数之和的差具有一定规律。例如第七、八、九三行第一、二列、三、四列，五、六列，七、八列，九、十列各自三数和之差都是5。那么把它们对换，就成为百子图，纵横都有和505。

李俨对百子图评说："图仅纵横可合五百五，于隅径不能合。"他另拟构造法如图6.5.18，惜未叙述理由。我们认为上文分三步骤所解释的构造程序能够符合杨辉所处历史背景。步骤(i)保证横行和满足幻和，(ii)在不影响横行幻和条件下，大刀阔斧地使纵列元素和趋近幻和(iii)审视情况，又作合理微调，这种处理方式是有一般意义的，百子图是一范例。

第二节　幻圆、异形幻圆

幻圆——杨辉所作攒九图，史无前例。(图6.5.19)四个同心圆上各自有八个数(连同中心数9)，四条直径上九个数各自的和

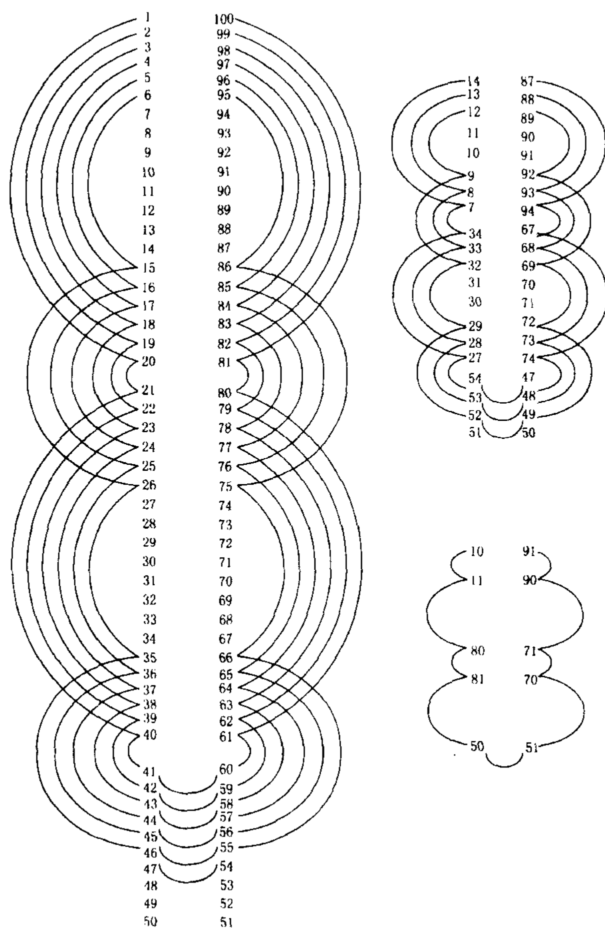


图 6.5.18

都是定值 147。幻圆中元素为 1～33 的自然数。

此外，在《续古摘奇算法》卷上还有异形幻圆五幅，现简述如下：

聚五图(图 6.5.20)自然数“二十一子，作二十五子用”圆环

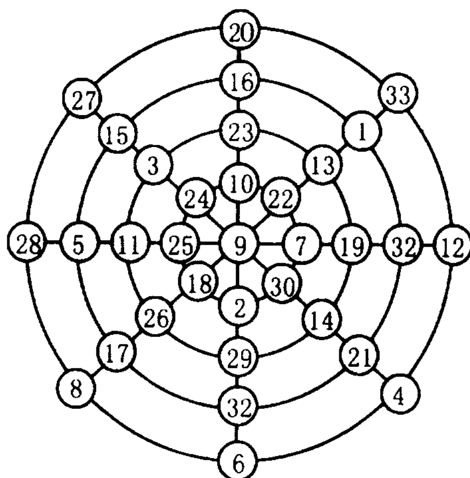


图 6.5.19

上(含中心)元素和都是 65。

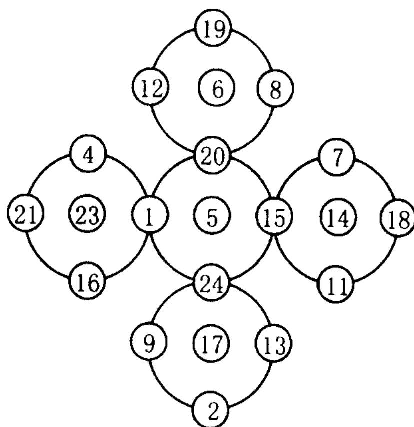


图 6.5.20

聚六图(图 6.5.21)1～36 分成六圆环。“六子回环、各一百一十一”。

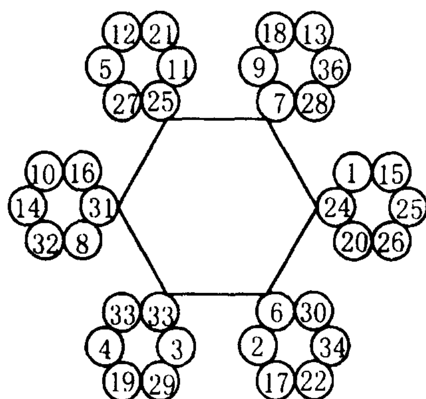


图 6.5.21

聚八图(图 6.5.22)1～24 分成四圆环“二十四子，作三十二子用”。同环八元素和都是 100。

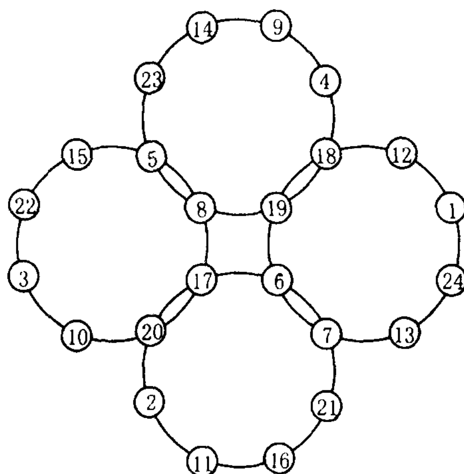


图 6.5.22

八阵图(图 6.5.23)1～64，分成八圆环“八八六十四子，总积二千八十。以八子为一队，纵横二百六十。以大辅小，而无强弱

不齐之数，示均而无偏也。”这是说每环上元素和为 260。而且每环上以四个元素为“角”作纵横两长方形。长方形“角”上元素和都相等，等于 130。

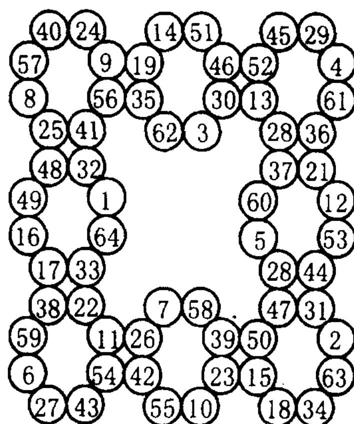


图 6.5.23

连环图(图6.5.24)1～72合成“七十二子,总积二千六百二

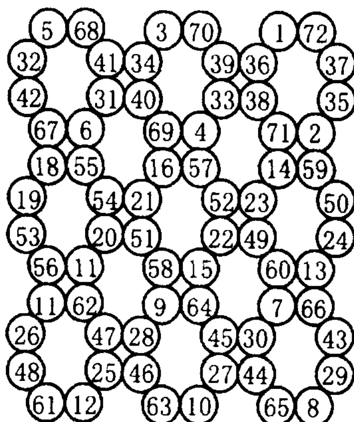


图 6.5.24

十八。以八子为一队，纵横各二百九十二。多寡相资，邻壁相兼，化一十三队，此见运用之道”。与八阵图相仿。每环上以四个元素为角作纵横两长方形，长方形“角”上元素和都相等，等于146。所谓十三队，见图自明。

杨辉所作幻圆和异形幻圆为后世提供崭新的研究课题，对国内外产生很大影响，可惜他没有阐明构造方法。

第六章　杨辉的数学思想

杨辉留给我们的知识财富，还在于他的至今犹有重要教益的数学思想，以下分三节阐述。

第一节　革故创新精神

杨辉本为南宋一介书生，曾为小吏，未见经传。在他所著书中敢想人所不敢想、疑古、革故，怀疑是新生事物诞生的重要条件，杨辉所为，值得我们缅怀和崇敬。

一　对《九章算术》的看法

曾在本《大系》第二卷《九章算术》评说一节中指出《九章》在编书体例上前后有殊。有的算题在前，术文在后。如方田章各术，而今有术、盈不足术则反是。而全书一般都按算题性质分类如商功章、“方程”章，而有些章则选材庞杂：如方田章在讨论图形面积的同时插入许多分数四则问题。在封建社会《九章算术》被奉为经典，人们尊为黄帝所作，谁甘千夫所指，擅自妄改？杨辉作“九章算术纂类”作为《详解九章算法》第十二章。杨辉虽深知：“九章为算经之首，盖犹儒者之六经，医家之难素，兵法之孙子”，但是他指出：“九章题问颇隐，法理难明，不得其门而入。于是以答参问，用草考法，因法推类，然后知斯文非古之全经也。将后贤补赘之文，修前代已废之法，删立题术，又纂法问，

详著于后。"[①] 他大胆设想把《九章算术》术文及问题重新分类(将在第二节讨论)。他认为这样做，胜于前人。他就不畏人诋纂类为篡类，而是理直气壮、心安理得地探索着：例如把不同性质的少广术、开平方术、开立方术分列两章，把均输术并入衰分术，把贵贱率、反其率、分率三术并为一章，而把"方程"术、损益术、正负术归为另一章，都是正确的见解。

在具体算题安排的章，他更提出不少中肯的意见，这应该说是有目共睹，如果能重新调整，《九章算术》将益加和谐、得体。例如盈不足章第16题(石中有玉)杨辉在解题中注说："贵贱分率之问，借盈不足为问"，他径以其率术解题。又如均输章第5题(三人舂粟)、衰分章第8题(五官出钱)分隶两章，很不合理。杨氏评论说："此问……率数不同，求米相等，须反衰之。……与五爵均钱，高爵出少，以次渐多，同问。"

二　对《海岛算经》的看法

从刘徽《九章算术注·原序》知原著有图、注，从刘注《九章算术·勾股》可见当时《海岛算经》刘注非常精彩，可惜经过一千年后，杨辉所见《海岛》已面目全非。杨氏对此有微词："《海岛》……实《九章》勾股之遗法也，迄今千余载间，唐李淳风而续算草，未闻解白作法之旨者。……本经题目广远，难以引证，学者非之。"于是他冥思苦索："辉尝置《海岛》小图[②]（图6.6.1)于座右，乃见先贤作法之万一。"他终于得出可能符合的刘徽原证设想。

① 《详解九章算法·纂类》前言。

② 图6.6.1采自1842年宜稼堂丛书本。

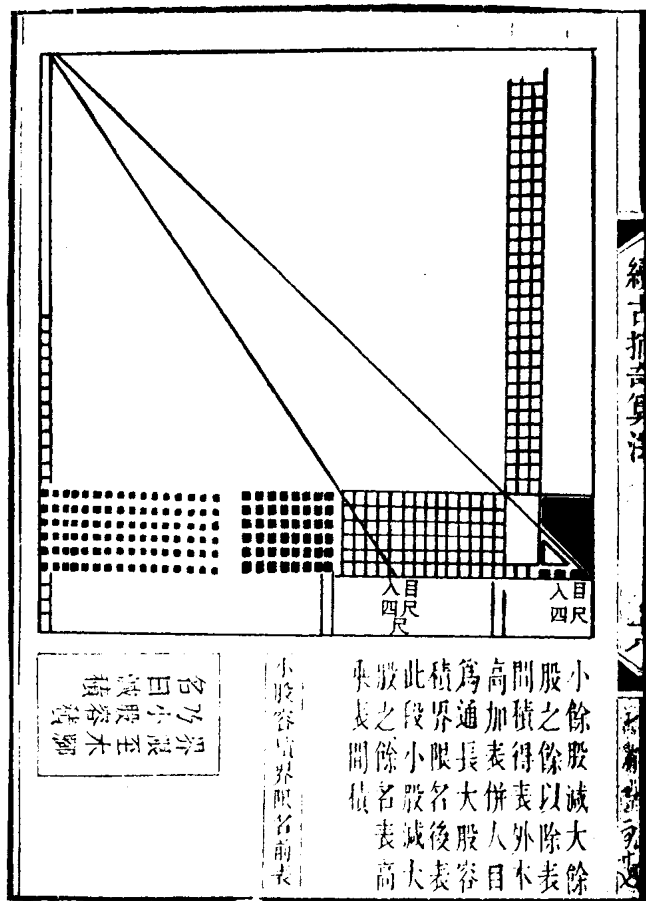


图 6.6.1

三　　对《五曹算经》的看法

《五曹算经》系北宋元丰官刊九部算经之一。在《田亩比类乘除捷法》卷下一开始，杨辉就提出："五曹刊误三题"。

其一，“五曹云：方田正中有桑，至隅一百四十七步。问：田几何？合计一百八十亩一十八步。”杨辉说：“五曹法误，答一百八十三亩一百八十步。”杨辉又指出错误的原因：“以五乘七除，即方五斜七之义，所以［误］答前数。然不可用方五斜七之法。”他又作出正误：“当二乘隅，为方田之弦步，自乘，折半，开平方除之，取田方一面之数，以方自乘，即得所答。”这就是所求田积

$$A=\left(\sqrt{(147\times2)^2\div2}\right)^2\div240=147^2\times2\div240$$
$$=180(\text{亩})18\text{［方］步。}$$

杨辉这一批判是有普遍意义的。现传本李冶《益古演段》就有以近似值代替准确值的谬误做法。书中都用方五斜七之说，甚至取单位正方形斜边平方时仍固执用

$$\left(\frac{7}{5}\right)^2=1.96\text{，不用}\left(\sqrt{2}\right)^2=2$$

致使不能还原。

其二，“五曹曰：墙田① 方围一千步，问：田几何？答曰：二百六十亩一百步。”杨辉批判说：“田形既方，不当曰墙田。只当直云方田若干为题，其术称以四除一千步，得二百五十步，自乘为积，亩法除之。四除外围，不可施于直。恐例将直田（长方形）外围四而取一，为方面，乘积，岂不利害？往往曾见有人误用此术所以言之。”杨辉是说已给周长，不能得到长方形面积。如果是正方形，应讲清这一必要条件。接着杨辉又举例说：“假如有田东西八步，南北六步。本积四十八步。若以外围量之，乃是二十八步。用四除，为七步，自乘即是四十九步。不可用外围两折半之法。”

其三，“五曹四不等田，东三十五步，西四十五步，南二十五步，北一十五步。问：田几何？”答称“三亩八十步，非。”这个非字道出杨辉对四不等田面积公式 $A=\frac{1}{2}(a+b)\cdot\frac{1}{2}(c+d)$ 的否定。

① 指方田外围墙，只知周长，求田的面积，《五曹算经》已给条件是不够的。

第二节　逻辑思维能力

杨辉和其他中算家一样，经过长期数学实践、师弟相承、自我锤炼、相互薰陶，都具有良好训练，他们的论述能够经受今日逻辑基本规律要求的检验而屹立世界数学史册。

一　逻辑思维的一般规律

逻辑思维的一般规律，体现正确思维的根本特点：确定的，无矛盾的，一贯的和有充分根据的。为正确地认识客观世界和表达自己的思想，含数学在内的一切学科必须遵循这些规律。逻辑学上把上面的根本特点归纳为四律。

同一律：在进行论断和推理的过程中，每个概念都应当在同一意义上使用。上文所举杨辉之所以要把《九章算术》各术重新分类，把部分算题重新安排章次，正是基于同一律的要求。既然其率术是讨论按质（贵、贱）分档定价，那么盈不足章“石中有玉”题就应移入其率术中讨论。

矛盾律：同一对象，在同一时间和同一关系下，不能具有两种互相矛盾的性质。上文所举方五斜七说，最早文献，见刘徽注《九章算术·勾股》第 11 题（户高于广），这只是近似值，近似值与真值互相矛盾。杨辉非议《五曹算经》方田有桑题就运用了矛盾律，使避免产生单位正方形对角线长的平方是 1.96 的矛盾。

排中律：同一对象在同一时间内和同一关系下，或者具有某种性质，或者不具有某种性质，二者必居其一。不存在第三种情况。上文杨辉揭露《五曹算经》墙田题面积有误，即运用了排中律。问题的答数是、非必居其一，无第三种情况，四不等田本身。以对边平均数乘积取为面积是很粗糙的公式。杨辉为揭露公式之谬，据已给四边分割图形为一梯形及一直角三角形，杨辉以为所

分割的二图形面积和为真，得到有异于五曹答数。杨辉在原答后所写的“非”字体现他的排中律思想。就逻辑手段说是正确的。

充足理由律：特定事物之所以具有某种性质，是因为它有着现实的根据，有一定的先行于它的条件所决定。上文说杨辉对《海岛算经》的微词：“未闻解白作法之旨”即是指原著有术无证、无推导。而杨辉自己迈出可喜的步伐，以出入相补、以盈补虚原理，作了逻辑推导，解开千年之谜。在其原著中还有多例说明他善于运用此律解释数学中的形与数各种现象。

二 概念的分类

给概念下定义和分类是对概念所作的两种重要逻辑手段。在杨辉原著中对概念分类的工作做得尤为突出，我们就重点据以分析。

《九章算术》分类

由于《九章算术》是秦汉五百年间长期辑录成书，九章分类标准不统一，有的按生活、生产现象划分，有的按不同算法划分，这就难免重复、遗漏。杨辉经过深思熟虑，他“以答参问，用草考法，因法推类。……详著于后，倘得贤者改而正之，是所愿也。”作为《详解九章算法》第12章的纂类，他把全书246问[①]以不同算法为标准，分为乘除、互换、合率、分率、衰分、叠积、盈不足、方程、勾股九门[②]，这是大框架，每门仍以算法为标准根据需要细分小框架，最基本的单元——术，术下为题。九章全书归纳为69术。本《大系》第二卷综论《九章算术》，其第二编讨论内涵，第一章第四节“术文集成”也曾考虑以术分类。这些术文对所驭问题有一般意义：只要把所指形(或数)易为字母，就与今称

① 有的题一题分隶二门，也有的题未录，被遗漏。

② 杨辉分类法也有缺点，见钱宝琮(1921)论文。

定理、法则或公式无异。有些术文则就事论事，术文依照问题数据陈述，未予抽象。这些术中有些原著未予命名，本卷都尊重实况各给名称。杨辉所分小框架单元数与本《大系》所分可谓不谋而合。为领会杨辉分类精神和查考方便，现列表如下(表 6.6.1)。

表 6.6.1

序号	门	《纂类》名称	《大系》名称
第一	乘除	直田法 里田方田法 圭田法 斜田法 圆田法 宛田法 弧田法 环田法 约分法 合分法 课分法 平分法 乘分法 除分法 经率法	 方田、里田术 圭田术 斜田、箕田术 圆田术 宛田术 弧田术 环田术 约分法 合分法 减分、课分术 平分术 乘分、大广田术 经分术 经率术
第二	互换	互换乘除法 先取用而求互换	今有术 贷人千钱术、客去忘衣术，善行百步术
第三	合率	少广法 反用合分法 并率除法	少广术 凫雁术 三丝互换术
第四	分率	贵贱率 反其率法 分率法	其率术 反其率术 五人分钱术
第五	衰分	衰分法 均输法	衰分术，反衰术 均输术，锥行衰术

续表

序号	门	《纂类》名称	《大系》名称
第六	叠积	商功求积法 城垣堤沟堑渠法 垣积求广术 方堡垮法 圆堡垮法 方亭法 圆亭法 方锥法 圆锥法 堑堵法 阳马法 鳖臑法 刍童法 刍甍法 羡除法	地积术 城垣堤术 垣积求广术 方堡垮术、仓积求高术 圆堡垮术、圆囷求周术 方亭术 圆亭术 方锥术、委粟术 圆锥术、委粟术 堑堵术 阳马术 鳖臑术 刍童术、曲池术 刍甍术 羡除术
第七	盈不足	盈不足法 两盈、不足法 盈朒、适足法	盈不足术 两盈、两不足术 盈不足、适足术
第八	方程	方程法、损益术、分母子术 正负法	方程术 正负术
第九	勾股	贾宪立成释锁平方法 增乘开平方法	开方术、开圆术
		贾宪立成释锁立方法 增乘方法	开立方术、开立圆术
		勾股求弦法、弦勾求股法 股弦求勾法	勾股术
		股弦较与勾求弦法	圆材埋壁术、葭生中央术
		股弦和与勾求股法	竹折抵地术
		勾股求弦和较法	勾中容圆术
		勾腰容方法	方邑见木术
		勾股较与弦求股法	户高于广术
		勾弦和、股率求勾股法	二人同立术
		勾股较、股弦较求勾股	纵横不出术
		勾股旁要法	勾中容方术
		余勾股求容积法	四表测木术

在上表中于算题与术文归类方面，杨辉是有见地的，反映他

对《九章算术》的真知灼见。例如

——减分、课分各题归为一类，

——斜田、箕田归为一类，

——凫雁术所驭各题（均输章第 9，20 至 26 共八题）归为一类，

——委粟各题从算法讲应归为圆锥术，

——仓积求高归入方堡垛、圆囷求周归入圆堡垛在某些意义上也是合理的。

勾股术分类

前面已在第三章几何第一节勾股术中所介绍的杨辉所作“勾股生变十三名图”（表 6.3.1），事实上也是他对《九章算术·勾股》原先杂乱无章的各种算题的合理分类。可以认为这是“纂类”勾股门的另一种说法及其改进。我们知道对概念的正确分类应遵守规则：分类应当相称（概念的外延无重复，无遗漏），分类应当有同一根据（分类标准），分类所得子项应当互斥，分类不应当越等。现以此来检验十三名图，勾股弦关系的分类是严格达标的：

对于勾(a)，股(b)，弦(c)三元素

(i)各取一个元素，有、仅有 3 种：a，b，c；

(ii)各取两个元素，有、仅有 3 种：a，b；b，c；a，c；

分别取和，有、仅有 3 种 $a+b$，$b+c$，$a+c$；

分别取差，有、仅有 3 种：$b-a$，$c-b$，$c-a$。

(iii)共取三个元素，有、仅有 1 种：a，b，c。

取其和差关系，有、仅有 4 种：

$a+b+c$，$a+b-c$，$a+c-b$，$c-(b-a)=c+a-b$

共计 13 种（非负值）。

三　　抽象与概括

抽象与概括是重要逻辑方法之一。抽象与概括是统一的不可

分割的思维过程：将同一种类对象的本质属性集中起来，结合为一般的类的属性；将其余的非本质属性抽离出去。

杨辉所著书中抽象化思维佳例选说如下。

“方程”术

《九章算术·方程》一开始为“方程”术，以第1题(三禾求实)已给上中下禾三次脱粒抽样，列线性方程组，从具体数据解释怎样解题。[1] 杨辉对“方程”术的抽象与概括，有两个层次。

其一，在第1题后“解题”中作一般解释(抽去具体数据)“众物总价，隐互其实。上问以三禾之数，欲分其实。当求其上中下禾，禾各见一位。如商除之，本倍折减损之间，初无活法，今述此意”。杨辉所称活法，就是一般适用之法。“排列逐项问数，某物某物，其值几钱，为一行。某物某物共值几钱，为一行。”这就是列出线性方程组，“命首位物多者为主，彼七此五，以七为多。以邻行数增乘求等，数等可以减损，余物与价，即总数也。亦例乘之，一物既增，余物与价，亦各升为一总。以原多物行内数目对减。谓物减物，钱减钱，求轻一位。其余次第增减。……以求位简，价可为实，物可为法而止。以法除之。”杨辉又以第1题具体数据借助于所抽象的理论解出答数。

其二，在方程章十八个题之后，又作总结性的“总说”，对线性方程的今称矩阵初等变换法作进一步抽象与概括：“方程以诸物总并为问。其法以减损求源为主。去一存一，以考其数。如甲乙行，列诸物与价。术以甲行首位，遍乘其乙。复以乙行首位遍乘其甲，求其有等，以少行减多行，是去其物，减其钱。见一法一实，如商除之。行位繁者，次第求之。”他把含两个方程的方程组解法讲深讲透，然后轻轻带上一笔：“行位繁者，次第求之。”举一反三，已蕴涵了含多个方程的线性方程组解法。

---

① 见本《大系》第三卷，第79页。

组合数学

对客观世界诸多事物中的特定现象作定量研究(计数)、作数学模型(构造)、作最佳设计(优化)是组合数学考虑的主要问题。杨辉发前人之未发，对两项组合数学先声夺人，众信他是组合数学研究先驱者，其中属于前两种问题者有：

其一，数列求和

等差数列　在《田亩比类乘除捷法》卷上杨辉从平面图形求面积(连续量)抽象出相同形状平垛求和(离散量)。他发现不仅二者计数公式有异，已给条件也有相应约束：我们用现代记号记出此中关系(表 6.6.2)。

表 6.6.2

平面图形		已给条件	公　式
三角形	三角形	底长 a，高 h	面积$=\frac{1}{2}ah$
	圭垛	底 a 个、高 a 个	和$=\frac{1}{2}(a+1)a$
梯形	梯形	底长 a，下底长 b，高 h	面积$=\frac{1}{2}(a+b)h$
	梯垛	上底 a 个，高 h 个，下底 $a+h-1$ 个	和$=\frac{1}{2}(2a+h-1)h$
正方形	正方形	周长 l	面积$(\frac{1}{4}l)^2$
	方箭	周围 l 个，必要条件，$4\mid l$	和$=(\frac{1}{4}l+1)^2$
圆	圆	周长 l	面积$=\frac{1}{4\pi}(l^2)$
	圆箭	周围 l 个，必要条件，$6\mid l$	和$=\frac{1}{6}l\cdot\frac{1}{2}(6+l)$

二阶等差数列　杨辉在《详解九章算法》商功章又从立体图形求体积(连续量)抽象出相同形状堆垛求和(离散量)。类似地他察觉不仅计数公式发生变化，图形长、宽、高也引起相应的约束(表 6.6.3)。

表 6.6.3

图形		已给条件	公式
鳖臑	鳖臑	底边长 a，高 b，立体高 h	体积 $=\frac{1}{6}abh$
	鳖臑垛	底边 n 个，高 n 个，垛高 n 个	和 $=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$
方锥	方锥	底边长 a，立体高 h	体积 $=\frac{1}{3}a^2h$
	方垛	底边 n 个，垛高 n 个	和 $=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
刍甍	刍甍	上长 a，高 h，下长 c，下广 d	体积 $=\frac{1}{6}(2c+a)dh$
	刍甍垛	上长 n 个，上广 1 个，高 h 个，下长 $n+h-1$ 个，下广 h 个	和 $=\frac{1}{6}(2c+a)dh$① $+\frac{1}{6}(2a+c)h+\frac{1}{6}(c-a)h$
刍童	刍童	上长 a，上广 b，高 h，下长 c，下广 d	体积 $=\frac{1}{6}((2a+c)b+(2c+a)d)h$
	刍童垛	上长 n 个，上广 m 个，高 h 个，下长 $n+h-1$ 个，下广 $m+h-1$ 个	和 $=\frac{1}{6}((2a+c)b+(2c+a)d)h+\frac{1}{6}(c-a)h$②

高次幂等比数列　杨辉在《续古摘奇算法》中还引进以 2，3 为底的高次幂等比数列求和公式，与他的前辈沈括一样，在类似问题中他熟练地运用了指数律，轻车熟路地运算如此大的数，得到准确结果。

其二，幻方和幻圆

幻方　在第五章已介绍自三阶至十阶幻方的构造问题。杨辉从自然数三阶方阵概括出十六字诀以构造三阶幻方——洛书图，而且对任何阶奇数阶幻方都有一般意义，这是划时代的创见。他

① $a=n$，$b=1$，$c=n+h-1$，$d=h$。

② $a=n$，$b=m$，$c=n+h-1$，$d=m+h-1$。

又用分为九小块的方法，用同一方法构造六阶幻方、九阶幻方。从自然数四阶方阵又提出易换法、求等法，以构造四阶幻方，对于任何偶偶数阶幻方也有一般意义。他又用镶边法构造七阶幻方，用从粗到细、从疏到密的方法，不断调整以获得十阶幻方。这种思想方法至今是组合数学构造活动中所常用的。

幻圆和异形幻圆 杨辉所作六种幻圆及异形幻圆，对于构造未作任何说明，但从各个构图可以推测其巧妙构造构思。据新加坡蓝丽蓉分析[1]，好些是从相应已成幻方抽象概括的结果。

四 论 证

论证是引用其他已知的正确判断以证明某一判断的真实性的逻辑手段。

在中国数学史上三国刘徽是对数学命题作系统论证的最早典范。唐宋以前中算家已知的正确判断不多：分数基本定理、比例基本性质、方程基本性质、勾股定理、相似勾股定理、出入相补原理(平面和立体)、刘徽原理、刘徽祖暅原理等。南北朝时祖暅论证了牟合方盖体积是其外切立方体体积三分之二，作为能言者填补了刘徽的缺疑，他所凭借的“已知正确判断”不外乎上列八个命题。杨辉是另一逻辑推理的典范，上文已讲他严谨地证明了《海岛算经》第1题高、远公式，证明了勾股容圆直径用勾、股、弦和差关系表示的表达式，从而沟通了用分式表示、用平方根表示的三个表达式的等价关系。

刘徽与杨辉相距达千年，两位俱是论证高手，杨辉的论证与刘徽大异其趣，富有特色，简洁、明快，不失为优美的论证。对照《九章》刘注，可见杨辉功力。以《九章算术·勾股》来说：

---

① 见本编第七章第二节。

第15题(勾股容方)[①] 图6.6.2中已知直角三角形 ABC 三边 a, b, c，求内接正方形边长 x。九章术文称 $x=\frac{ab}{a+b}$。刘徽分长方形 $ACBD$ 为朱、黄、青直线形合成一狭长长方形作证。杨辉却说，“直田斜剖勾股二段，其一容直(长方形)，其一容方，余勾(FE)余股(FG)相乘，亦得容积之数。”从本题“解题”及“草”可以看出他认为长方形 $ACBD$ 中 $GDEF=KFHC$，

而 长方形 $ACBD$ = 直段 + 横段 = $GBCH+KEAC$，

$$ab=ax+bx。$$

于是命题得证。这样推导，显然较刘徽简洁，是很巧妙的论证。

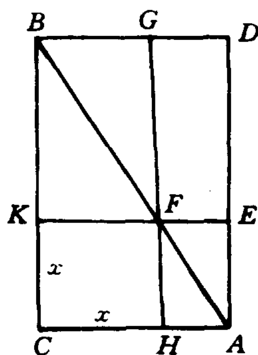


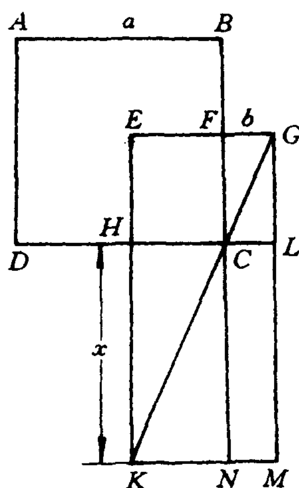
图 6.6.2

第17题(方二百步)，图6.6.3①中已知方城 $ABCD$，边长 a 步，出东门 F 走 $FG=b$ 步有木 G。出南门 H 走 x 步至 K，能见 G。刘注以勾股比例计算 x 值，未示所以然。杨辉注说：“以容积为实，半邑方自乘，如余勾(b)而一，……即所答木去邑远步。”这里杨辉仍以其直方理论论证：

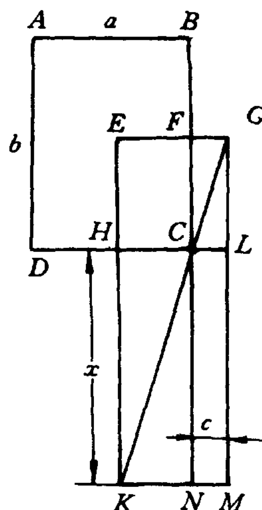
正方形 $EFCH$ = 长方形 $CLMN$，

① 勾股章所引题见本《大系》第二卷第106～108页。刘徽注见第三卷有关章节。

这就是
$$\left(\frac{a}{2}\right)^2=bx。$$
命题得证。



①



②

图 6.6.3

第 18 题(东西七里)，图 6.6.3②中已知长方形城 $ABCD$，边长为 a，b，出东门走 c 至 G 有木。求出南门 H 走 x 步能见 G。刘注仅记比例关系，杨辉注说："以容积为实，东西……相乘……，如余勾而一，……即是木步。"他仍以其面积理论论证：

$$长方形 EFCH=长方形 CLMN,$$

即
$$\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}=cx。$$
已证原术所说线段关系。

第 20 题(方邑见木)，这是《九章算术》仅有的二次三项式方程题。已给从方城北门 C 向北走 a 至 B，从南门 M 向南走 c 至 E，

折而西走 b 步至 N，视线过城西北隅见 B 处木。问：方城边长(x)是多少？刘注作出怎样计算及其理由。杨辉又进一步以其面积理论论证《九章》本题的术文。他说："勾腰容方，用重差倍积。"这里的重差指两个余勾 a，和 c。他又说："余勾(a)乘股(b)积，倍之为实。倍为全邑带从之积，以二余勾为从。

这就建立了方程(图 6.6.4)

$$2ab=(a+x+c)x=(a+c)x+x^2。$$

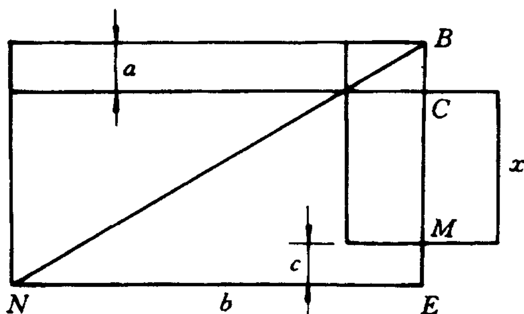


图 6.6.4

他又解释说，"开方除法，求得一段邑方，一段从邑之方。"

第 22 题(四表测木)，图 6.6.5 是已给边长为 a 的正方形 $FECB$ 四顶点立有标竿，BF 方向远处有木 A，FE 连绳索，从 C 处前视 A，量视线与 E 距离 $DE=c$。凭这二数据，要求距离 AB (x)《九章》及其刘注仅示算法。杨辉示其所以然："以容积为实，如余勾而一，得余股，即……木远。"这里容积指正方形 $FECB$ 面积 a^2，应用其"方直"面积理论，应有

$$a^2=cx。$$

《九章》术文"令一丈自乘为实，……以三寸为法。实如法而一。"命题得证。

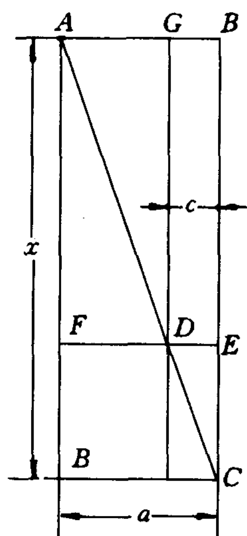


图 6.6.5

第 23 题(山居木西)，图 6.6.6 木高 $KE=d$，人目高 $MC=c$，人与木平距 $KM=a$，木与山平距 $DA=b$。《九章》术文仅排出比

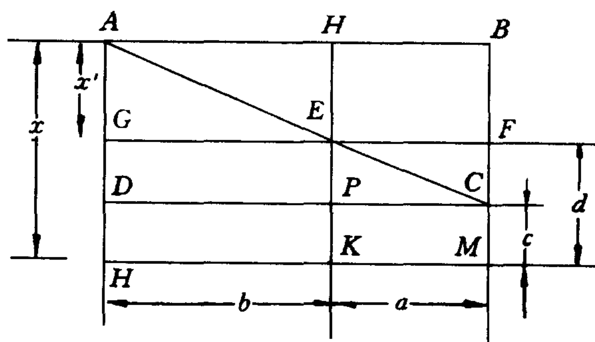


图 6.6.6

例式，而刘注只说："此勾股之义，"未及推导术文。杨辉则注："以容积为实，如余勾而一。"这里他是说

$$\text{长方形 } ABCD \text{ 内余形，}$$

$$GEFD = HBFE,$$

于是 $$(d-c)b = ax,$$

所求山高 $$x = \frac{(d-c)b}{a} + d。$$

这已证明术文："置木高减人目高，余，以乘山去木为实，以人去木为法。实如法而一。所得，加木高，即山高。"

第24题（井径五尺），图6.6.7中 $GDCH$ 为一井的截面图。井右侧立一高为 c 的竿 HB，从 B 处前视井底 D 处，截井口 F 点，量得 $FH=a$。又已给井直径为 b，求井深(x)。《九章》及其刘注仅示如果计算。杨辉为此题作"解题"："勾中容直，即余勾求余股。"意即在勾股形 BDC 中 DC 为勾，BC 为股，称长方形 $FHCK$ 为"直"。a 为余勾，x 为余股，而长方形 $AEFG$ 为"方"。从其直方理论，余形相等，即得

$$c(b-a) = ax。$$

术文已证。

我们不厌其详地引述各有特点的勾股章七题，连同海岛第1题、勾股容圆题以及后文要讲到的户高于广，葭生池中，二人同立共计十二题，可见杨辉之于论证，并非点滴、枝节地运用，而是系统地进行，因地制宜，便宜行事，完成了刘徽当年未竟之功。

杨辉还运用反证法论证命题，现选介二则。

其一，在《续古摘奇算法》卷下盈不足论说："孙子算经贼人盗绢题[1] 目不云九章本法，而以罗绫相乘，上下相并为答。盖其

---

① 《孙子算经》卷中第28题："今有人盗库绢，不知所失几何。但闻草中分绢：人得六匹，盈六匹；人得七匹，不足七匹，问：人、绢各几何？"

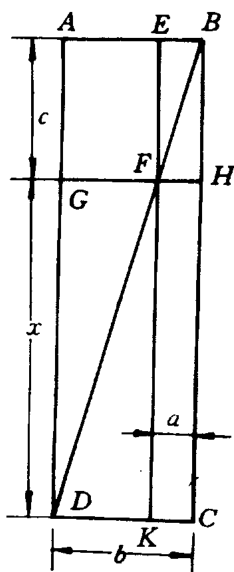


图 6.6.7

数差一，偶同也。若差数二、三，则上下相并，不可用矣。”他在孙子所引原问、原术、草后举出反例。“假如贼人盗绢，各分一十二匹，总多一十二匹。各分一十四匹，总少六匹。问：贼人与绢各几何?”他评论说：“置盈不足(右 12 匹,多 12 匹;左 14 匹,少 6 匹)维乘，各并之。(上得 240,下得 18 人)不合所问。(各分 12 匹，总多 24 匹,各分 14 匹,总少 12 匹)以出率相减为法(14－12＝2)以法除之，合问：“正确答案应是贼 9 人,绢 120 匹。”

其二，在同书卷下，方圆论说：“圆三径一，方五斜七，算家之常谈，未易概论也。”杨辉用排中律揭其非。对于前者他举出李淳风密率$\frac{22}{7}$，刘徽率$\frac{157}{50}$，用课分术比较，当取周 30，用李率，径是 9 $\frac{6}{11}$；用徽率，径是 9 $\frac{87}{157}$；而圆三径一说是 10，这就发生矛盾。

对于后者他先用勾股定理：假如自方五尺，计积二十五尺，取方面为勾为股，依术勾五、股五，各自乘，并而为五十，开平方求弦，得七尺，多余积一尺。”继用《张丘建算经》问：圆材径二尺一寸，术云：五乘径寸，以七除之，即方五斜七之义，答数是一尺五寸。他用《辨古通源》开方不尽法，得边长应是1尺4寸……。“则方五斜七非其法也。”

第三节　教育思想

在我国古代数学专著中以杨辉所著书的数学教育篇幅最多、要求最细，以下分四方面陈述。

一　可接受性原则

在《乘除通变算宝》卷上开宗明义地指陈“习算纲目”。这是杨辉传授当时数学课程的教学计划。他指出学习要循序渐进的正确教育主张。要求从学九九入手，次学乘除。习算纲目中还定量地规定学习时间，乘除要学二月。然后学速算、九归等法。其次学分数运算，共学十天，而温习两个月。他说：“治分乃用算之喉襟也，如不学则不足以知算。”在基础知识方面最后是学开方七天，又用习题练习两个月。建立巩固的基础后才学习《九章算术》。他说：“诸家算书用度不出乘除开方”，学后“知用算门例，《九章》之义尽矣。”这一学习计划体现了由浅入深，从简及繁，学习循序渐进的可接受性原则。他还建议选用两本浅近教材：《五曹算经》和《应用算法》作为习《九章》前的过渡读物。习读时要“依法求日下两三问，且未要穷理，但要知如何发问，作如何用法，答题如何用乘除。”这种学习方法，至今还令人感到新鲜，对数学教学工作有启发意义。

杨辉在《详解九章算法·序》中指出：“《黄帝九章》备全奥

妙，包括群情。谓非圣贤之书不可也。靖康以来，古本浸失，后人补续，不得其真。致有题重法缺，使学者难入其门，好者不得其旨。……恐问隐而添题解，见法隐而续释注……僭比类题，以通俗务。”在《详解九章算法》一书中杨辉以“题解”、“比类”等形式使《九章》问题中之“难入其门，好者不得其旨”者，以恰到好处的补充题，化险为夷，下面略举数例。

其一，以《孙子算经》度影量竿题作为推导《海岛算经》第一题术文，补充题已在第三章介绍。

其二，均输章第17题(金棰五尺)，杨辉“解题”说：“九节竹，隐其差为问，金棰以明其差为问。”两者虽同一算法，而前者更“通俗务”。可谓佳例。

第19题(大器小器)，杨辉在“解题”中指出：“本属‘方程’，借盈不足为问”。在题后他确用线性方程解题，然后又另拟买卖一题：“绫三尺、绢四尺，值二百八十。又绫七尺、绢二尺，值四百二十文。问：二价各几何?”(答数:绫每尺52文,绢每尺31文。)

其三，盈不足章第9题(米粟同春)，前已在本《大系》第二卷第二编指出此题命题不合理，违反操作习惯[①]。杨辉在“解题”中指出算法特色：“本是互换取用题，借盈不足法为之”，在“比类”他另拟一模拟题，这题符合生活习惯，能为初学者接受，题云：“官盐盘容卤二十斛，每斛煎成盐二斤。盘中有出未尽盐。添卤满而更煎，共得二百五十斤。问：新、故盐几何?”(答数,原有盐150斤,新成盐100斤。)

第10题(瓜瓠对长)，杨辉在“解题”中点明此题为“合率商除，借盈不足为问。”他又在“比类”中以买卖为题，出钱一十贯，买铜一斤九文，买锡一斤七文，欲共斤数相等。问：“几何?”(答

① 《中国数学史大系》第二卷，第130页。

数 625 斤，铜价 5 贯 625 文，锡价 4 贯 375 文。）术草曰："并铜锡价十六为法，以出钱十贯为实，实如法而一"他模拟瓜瓠对长，设各买相等斤数为 x，那么可立方程 $9x+7x=10\ 000$，x 当为 625。《九章》瓜瓠设各长尺数为 x，据题意是同类型方程 $7x+10y=90$。对于古九章所拟日常生活中不能看到的金棰，他拟一接近生活的补充题取作数学模型，使初学者容易理会其含义，从而解金棰原题。他的针对性比类（模拟）题是："五人均银二十两。内甲得五两二钱，戊得二两八钱。问：乙、丙、丁各得几何？"他还拟别草云："并甲戊，半之，求丙。并甲丙半之，求乙，并丙戊，半之，求丁，合问。"这是优于古《九章》的解法。

第 16 题（有竹九节），难度甚于金棰五尺，杨辉作比类题："七人差等，均银。甲乙均五十五两，戊己庚均四十二两。问：丙丁合得几何？"这里相当于说庚、已、戊、丁、丙、乙、甲，七人分银依序自庚而甲成等差数列：a，$a+d$，$a+2d$，$a+3d$，$a+4d$，$a+5d$，$a+6d$。已知前三项和（42），后二项和（55）。求七人各自得多少。杨辉改用建立二元一次方程组求解，设数列首项为 a，公差为 d，于是据题意

$$\begin{cases}3a+3d=42,\\2a+11d=55。\end{cases}$$

原著"方程草曰：甲乙二人　十一差　五十五

戊己庚三人　三差　四十二"

就是上面方程组的古汉语表达式。这对于怎样解有竹九节题起着很好的过渡作用。

二　　直观性原则

三国魏刘徽为《九章算术·注》写自序时说："徽幼习九章，长再详览，敢竭愚鲁，为之作注。"他注释的办法是"析理以辞，解体用图。"在刘徽影响下，杨辉所著书在直观性原则上确实取得

很多、很好成绩，与《秦九章》一起为我国后来插图本数学书，开创佳例。

语言直观——重比喻

《详解九章算法》商功章对于众多的古老名称，杨辉都给出实物比喻，使学者从生疏到熟悉，例如：方亭，“解题”说：上方小、下方大，有高为台，如方斛(民间常用量具)。圆亭，上周小，下周大，有高为台形，如造饼炉。若倒之，如圆窖也。堑堵，一立方斜解两段，形如屋脊等当时生活实际模型。

《续古摘奇算法》称解一次同余式组为剪管术，把所求数喻为一长长的管子，按一定长度剪，余下多少，另按一定长度剪，又余下多少？……据此求管长，这对于计算上元积年等题的理解，有很好效果，比称之为大衍术的玄之又玄，要形象得多。

明确中心思想

要言不烦，是使初学者提高学习效果非常重要的做法。杨辉在《详解九章算法》中多次注意及此。例如均输章前面四题，数据繁多，要求不一样：有的是输粟，有的是赋粟，头绪纷繁，学者莫衷一是。杨辉在第3题(五县赋粟)“解题”中画龙点睛地说：“此衰分也……明均其粟，暗均其钱也。”一语道破了均输繁复的计算都是为寻找分配率服务。

又如盈不足章第16题(石中有玉)，解法形如盈不足，杨辉提出主题：“贵贱分率之问。”把此题恰当地作为其率术所驭题。千年误缠，从此澄清。

特别是他为少广术诸题作出此术之所以设立的必要性。其“解题”说：“此问田一亩为主，以广求从。但其中加分母、分子位次颇多，若用合分互乘之法，岂不繁剧？古人弃合分之术，而以诸母自乘为全步之积分乘子，即以诸母各除其子，取其本积，并之为广，而求宽。特设少广之问。”

反复强调要害

某些要害必须不厌其烦地反复告诫，以引起学者重视，杨辉所著书也不放松这些至为重要的环节。例如运算中的定位问题，一错百错，马虎不得。他在《乘除通变本末》提出四次："相乘起例并定位"，"商除起例并定位"，加法和减法也强调定位。他要求学者学乘除及九归时要认真读他的《详解九章算法》第1卷而且还要求把注文也得"玩味"细读。

审慎考虑，大意不得

数学语言必须审慎，慎之又慎。这一点杨辉在著作中深虑及此，典型例子如他在《田亩比类乘除捷法》卷上谈到环田外周长、内周长与环宽的关系时，认为三者有制约关系："外周之数可以信笔出题，惟径(环宽)不可得而擅立，须以内周减外周，余、六(2π)而一，为径。"

解体以图

杨辉在《详解九章算法·序》还说："凡题法解白不明者，别图而验之。"他在专著中所作插图数以百计，就其作用可分为两类。

写生画

据题意作图，目的是提高学习兴趣，与题中所给数据和位置关系无多大联系。就数学教学效果看，有图无图，大不一样。这种性质插图为杨辉算书首创。这里略举数例：图6.6.8(葭生池中)、图6.6.9(今有开门)、图6.6.10(户高于广)、图6.6.11(竹折抵地)。图6.6.8，6.6.11与印度相应古题插图交相辉映[①]。

---

① 参见本《大系》副卷第一卷第四编第四章。

引筏赴岸圖



筏出水圖

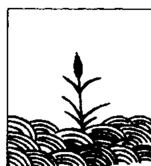


图 6.6.8

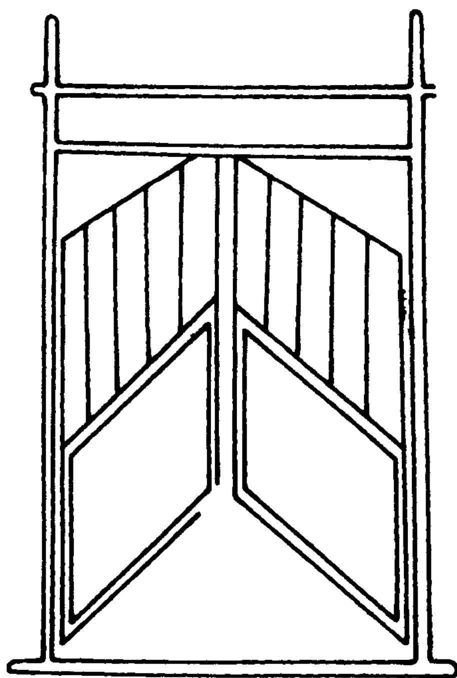


图 6.6.9

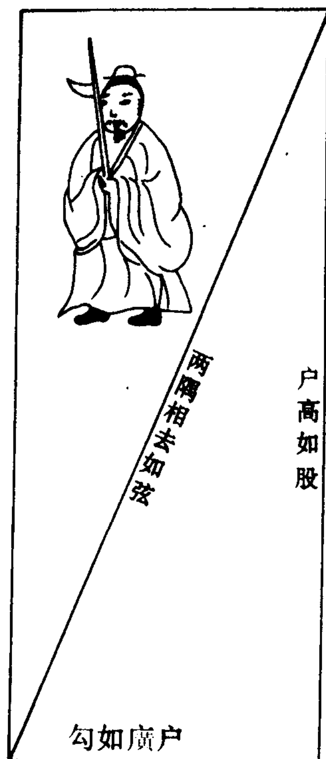


图 6.6.10

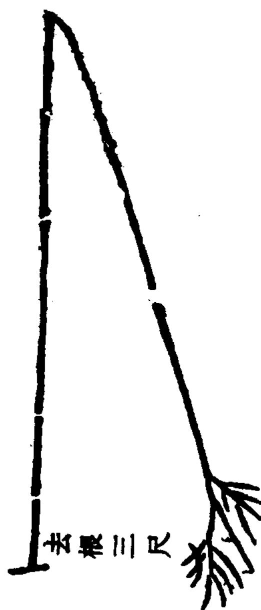


图 6.6.11

数学用图

有两类，其一为示量用图，现举二例：

图 6.6.12 为均输章第 17 题(金棰五尺)插图，图中阶梯形分划示数列相邻之差和末项与首项之差及其绝对数值，对于建立方程起到立竿见影的良好作用。

差形 非斤兩不用十六除

二斤

一差半斤

二差一斤

三差斤半

四差　二斤　二斤

图 6.6.12

图 6.6.13 为盈不足章第 19 题(良马驽马)精细插图，其 a 图中明确点明良马加速度是离散量，“方一眼为日增一十三里”；其 b 图驽马减速度也是离散量，因此是阶梯函数，杨辉所作图与现行出版物可以媲美①。

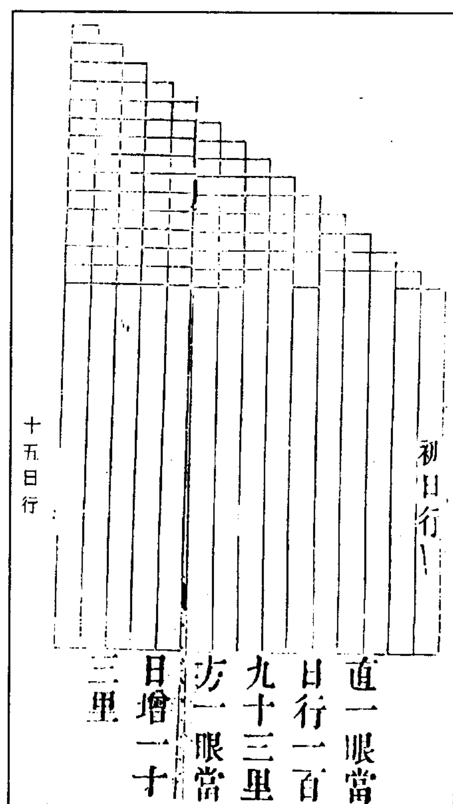


图 6.6.13 (a)

① 沈康身，1997，第 527 页，图 7～9

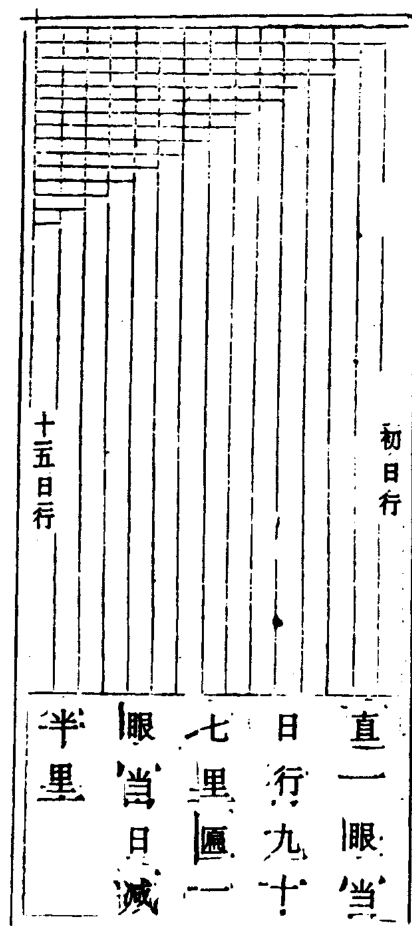


图 6.6.13 (b)

图 6.6.14 为少广章杨辉所作开平方插图。原件抄存《永乐大

典》卷16 344，为庚子劫余[①]，今藏英国剑桥大学图书馆。此题重现刘徽注《九章算术·勾股》朱幂黄幂之图，与亚历山大时期希腊学者 Theon 所作[②]，东西相映生辉。

其二为示性用图，又分为两种：

甲、图解用　在《日用算法》[③]中杨辉为解释二元一次方程所作图就是用几何方法解释代数现象的[④]。

乙、证明用　可选勾股章三题

例 1　第 11 题(户高于广)“今有户，高多于广六尺八寸，两隅相去，适一丈。问：户高、广各几何?”刘注说：“令一丈自乘为实，半相多，令自乘。倍之，减实，半其余，以开方除之，所得，减相多之半，即户广。加相多之半，即户高。”对此术文，刘注已有证明。杨辉则别出心裁，作两图为证，其说理较刘注更加切题。

证明一　“弦自乘变：勾幂二，半较[⑤]幂四，半较乘勾四。半较自乘，倍之，减积，半之，开方。……减半较为勾，即户广也。加较为高。”(图 6.6.14)从原著插图可见他匠心独运，把勾股形弦上正方形(c^2)分割为 2 大正方形(a^2)，4 长方形$\left(\frac{1}{2}(b-a)a\right)$，4 小正方形$\left(\left(\frac{1}{2}(b-a)\right)^2\right)$[⑥]，这就是（图 6.6.14）

---

① 见第一章第三节，二、杨辉少广章解题书影。

② 参见《中国数学史大系》副卷第一卷第三编第二章。

③ 见第一章第三节，一、《日用算法》片断书影。

④ 参见第七章第二节第二段。

⑤ 较指勾股较，和指勾股和。

⑥ $c^2=a^2+b^2=a^2+\left(a+2\left(\frac{1}{2}(b-a)\right)\right)^2=2a^2+4\cdot\frac{1}{2}a(b-a)+4\left(\frac{1}{2}(b-a)\right)^2$。

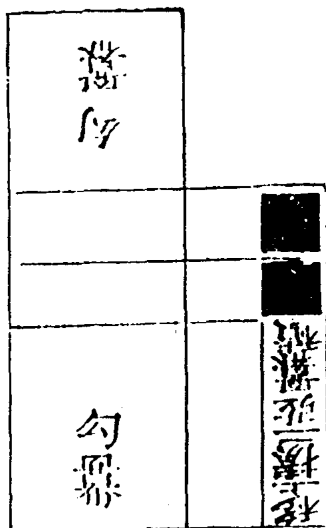


图 6.6.14

$$c^2=2a^2+4\left(\frac{1}{2}a(b-a)\right)+4\left(\frac{1}{2}(b-a)\right)^2,$$

那么
$$c^2-2\left(\frac{1}{2}(b-a)\right)^2。$$

就几何意义说，图中除去二黑色正方形，就成为两个边长都是 $a+\frac{1}{2}(b-a)=\frac{1}{2}(b+a)$ 的正方形，即

$$\frac{1}{2}\left(c^2-2\left(\frac{1}{2}(b-a)\right)^2\right)=\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2。$$

既然它的边长 $(a+b)$ 已能从开方获得，所求 a（勾即广）、b（股，即高）就迎刃而解了。

证明二　杨辉另作图（图 6.6.15）以解二次三项式的途径推导："弦自乘变二勾幂及勾股较乘勾二段，勾股较幂一段。以勾股较自乘减之，余勾幂二段，勾乘勾股较二段，半之得勾方一段，勾乘较一段。以勾股较为从，开方求勾。是带以开方。勾即户广也。

加较为股，即户高也。”他把此题按照勾股章第 20 题(邑北有木)术文处理。从原著图易知：

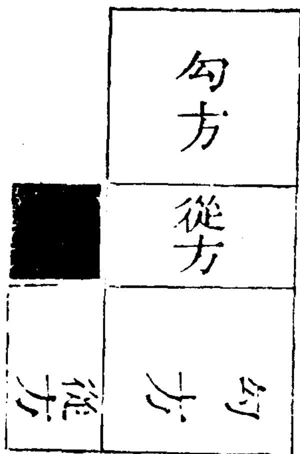


图 6.6.15

弦上正方形已分成二大正方形(a^2)，一小正方形$(b-a)^2$，二长方形$(a(b-a))$①，那么除去左侧小黑正方形，就成为

$$2\text{勾方}+2\text{长方形}=c^2-(b-a)^2,$$

$$\text{勾方}+\text{长方形}=\frac{1}{2}(c^2-(b-a)^2)\ (\text{已给}),$$

$$a^2+(b-a)a=\frac{1}{2}(c^2-(b-a)^2)。\qquad (*)$$

把 a 视为未知数，式(*)中为二次方程其一次项系数(从)及常数项都成为已给。只要“开方”就得所求数勾(户广)。显然(*)式的正根与第一证法结果等价。

例 2　第 6 题(葭生池中)② 杨辉“解题”：“半池方如勾，水深

① $c^2=a^2+b^2=a^2+(a+(b-a)^2)=2a^2+2a(b-a)+(b-a)^2$

② 例 2、例 3 杨辉“解题”，所说原应有图。

如股，引葭平水如弦，出水一尺如股弦差。[1]股弦较与勾求弦法曰：勾自乘，以股弦较自乘减之，余为实。倍股弦较为法。实如法而一。”杨辉解释说：“勾幂内有股弦较乘股一段，乘弦一段。以股弦较自乘减积，正余二段股。数中有二段股弦较乘股，故倍较也，除得股长。”对于已给 $c-b$，a 求 b 问题，《九章》术文就是上面“法曰”所说，即所求

$$b=\frac{(c-b)^2-a^2}{2(c-b)}。$$

例 3　第 14 题(二人同立)已给直角三角形 $(a+c):b=m:n$ 及 a。在求三边之比时，术文相当于说，$a:b:c=\frac{m^2-n^2}{2}:mn:\frac{m^2+n^2}{2}$，其中 $m>n$，m，n 为奇的自然数，刘徽有二证法，在第一证法[2]中刘注相当于说以 $a'+c'=m, b=n$ 另作一直角三角形 $A'B'C'$，那么

$$c'=\frac{1}{2}(a'+c'+c'-a')=\frac{1}{2}\left(a'+c'+\frac{b'^2}{c'-a'}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{m^2+n^2}{m}\right),$$

$$a'=\frac{1}{2}(a'+c'+a'-c')=\frac{1}{2}\left(\frac{m^2-n^2}{2}\right),$$

$$b'=m。$$

于是　$a:b:c=a':b':c'=\frac{m^2-n^2}{2m}:n:\frac{m^2+n^2}{2m}$。

经过通分(这就是刘注中所说：“如是或有分，当通而约之，乃定。”)才能得到整数比

$$a:b:c=\frac{m^2-n^2}{2}:mn:\frac{m^2+n^2}{2}。$$

杨辉设另法：“勾弦和自乘，变勾幂二段，股幂一段，勾乘弦二段。

① 见《中国数学史大系》第三卷第 417～418 页。

② 见《中国数学史大系》第三卷第 417～418 页。

股率自乘，股幂一段。并、而勾幂、股幂、勾乘弦各二段。半之，各一段为弦，得原弦率。以减和，求勾、减总率也。股率乘勾弦和率，求股，原股之率。”按照上文以 $a'+c'=m$，$b'=n$ 所作直角三角形，杨辉是说

$$(a'+c')^2+b'^2=2(a'^2+b'^2+a'c')=2(c'^2+a'c')=2c'(a'+c'),$$

取弦率

$$c'(a'+c')=\frac{m^2+n^2}{2},$$

勾率

$$(a'+c')^2-c'(a'+c')=a'\ (a'+c')=\frac{m^2-n^2}{2},$$

取股率

$$b'(a'+c')=mn,$$

于是

$$a:b:c=\frac{m^2-n^2}{2}:mn:\frac{m^2+n^2}{2}。$$

其证法，较刘徽更为简捷，不必考虑“如是或有分”。

三　联系实际原则

杨辉所著书善于联系实际。杨辉算题联系实际有两层意义，其一为贴近生产、生活，其二是联系已学过的知识，有温故而知新的意思。

与生产、生活相联系

在《日用算法·序》中强调：“用法必载源流，命题须责实有。”

在《乘除通变算宝》中当讲授颇为枯燥的乘除速算法时，每一段落之后都拟一组应用题，题材多样，解题设想多变化。这与古《九章》粟米章诸问，问辞千篇一律，呆板无味者，已不可同日而语，姑引数问，以示一般：

“细物一十二斤半、税一，今有二千七百四十六斤，问：税几

何?"

"官文钱二万六千四百一十贯，每贯除头子钱五十六文，问：共得几何?"

"足钱九十六贯二百五十文。问：伸作七十七陌，几何?"

"种地一百七亩，价一十贯六百文，问：值几何?"

"五千七百一十二步，问：得几亩?"

"七十七陌省钱七十四贯，问：为足钱几何?"

"米一百七石，每石增耗三升。问：共几何?"

"足秤二百三十二斤，问"展省秤多少?"

"直田积九千二百一十五步，长九十七步，问：宽多少?"

"每贯收息三十，今本利二万七千八百一十贯，问：原本钱。"

"开渠积六千八百三十七尺，共用一百五十九工。问：一工取土多少?"

"木炭七千五十六斤，各支百四十七斤，问人数。"

所拟题都联系农业、商务、劳动、经济和生活细节。

杨辉在《详解九章算法·序》中说："僭比类题，以通俗务。"所谓通俗务，就是新添题的目的之一是为了联系当时周围实际。此外他还善于以周围实际事物、现象解释艰深和抽象的概念或理论，下边也选析数例。

其一，方程章第7题(牛二羊五)对《九章》当时的传刻本的正负术，在"解题"中结合日常生活、人人熟悉的买、卖关系诠注，作了精辟的解释："卖为正数，买为负数，……正负，正者，正数也；负者，欠数也……正无入正之，负无入负之，本是同名相加，因邻位，无算可入，故云无入者仍为正，负无入者仍为负。古本误刻无人者，非。"最后，再一次强调："卖(收益)为正，买(付出)为负。多(剩余)为正，少(不足)为负。"

其二，盈不足章第10题(瓜瓠对长)、第19题(大器小器)杨辉所拟比类题联系商品(金属、丝织品)丰富古《九章》解题领域，

而第 9 题(米粟同舂)题联系盐业生产，尤为难得。古代盐、铁是国家重要税收所在，浙江舟山制盐重镇。杨辉所拟题真实不虚。他作此比类原意是要纠正古《九章》违犯农业加工操作规程，既贴近生活、生产，又保留原题精神实质，用心可谓良苦。只是他所命题、术、草也有失误，特别是在题中漏述每斛盐卤重量，量与衡单位混淆。清人宋景昌《详解九章算法札记》未予订正。杨辉所命题参照其术文、草文我们给改正为："官盐盘容卤八斛，每斛五十斤，煎成盐二十斤。盘中有出未尽盐、添卤盐满而更煎，共得二百五十斤，问："新、故盐几何?"才有答数：故盐 150 斤、新盐 100 斤。易于检验，如设故盐为 x 斤，据题意建立方程：$x+(50\times8-x)\frac{2}{5}=250$，$x=150$。用盈不足术解，按杨辉双假设：$x_1=130$，不足12，$x_2=160$，盈6，得$x=(130\times6+160\times2)\div18=150$。

本题杨辉术草文说。"以成盐二十减斛积五十，余耗卤三十为法，以共盐二百五十斤减盘卤积四百斤，余一百五十斤为所有耗，以斛重二十乘之为实，实如法而一，耗三十斤，得新盐百斤。减共数，即故盐。"此草术文也有误文夺字：斛重应改为"斛含成盐数"并删去"耗三十斤"。那么此草术文相当于设：制成新盐 y 斤，建立方程

$$\begin{cases}x+y=250,\\(400-x)\frac{2}{5}=y。\end{cases}$$

求解，得　　　　　$y=100$。

其三，勾股章第 2 题(弦勾求股)比类云："雪窨草屋，垂坡五丈，其檐离地四尺，入深六丈。问：栋高几何?"(答数 4 丈 4 尺)第 3 题(股弦求勾)比类云："仰观台，上方四丈、高四丈八尺。四隅阶袤五丈四尺四寸。问：下方几何?"(答数：91 尺 2 寸)可见他命题广泛联系生活实际。

在《田亩比类乘除捷法》中五次引用浙江台州量田法，足见他命题数据大多取自第一手资料。

《续古摘奇算法》一书篇幅虽短，其正斛法、量仓法都切合国计民生。

与已学过的知识联系

与前后知识联系对比，温故知新，是杨辉书中所常见的。例如均输章第5题(三人舂粟)，他与衰分章第8题(五爵分钱)作出联想："此粝、粺、糳米率数不同，求米相等，须反衰之。……与五爵均钱，高爵出少，以次渐多问、同。"知识前后通气，这是很有益的注解。

四　学习自觉性原则

循循善诱、积极诱导和培养学习者自觉进取习惯，是杨辉另一重要教育思想。前文我们已引他的主张："好学君子触类而考，何必尽传。"在海岛图的研究上，他说："立望竿二题，引证海岛之法，亦循循善诱之意。"在教学方式上杨辉认为针对不同时期、不同层次，应有特色地进行。在学习方法上，他反对死记硬背，而是倡导理解记忆：例如"九归"如仅靠背口诀，就得化五到七天时间。他指导人们在理解口诀意义基础上记忆只需一天时间。

在探讨研究各类算法时，他指出必须在运用过程中学，他的警句："夫学算者题从法取，法将题验。凡欲明一法，必设一题。""题繁、难见法理，定撰小题，验法理，义既通，虽用繁题，了然可见也。"

在杨辉所著前期、后期著作中，这种启迪人们思维的做法，比比可见，现分类选析如下。

推广与联想

推广与联想是扩大知识视野的重要手段。在《详解九章算法》中，杨辉对重点题都拟比类题，就是对《九章》原题联想的成果。在其他各种专著中，他也运用这种手段，如在上文已引的

《续古摘奇算法》从百鸡问题新出命题：三种柑桔问题，三种瓶酒问题。又如从《孙子算经》河上荡杯题引进合作问题：“兵士三千四百七十四人，每三人支汗衫绢七十尺，每四人支袴绢五十尺。问：共支几何？”（答数：2 963匹 3 丈 9 尺）从“三女归宁”题引进甲子逢角宿等等。

在算法的推广方面，杨辉也做了大量工作。例如：

其一，省秤与足秤

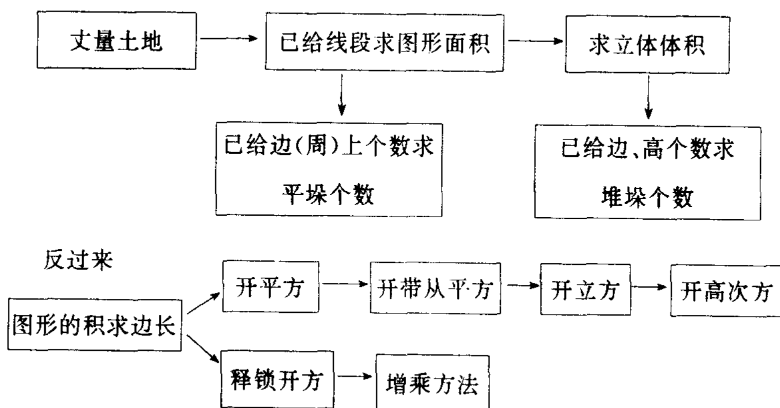
在《日用算法》有题：“今有物一百一十二斤，足秤，问：为省秤几何？”所谓省秤就是足秤 1 斤当 1 斤 4 两。杨辉解题说：“以斤数为实，身外加二五。”这就是 $112\times1.25=140$(斤)。

反过来，有题从省秤折算足秤：

“今有物三百九十一斤四两省秤。问：足秤几何？”术曰，以斤数为实，八因之。”这就是

$$391\frac{1}{4}\times\frac{8}{10}=313(\text{斤})。$$

其二，在《详解九章算法》少广章、商功章和《田亩比类算法》从丈量土地具体问题上作多方面推广。



一题多解

杨辉以其广博数学知识修养，对各种数学现象广征博引，使学者闻一知十，获左右逢源之实益。在其《详解九章算法》中这种思维的发挥，更是突出，下面举一些例。

其一，盈不足章第 14 题(大器小器)他改用“方程”术解。在“解题”中点明：“本题方程，借盈不足为问。”他相当于设大小器各容 x，y 斛，建立方程

$$\begin{cases}5x+y=3,\\x+5y=2。\end{cases}$$

用“方程”术求解，得出相同答数 $x=\dfrac{13}{24}$，$y=\dfrac{7}{24}$斛。

第 16 题(石中有玉)，《九章》安排此题在盈不足章欠当，杨辉有鉴于此，颇有微词，在“纂类”中主张另入“贵贱分率”类，按即以其率术求解。这是很新鲜的设想：“置共物积寸(3×3×3=27(立方寸))，积两(11(斤)=176(两)) 为实。以贵率(玉重 7 两)乘共物(27×7=189)，减都重(176)，余为贱实。贵贱率六、七相减，余(1 两)为法，实如法而一，得一物(含石 13 立方寸)。以减都率(27 立方寸)，余为贵物(含玉 14 立方寸)。”此外，古《九章》虽设有两盈两不足，盈适足，不足适足术，但本章后十二题全用盈不足术，其余各术形同虚设。杨辉就以本题数据“假令玉十寸，石十七寸”得两不足，于是本题有了三解。

第 20 题(持钱之蜀)，古《九章》用盈不足术、刘徽用还原法，即逆推法解。杨辉则又给出第三种解法，他说：“此问先得利而收钱返归，四返皆存余钱生利。首尾相接，故以五返钱数乘本利十三，并而为实，以五返本利自乘为法，即取用互换之术也。互换术草：以所有五返本利钱数乘所求率为实，以所求率为法，实如法而一。”其互换术的基本思路是：回家留下的钱不再计息，如记第一至第五次回家留 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 个钱，那么它们依次含本

金：

$$a_1 \div \frac{13}{10},\ a_2 \div \left(\frac{13}{10}\right)^2,\ a_3 \div \left(\frac{13}{10}\right)^3,\ a_4 \div \left(\frac{13}{10}\right)^4,\ a_5 \div \left(\frac{13}{10}\right)^5。$$

因此此人应有本金

$$a_1 \div \frac{13}{10} + a_2 \div \left(\frac{13}{10}\right)^2 + a_3 \div \left(\frac{13}{10}\right)^3 + a_4 \div \left(\frac{13}{10}\right)^4 + a_5 \div \left(\frac{13}{10}\right)^5$$

$$= \frac{10}{13}a_1 + \left(\frac{10}{13}\right)^2 a_2 + \left(\frac{10}{13}\right)^3 a_3 + \left(\frac{10}{13}\right)^4 a_4 + \left(\frac{10}{13}\right)^5 a_5$$

$$= 10((((13a_1 + 10a_2)13 + 100a_3)\ 13 + 1\,000a_4)\ 13 + 10\,000a_5)$$

$$\div (13)^5。$$

这就是杨辉自注说："以一十三乘一万四千(a_1)，以十乘一万三千(a_2)，并之，十三乘，得四百零五万六千。以百乘一万二千(a_3)，并之，十三乘，得六千八百三十二万八千。以千乘一万一千(a_4)，并之，十三乘之，得一亿三千一百二十六万四千，以万乘一万(a_5)，为一亿，并之共得十一亿三千一百二十六万四千……五位十三自乘得三十七万一千二百九十三。"[①] 对本题所作第三种解法直接求五数之和，可谓别出心裁。

第 15 题(漆三油四)杨辉不囿于古《九章》原术用双假设法，而改用互换法。相当于说已给出漆率、换油率、调漆率依次为 3，4，5。在 3+5=8 份漆中取出 3 份，刚好调余下的 5 份漆。于是把 30 升漆看成所有数，8 升为所有率，3 升为所求率，则所求出漆数是$\frac{30\times 3}{8}=11\frac{1}{4}$(升)，类似地可求换油数是$\frac{30\times 4}{8}=15$，调漆数是$\frac{30\times 5}{8}=16\frac{3}{4}$(升)。这种设想与《秦九章》卷 18 第 1 题(推计互易)所见正同。

其二，均输章第 15 题(持金出关)，杨辉另举三解，录其二。

① 杨辉自注中总和相差十倍。当年李潢及宋景昌校订多未及改正。

解法一　做一次除法：应纳税1.2斤，取金2斤，意即0.8斤值5 000钱，因此斤值5 000÷0.8=6 250(钱)。

解法二　做一次比例：1.2斤化为19两2钱，设所求斤值为x，解16∶19.2=5 000∶x。

第19题(有竹九节)，在补充题七人分钱基础上给出另一解法：把九节竹容视为等差数列，设首项为x，公差为y，杨辉据题意，给出相当于列二元一次方程组

$$\begin{cases}4x+6d=3,\\3x+21d=4。\end{cases}$$

解出

$$x=\frac{39}{66},\ y=\frac{7}{66}。$$

他称$\frac{7}{66}$为“差实”，“递增差实，是知九节之数也。”就得到其余各节值。

优美解

一般说，以最少的运算手续得到正确答数的解法称为优美解。在一题多解中常会出现优劣之分。例如上引漆三油四、持金出关、有竹九节三题杨辉所作解，都胜于古《九章》原术，都是优美解。又如勾股章勾股容方题的推导，杨辉证法较刘徽简洁，也是优美解。

杨辉为均输章金棰五尺题所作补充题：甲乙丙丁戊成等差数列，当甲、戊为已知，杨辉解说“并甲戊半之，求丙；并甲丙半之，求乙；并丙戊半之，求丁。”当是优美解。一般说，$\{a_i\}$如为等差数列，当已给a_n，a_m，n，m都是奇数，那么$\frac{a_{n+m}}{2}=\frac{1}{2}(a_n+a_m)$。

特别令人感到有趣的是盈不足章第20题(持钱之蜀)，杨辉所作第三种解法如与古《九章》原法(盈不足术)与刘徽用还原法比较，杨法要简便得多。

即使把原题数据作很多简化，第一种解法，四则运算工作量还相当繁重，第二种解法有所减轻，而杨法则轻而易举。如把原题改为：有人外出经商，每年能获利十中取二(本利和 120%)。如果第一年回家留下 12 元，第二年 144 元，第三年 1 728 元，本利刚尽。问：他最初有多少本钱？

古《九章》法设原本 $x_1=1\ 000$，$x_2=2\ 000$。

$$f_1=(1\ 000\times1.2-12)\times1.2-144)\times1.2-1\ 728=-190.08,$$

$$f_2=(2\ 000\times1.2-12)\times1.2-144)\times1.2-1\ 728=1\ 537.92。$$

$$\begin{matrix}190.08 & & 1\ 537.92\\ & \times & \\ 1\ 000 & & 2\ 000\end{matrix}$$

$$\text{所求原本}=\frac{190.08\times2\ 000+1\ 537.92\times1\ 000}{190.08+1\ 537.92}$$

$$=\frac{380\ 160+1\ 537\ 920}{1\ 728}=\frac{1\ 918\ 080}{1\ 728}=1\ 110。$$

刘徽法所求原本：

$$\left(1\ 728\div\frac{12}{10}+144\right)\div\frac{12}{10}+12\right)\div\frac{12}{10}$$

$$=\left(\left(1\ 728\times\frac{10}{12}+144\right)\times\frac{10}{12}+12\right)\times\frac{10}{12}$$

$$=\left((1\ 440+144)\times\frac{10}{12}+12\right)\times\frac{10}{12}$$

$$=(1\ 320+12)\times\frac{10}{12}=1\ 332\div12\times10=1\ 110^{①}。$$

而杨辉法，一步到位，所求原本：

$$12\times\frac{10}{12}+144\times\left(\frac{10}{12}\right)^2+1\ 728\times\left(\frac{10}{12}\right)^3=1\ 110。$$

解的公式化

在杨辉所著书中从特殊、具体例已注意到把解答公式化，即

① 已略去不少计算工作量。

能使适用于其他、一般情况，例如：

其一，《详解九章算法》盈不足章第 18 题(黄金白银)，如设黄金每枚重 x 两，白银每枚重 y 两，据题意建立方程组

$$\begin{cases}11y=9x,\\10y+x-(8x+y)=13。\end{cases}$$

杨辉对此题也可能以“方程”术解，并给一般化表达式，黄金、白银依次各有 a，b 枚，则方程组是

$$\begin{cases}by=ax,\\(b-1)y+x-((a-1)x+y)=c。\end{cases}$$

它的解之一，白银每枚重 $y=\dfrac{ac}{2(b-a)}$。杨辉在本题曾另立术说：“求金银差数(c)，以乘金数(a)。折半[1]。二物(b,a)相减，余为法、实如法而一，得银重。”正是此意。

其二，《日用算法》菽麦三百石题[2]，原题如设菽麦各粜 x，y 石，据题意列方程组

$$\begin{cases}x+y=300,\\785x+1\ 160y=297\ 000。\end{cases}$$

有明显迹象，杨辉把此题类型一般化，相当于说：共粜菽麦 a 石，菽麦每石各为 b，c 文，共价 d 文，则建立方程

$$\begin{cases}x+y=a,\\bx+cy=d。\end{cases}$$

答数之一，麦粜得石数　$y=\dfrac{d-ab}{c-b}$。

杨辉解题术说：“共物(a)为实，以贱率(b)乘之，以减总钱(d)，余为贵实。贵贱二率相减($c-b$)，余为法，求见一价所多之差。除之先见贵物(y)。”正是这个公式。他又说：“以贵物减总数

---

① 杨辉术文无“折半”二字，据意改。

② 原题见本编第七章第二节。

(a)，余为贱也。” $x=\dfrac{ac-d}{c-b}$。

其三，在《续古摘奇算法》卷下有题：“三人均一百。只云甲多乙五文，丙得钱如乙七分之五，问：各几何？”（答数：甲 40，乙 35，丙 25 文）术文说：“于百文内，先减出甲多乙五文，余九十五文。题云丙得乙七分之五，丙当以五为衰，甲、乙各以七为衰。并之，得十九为法，以九十五乘列衰，以法除之。得数却增原减五文，添甲，合问”。杨辉术文，当是优美解，化三元一次方程为分配比例。另一方面他的术文，可以作为形如

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x=y+b, \\ z=\dfrac{d}{c}y \end{cases}$$

解的公式化。他把 $a-b$ 按照分配率 c，c，d 分配给三人[①]，即甲、乙、丙分别得

$$\frac{(a-b)c}{2c+d}+b,\ \frac{(a-b)c}{2c+d},\ \frac{(a-b)d}{2c+d}。$$

① 这里已把百文一般化为 a，甲多乙五文一般化为 b。又据题意把分配率一般化为 $c:c:d$。

第七章　杨辉数学专著的重要意义

第一节　国内学者的研究成果

一　清代以前

丁易东　南宋武陵(今湖南省常德市)人，咸淳四年(1268 年)进士。所著《大衍索隐》三卷含幻方及其衍生共十一图。此书成书确实年代已不可考，但适在杨辉算书成书前后可无疑义。我国惯例，进士级是国家考试，在京师进行。时杨辉适在浙江。丁易东在幻方方面的工作质量某些方面胜于杨辉，对此严敦杰[①]有评议说："丁易东《大衍索隐》卷一，'未几得河南杨氏大衍本原'。《大衍索隐》有纵横图，疑杨氏书亦有是项图录。其后杨辉所论纵横图，知有渊源焉。"从此迹象，我们认为我国对幻方的深入研究的起步时间还应推前。杨辉、丁易东之间虽不能肯定能有学术交往，但他们同在南宋首都文化荟萃之区，得风气之先，各自采撷其精华而加工、提炼，硕果脱颖而出，是可以理解的。

丁易东从解释大衍之数演幻方及其衍生[②]，其中最有成绩的有三则。丁氏书中无纵横图这一词，他自立名目为：

其一，洛书九数乘为八十一图，与杨辉九九图全同[③]。但杨氏有图无术，丁氏则释其构造，娓娓动人：述说与洛书图的关系至

---

① 严敦杰 1987，第 13 页。

② 王荣彬 1990，第 74～82 页。

③ 从杨辉九九图与丁氏图全同可以证实，他们的研究确同出一源。

为中肯，与今日的理解一致。他说："一宫纵横一百一十一，中位三十七(指图 6.5.16 中的下行正中小三阶幻方)。二宫纵横一百一十四，中位三十八(同图上行右)。三宫纵横一百一十七，中位三十九(同图中行左)。四宫纵横一百二十，中位一百二十三(上行左)。五宫纵横一百二十，中位四十一(中行正中)。六宫纵横一百二十六，中位四十二(下行右)。七宫纵横一百二十九，中位四十三(中位右)。八宫纵横一百三十二，中位四十四(下行左)。九宫纵横一百三十五，中位四十五(上行正中)。每三宫纵横一千一百七。"①

其二，九宫八卦综成七十二数合洛书图与杨辉连环图相像②，而加深认识层次(图 6.7.1)。丁氏说："每宫二百九十二，中合回

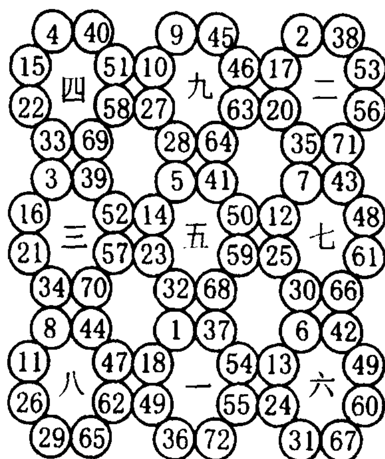


图 6.7.1

宫亦各二百九十二，纵横八百七十六。"按杨辉连环图(图

---

① 丁易东指明九宫，即九个小三阶幻方的位置，正道破构造法的奥秘。

② 杨辉未讲明构造法。

6.5.23)虽也具有这些特性，但丁氏图与洛书图的关系指陈密切，借此可以明确构造原理：按照洛书图 1～9 所在位置给九宫排序(用汉字写出)每宫八个元素，“上行左”按序(自一宫开始)填写 1～9。“左行上”按逆序(自九宫开始)填写 10～18。左行下又按序(自一宫开始)填写 19～27。周而复始地可填满 8×9＝72 个自然数，终成此图。这是杨氏连环图所未逮。

其三，“洛书四十九位得太衍五十数图”与杨辉攒九图类似，而扩大同心圆至六个和直径至四条增多了元素个数。自然数 1～49 分布在六个同心圆圈上(图 6.7.2)，它的构造方法：

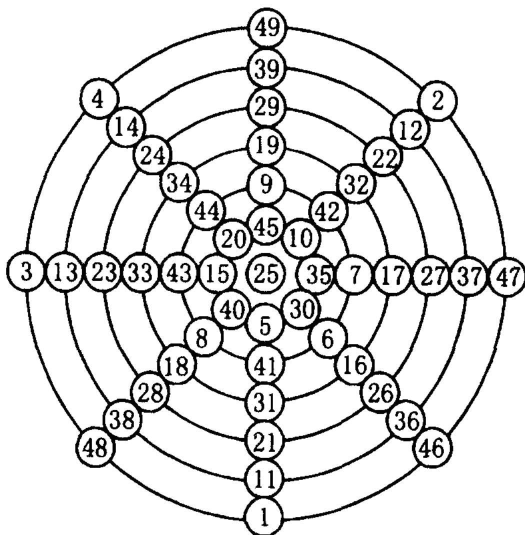


图 6.7.2

(i)取中间数 25 为中心。

(ii)以 1 为个位数的 1，11，21，31，41；以 2 为个位数的 2，12，22，32，42；以 3 为个位数的 3，13，23，33，43，以 4 为个位数的 4，14，24，34，44 分别自外而内地从外一层按洛书数：“二四为肩，左三履一”位置填写。

(iii)以 5 为倍数的八个数，5，10，15，20，30，35，40，45 分别按洛书数“二四为肩，六八为足，左三右七，戴九履一”位置把 5 的倍数填写在最内层。

(iv)以 6，7，8，9 为个位数的其余二十个数 6，16，26，36，46；7，17，27，37，47；8，18，28，38，48；9，19，29，39，49 分别由内而外地从内第二层开始按“六八为足，右七戴九”位置填写。

丁易东所作此幻圆同心圆上元素等和为 200，加上中心数各为 225。每条直径上元素等和为 325。所有元素关于中心对称的数对都有等和 50。丁氏作图至此总结说：“今以洛书之法，纵横等布遂成此图。其位虽四十有九，而对位之数合成五十，周围各二百。”与“大衍之数五十，其用四十有九”相联系，此虽为象数神秘主义之作，但牵强附会得如此巧妙，真是神乎其技了。

吴敬　明代仁和(今浙江省杭州市)人，1450 年作《九章算法比类大全》共十一卷。为明代数学著作之代表作，其首卷之后，第一至第九卷按《九章算术》名目分类。由一千多应用题组成的习题汇编。每卷体例：以“古问”为始，其次是比类，再次为诗词——歌谣体题。第十卷专论开方，简单的多项式方程解法经核对，[①] 此书受杨辉《详解九章算法》影响巨大。把今存《永乐大典》第16 344卷硕果仅存的少广章及宜稼堂本杨辉书各卷与吴敬书中所引古问核对，后者都以前者为蓝本。杨氏书中“解题”极大部分被保存在吴氏书中，文字上的改动很少。又如吴氏书方田章内古问标题是三十八问，实际是四十一问，多出三问，为《九章算术》所无。其中二问保留杨辉“解题”，其余一问审其语气，也有浓郁的杨氏笔调，再如少广章吴氏书标题二十四问，实际多出一问，就是杨辉《详解九章算法》少广章中那一问：开三乘方

① 严敦杰，1966，第 150～152 页。

题。

程大位　(1533～1606)，明代休宁(今安徽黄山市)人，1592年作《算法统宗》十二卷，此书为我国最畅销的珠算教科书，影响深远，直至本世纪初，还是启蒙书塾的教材。

《算法统宗》开宗名义述“算学源流”。杨辉所作前后期四种七卷赫然在目，足见程氏曾以杨氏书为重要参考用书。而事实上

卷 1 中九归、倍折等算法显系杨辉速算法的变通。

卷 2 论珠算，其中口诀部分因袭杨辉。

卷 6 有关解二次方程题如：开带从平方、长宽相差求和、减从开方、方圆求径等都取自杨辉《田亩比类乘除捷法》其中不少应用题所取数据一字不改地沿用杨氏书。

卷 8 海岛题解，程氏全录杨辉《续古摘奇算法》卷下的有关创见，使读者在知其然的同时，又能知其所以然。

特别值得一提的是程氏对纵横图尤为钟爱。在卷一之前有首篇。河图，洛书。洛书易换数而得三三图。其说明文字全录杨辉十六字诀，在卷 12 又以大量篇幅录杨辉幻方、幻圆及异形幻圆共十二种。其中五五图(图 6.7.3)对构造法略有解释：迈开镶边构造法的第一步。“易换术曰：先以十三居中位，周围连中位各皆三层也，列图于右。各相对换毕，即得数。”程氏把 13 作为核心。以数对(7,19)，(8,18)，(9,17)，(12,14)作为内层，又以数对(1,25)，(3,23)，(10,16)，(22,4)，(21,5)，(6,20)，(2,24)，(11,15)作为外层。它们有等和 26。当然这只道出了构造法的初步，怎样具体确定这些数对的位置使成为幻方，还有许多环节待解。清代方中通(1633～1698)所著《数度衍》二十六卷其中卷首全录程大位《算法统宗》

外	25	斜对	1
外	24	正对	2
外	23	正对	3
外	22	正对	4
外	21	斜对	5
外	20	正对	6
内	19	正对	7
内	18	斜对	8
内	17	正对	9
外	16	正对	10
外	15	正对	11
内	14	斜对	12

转引自杨辉所作图十四幅。

张潮　清代(1650～?)新安(今安徽黄山市)人，在所著《心斋杂俎》卷下有“算法图补”，他说：“《算法统宗》所载十有四图，纵横斜正，无不妙合自然，有非人力所能为者，大抵皆从洛书悟而得之。内惟百子图于隅经不能合，因重加改定。”此外他又作了许多幻圆和异形幻圆。张潮改定，杨辉的百子图，使从半幻方成为幻方。他命名为“更定百子图”并说：“纵横斜正各五百零五数，一百子作二百二十子用。”他的九宫图尤妙，他说：“四十九子作八十一子用，各二百二十五数。”可惜两图都未示构造方法。两图俱是杨辉幻方学说研究的继续和发展，详见第七卷第二编。

5	23	16	4	25
15	14	7	18	11
24	17	13	9	2
20	8	19	12	6
1	3	10	22	21

图 6.7.3

二　近现代研究

杨辉所著数学专著大概在17世纪以后二百多年内在民间消失。《四库全书》开馆也未能从《永乐大典》中辑录成书。《永乐大典》后遭大劫，杨氏书致散失殆尽，几经周折才于19世纪中叶有上海郁松年《宜稼堂丛书》本(残缺)印刷重见天日，当阮元编《畴人传》正编时(18世纪末)虽秦(九韶)杨(辉)俱为立传，但以杨氏资料缺欠，杨传寥寥数语而已：“辉所称算书……今无一存者。”在《宜稼堂丛书》问世前(1840年)罗士琳《畴人传》续编完成，首卷(第四十七卷)第一篇就是杨辉传。对杨氏工作的认识不够，评价有欠公允。20世纪20年代以来，对杨辉算书的研究很有进展，他的重要贡献渐为人知，受人重视和赞赏。

钱宝琮　第一篇数学史论文“九章问题分类考”[1]就以《详解

① 钱宝琮. 九章问题分类考. 学艺，北京：商务印书馆，1921

算法·纂类》为讨论主题，评述杨辉的革故创新思想，并提出钱氏自己的进一步分类设想：杨辉数学工作的重要贡献之一是保存已失传的非常重要的数学发明。钱氏在《中国算学史》上卷①一再弘扬其事，后来在各种教材、论著中迭为引用。“贾宪为《九章算术》撰细草，书已失传。惟杨辉《九章算法纂类》录有贾宪少广开平方法及开立方法各有二条，一曰立成释锁法，一曰增乘方法当是《九章细草》之佚文……《永乐大典》本杨辉《详解九章算法》谓有“开方作法本原”之图……辉言出释锁著书，贾宪用此术……可见巴斯楷三角形在中国发明甚早。贾宪增乘开方法……可应用于任何次多乘方，即带从者亦能合用。与霍纳氏求代数式实根之累次近似算法相同。”

“杨辉《田亩比类乘除捷法》自序言：中山刘先生益作《议古根源》”钱氏转引《议古根源》弦矢题世人始知宋时已能建立含负系数的四次方程并能数值求解②。

李俨　于1927年发表“中算家的纵横图研究”。他据日本关孝和在1662年抄本《续古摘奇算法》的三上义夫再抄本撰写此文，全面介绍杨辉在幻方领域内的开创性成果。他指出此学在我国的兴衰史实，并指出因为清代梅珏成《增删算法统宗》以河图纵横数为小术，无关大用，乃并原书首揭河图洛书以见数之本原者，亦汰去了，从此纵横图存而不论约百有余年。由于《续古摘奇算法》卷上长期在中国失传，因此李俨此文为古算钩沉，其作用至大。

李俨还在1925年所发表的长文“大衍求一术之过去与未来”③中以一节的篇幅探讨“宋杨辉的剪管术”全录有关问题四则，

---

① 钱宝琮．中国算学史上卷．北京：商务印书馆，1932：107～109

② 上引书，第103页。

③ 李俨，1925

这也是至关重要之举。因为杨辉所拟此四题都在《续古摘奇算法》卷上，如无李文转引，中国读者对一次同余论的宋代发展史认识将只知有秦，无论杨辉了。

李俨在 1926 年发表“重差术源流及新证”，以杨辉出入相补原理证海岛诸题[①]。

李俨在 1929 年发表“中算家之巴斯噶三角形研究”[②]一文，强调中算家首论巴斯噶三角形者，引用《永乐大典》中杨辉语：“出《释锁》算书，贾宪用此术。”从此一代又一代地使中学生每学至此，数典知祖。

在 1930 年还详细考订杨辉算书今存实况，并自海外文献辑佚[③]。

严敦杰 在 1966 年详文“宋杨辉算书考”[④]。对今存残本《详解九章算法》及已佚《日用算法》从其他文献作出令人信服的复原设想。他又着重整理杨辉的教育思想，起到古为今用的作用。

今人论述

在 20 世纪 70 年代下半叶一次全国性中国数学史座谈会上吴文俊宣读三万字论文：“我国古代测望之学重差理论评介，兼评数学史研究中某些方法问题”[⑤]，文中对刘徽《海岛算经》九题历来对术文推导的做法，作出全面述评。论文指出：“刘徽的《海岛算经》原来有注、有图。”析理以辞，解体用图。“所谓注即相当于现代的分析与证明。可惜注、图都已遗失。后世，以迄近代，有不少中外人士曾补作证明。”吴氏按历史先后次序择其重要者介绍，并讨论其正误得失。他指出：“现存最早讨论《海岛算经》诸

① 李俨，1926

② 李俨，1929b

③ 李俨，1930a

④ 严敦杰文见《宋元数学史论文集》。

⑤ 参见《科技史文集》(8)，第 10～30 页，上海科技出版社，1982

题的证明者，见于宋杨辉的《续古摘奇算法》。杨于书末有海岛题解。……在《乘除通变本末》上卷也说：海岛题法，隐奥莫得秘。李淳风虽注，只云下法，亦不曾说其原。”吴文俊经过充分比较评论说：“所列举各家的论证，我们认为除杨辉的论证以及李俨对杨辉的论证所作解释以外，其他则不仅与中国古代几何学的真意不符，说得严厉一些，可以说所举证明都是“错误”的。”吴氏所说：“错误”是指有的证明妄加平行线，以斜三角形代替勾股形，或以代数方法，甚至引入三角函数方法，违背《海岛算经》成书时代历史背景的当时做法。吴氏这一论文不但发现杨辉在数学方法上的创见，而且还因此深深地影响数学史界，进一步实事求是地做研究工作。

这二三十年来国内学者继续展开对杨辉数学专著的研究。

——在《详解九章算法》方面的论著有郭书春(1988,1990)，梅荣照(1989)，孔国平(1993)，沙娜(1993)。

——在《田亩比类乘除捷法》、《乘除通变算宝》方面的论述有李培业(1985)，特古斯(1990)，徐义保(1990)，孙宏安(1995)王荣彬(1998 b,1999)。

——在《续古摘奇算法》方面有李继闵(1987 a)。

1997年湖北教育出版社出版郭熙汉《杨辉算法导读》，全书437页，37万字。除对杨辉后期三部专著全文刊载外，每部专著都有概述和注释。同年辽宁教育出版社出版孙宏安《杨辉算法》，全书447页，34.8万字，译和注杨辉后期三部专著。两书对于杨辉数学工作及思想的普及有很大作用。遗憾的是对《详解九章算法》都未及深究，而这恰恰是杨辉成果的极为重要的组成部分。

第二节 杨辉算法研究在国外

一 对近邻国家数学发展的影响

朝鲜

朝鲜在王氏高丽王朝(918～1397年)太祖时代就开始立学校。到光宗时，中国后周武胜军节度使巡官双冀，随册封使到高丽，因病留在朝鲜，于978年建议仿唐制，设科取士，有进士、明经二科，分医、卜、律、算等专业。

宋太祖赵匡胤于960年建国，与高丽王王昭往返通使，大中祥符八年(1015年)高丽王王询遣使郭元来贡。《宋史·高丽传》说："(郭)元自言本国……三岁一试举人，有进士诸科，算学每试百余人，登第者不过一、二十。"

朝鲜自王氏王朝到李氏王朝，中国历经宋、辽、金、元、明，四百年间，中朝两国和平相处。文献记载[①]《九章算法》、《算学启蒙》(朱世杰著)、《杨辉算法》三书为士人必读之书："筹学(即数学)，随才叙用。而含杨辉算法在内的必修教材是历经宋、元、明三朝次第传入朝鲜的。至今在韩国保存自1408～1648共150年间国家考试及第名录，通过考试的累计有254名[②]。

韩国金容云、金容局昆仲合著《韩国数学史》，全书314页。在第四章李朝前期算学及天文学内以近十页篇幅全面介绍杨辉算法，全书前后又有24处阐述杨辉算法对朝鲜数学发展的影响。

杨辉算法朝鲜翻刻本封面(图6.7.4①)上书"古杭勤德书

① 李俨. 从中国算学史上看中朝文化交流. 中算史论丛第五集. 北京：科学出版社，1954：186～191

② 金容云，金容局. 韩国数学史. 东京：日本槙书店，1978



图 6.7.4　①

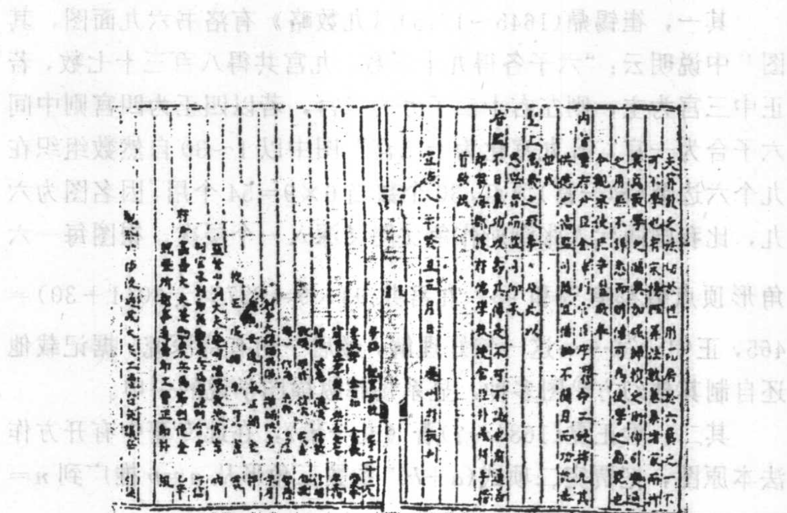


图 6.7.4　②

堂”，正中“宋杨辉算法”，右“乘除通变算宝”“法算取用本末”，左“田亩比类乘除捷法”“续古摘奇算法”，后末有朴彧跋(图6.7.4②)：“夫算数之法切于世用，而居于六艺之一，不可不学也。有宋杨辉算法数卷，集诸家而折衷，真数学之阃奥，加减归损之术、伸引变通之用无不详悉而明备，可为学之规范也。今观察使臣辛引孙奉内旨嘱府尹金乙辛、判官李好信命工锓梓……不阅月而功讫，恭维我圣上万几之暇拳拳及此，以惠学者。而监司仰承睿鉴，不日集功，以广其传，是不可不志也。前通郎宁海都护府儒学教授官朴彧拜稽顿首，敬跋”，下具中国明朝纪年“宣德八年癸丑五月”。从跋文可见这次朝鲜再版是属于国家任务。

杨辉算法和其他两种中算典籍一样为朝鲜数学研究提供基础知识，我们从彼邦知名数学家专著中可以得到印证。这里选举二例。

其一，崔锡鼎(1645～1715)《九数略》有洛书六九面图，其图[①]中说明云：“六子各得九十三数，九宫共得八百三十七数，若正中三宫为主，则左右十二子分为二宫，若以四正为四宫则中间六子合为一宫，凡九宫化为十二宫”图中以1～30自然数组织在九个六边形(称一宫)顶点，30个数当$6\times9=54$个用，因名图为六九，比我国同代人张潮所作龟文图又深入一个层次。崔图每一六角形顶点数都有等和93，九宫共$93\times9=837>\frac{1}{2}30(1+30)=465$，正中三宫……这一句好理解，最后一句有待深究，据记载他还自制其他幻方[②]图多种，显系杨辉纵横图学说的引申。

其二，洪正夏(1684～?)著《九一集》，在此专著中有开方作法本原图，把贾宪二项式$(a+b)^n$系数三角形从$n=b$推广到$n=$

① 此图引入1994年Companion Encyclopeadia of the History and Philosophy of the Mathematical Science中，作为朝鲜数学的代表作。

② 韩国数学史p. 24

10，又在同书出现杨辉的刍童垛题："今有酒瓶一垛，底阔五个，长十二个，问：积几何？""今有酒瓶一垛，阔八个，长一十三个，问："该积几何？"[①]

日本

中国数学对日本的影响在历史上有前后期，前期情况已在《中国数学史大系》第四卷第八编论述，日本镰仓幕府(1192～1332年)一百多年间，中日两国都战乱不断：我国宋元时除商舶私相交往外，未复邦交，明代洪武四年(1371年)方有"日本国王良怀遣其臣僧祖来进表笺及方物……来朝"[②]，以后各朝互派使节，史不绝书。中国明代即日本江户时代，从中方东传日本算书，可考的有宋杨辉《杨辉算法》、元朱世杰《算学启蒙》、明吴敬《九章算法比类大全》、程大位《算法统宗》。李俨认为："方阵之事，日人习学的甚多，其基本定理多由宋杨辉所记纵横图和明程大位《算法统宗》得来。"李俨又说："宋《杨辉算法》流传于朝鲜的，有明洪武戊午(1378)古杭勤德堂刊本，明宣德八年(1433)……刻本尚有流入日本者，日本算圣关孝和于宽文辛丑(1670)曾写录一部"[③]。

现就以关孝和的工作为代表阐述杨辉算法对和算的深刻影响，他的著述甚富，在本卷第五编曾以其《括要算法》第2、3卷成果与秦九韶工作做比较，如以其第1卷垛积总术中有关自然数幂和公式与杨辉有关工作做比较，他完整推导出自然数幂和公式[④]。我们知道杨辉《乘除通变算宝》关于垛积术仅载二题："三角垛底面七个，问：积几何？"四隅垛底层六个，问：积几何？"后有答文、术文，而垛积总术设题与杨辉同一口气："今有三角衰垛，

① 韩国数学史 245～246

② 明太祖实录卷 68

③ 李俨，1954，第五集．178～180

④ 见《中国数学史大系》副卷第一卷第七编第二章

底子三个，问：积几何?""今有平方垛，底子三个，问：积几何?"答文、术文体例也相一致，关孝和仅仅凭借这一简短信息，却推衍出大块文章，完整解决了求自然数幂和问题。

此外我们已在第五编讲述了关孝和为求正多边形边长与其内切圆半径的关系建立多项式方程，有达十八次者，且以贾宪增乘方法解方程得到精度很高的正根，曾以此比较秦九韶工作。但《秦九章》能否东传日本，尚存疑问。而杨辉《田亩比类乘除捷法》卷下引中山刘益《议古根源》第18问，从已给弧田、面积、直径求弦矢题，建立方程和解方程、术草俱全，杨辉说："详注图单，以明后学，其余自可引而伸之，触类而长，不待尽述也。"很可能关氏"十八乘方、翻法试之"是从此获得契机，杨辉旨在举一反三，东瀛关氏心领神会，不愧为"引而伸之，触类而长"的后学，他尽得杨辉真传，从三、四次方程到十八次，答数的有效数字从一、二个到九、十个。

在幻方方面关孝和有专著《方阵之法・圆攒之法》(1683年)附图多幅，三阶至十阶俱全，分别称为三方阵、四方阵……十方阵，除三方阵与洛书图全同外，余图独立创新，与杨辉所拟纵横图全不一样，例如五阵图(图6.7.5)与杨氏五五图及其阴图全异，关氏在幻方构造理论方面师承杨氏，自不待言，但推陈出新，此中大有进展，令人钦敬，关氏所作构造法分为两大类：[1]

8	7	23	25	2
22	12	17	10	4
5	11	13	15	21
6	16	9	14	20
24	19	3	1	18

图 6.7.5

① 详见副卷第一卷第六编第二章。

其一，奇方阵、构造总纲统率于“三方阵歌：九子斜推，上下互换，左右相换，四正出维。”

其二，偶方阵，构造总纲基于“四方阵歌，四四方阵，外角递垛，内隅对换，定是平均。”偶方阵又分为单偶方者和双偶方者。

三种方阵在总纲理论指导下，各立具体构造过程，而且分别举了 19 阶、16 阶和 18 阶幻方例，不言而喻杨氏学说在日本得到长足光大发扬。令人不能置信的是关氏所说单偶方阵 $2(2m+1)$ 型，双偶方阵 $4m$ 型构造法欧洲是在关氏前后发表的。当时日本也闭关自守，自西方传入似不可能，应该说全是关氏在揣摩杨辉成果后的发明。

在幻圆方面，关孝和从杨辉攒九图发展到五周径之图（五条直径、五个同心圆），总称圆攒之法[①]。

江户时代和算开山之作吉田光由《尘劫记》卷一之末以填空方式作为算题征解（图 6.7.6）。三上义夫在大正六年（1917 年）著文“和算之方阵问题”论关孝和学派在这一领域内的新成就。星野实宣《股勾弦抄》（1672 年）有二十阶幻方，为和算所作阶数最高者[②]。

二　近现代评介与研究

一般评介

英国

伟烈亚力在鸦片战争后不久来华，他写成“中国科学札记：算术”，在当时《字林西报》连载，对秦九韶的业绩大力宣扬，对同代人杨辉有特色的工作却很少涉及。其实杨辉的主要专著上海郁松年同时刊刻入《宜稼堂丛书》，伟烈购书如饥似渴，岂能忘却入

---

① 详见副卷第一卷第六编第二章。

② 构造幻方贵在造法。阶数多，不能说明幻方工作的质量好。

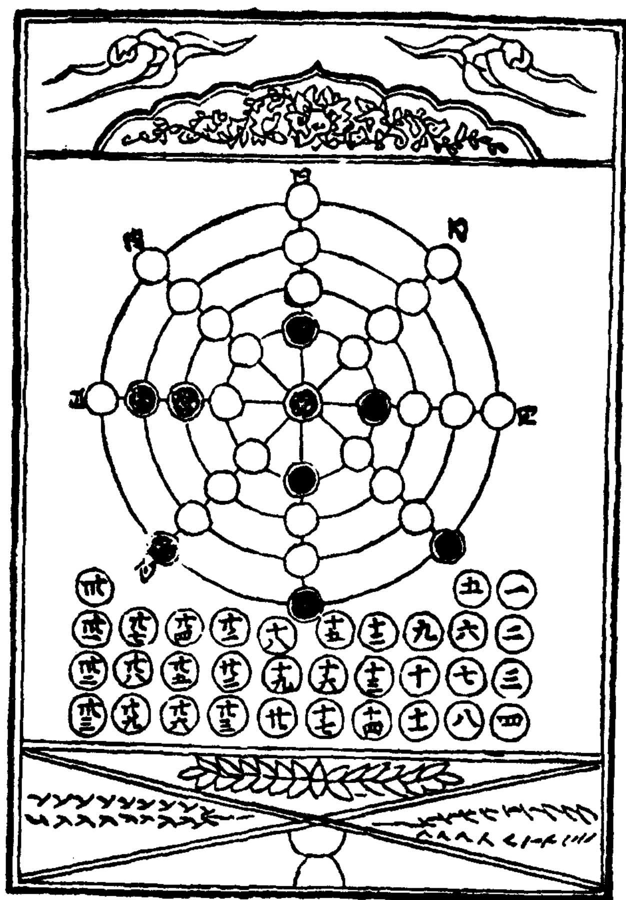


图 6.7.6

藏杨辉算法，但因何扬秦抑杨，令人费解。

李约瑟《中国科学技术史》第三卷（1959 年英文本，1978 年汉文译本）数学编谈到杨辉的功勋，他把藏在剑桥大学图书馆的《永乐大典》卷16 344贾宪三角形的书影载入有关章节，以为真凭实据。

何丙郁在《科学家传记辞典》(C. C. Gilispie, Dictionary of Scientific Biography, vol. 8, pp. 418～425) 从详介绍杨辉及其数学专著，认为杨辉是秦九韶与李冶之间的过渡人物。

日本

三上义夫用英文写的《中日数学发展史》(1913 年)上编第 13 章全面介绍杨辉。

美国

萨顿(G. Sarton)在《科学史导论》(Introduction to the History of Science) 卷 2 为杨辉立传，指出他是 13 世纪世界知名数学家之一。

三　《杨辉算法》的英文译释本

新加坡蓝丽蓉于 1977 年在新加坡大学出版社出版英文本《杨辉算法》(A Critical Study of the Yang Hui Suan Fa(书影图 6.7.7)这是她在国立新加坡大学博士论文增订本。论文是在澳大利亚 Griffith 大学亚洲研究所主任何丙郁、英国剑桥大学李约瑟博士和中国科学院中国自然科学研究室室主任李俨、日本京都大学人文科学研究所薮内清教授的指导和关心下完成的。全书 1～360 页，分上下两编。(图 6.7.7 为书影)

上编　杨辉后期数学专著七卷足本英文译文

下编　注释和述评

第一章　《乘除通变算宝》

引言—乘法—除法—数列

第二章　《田亩比类乘除捷法》

引言—长方形—正方形与圆—三角形与梯形—《五曹算经》中的谬误—二次方程—商—从—筹算法—正、负—代数表示法及其推广—与霍纳法的比较—田亩分割

第三章　《续古摘奇算法》

A CRITICAL STUDY

OF THE

YANG HUI SUAN FA

A Thirteenth-century Chinese Mathematical Treatise

LAM LAY YONG

楊

輝

算

法

SINGAPORE UNIVERSITY PRESS

1977

图 6.7.7

引言—幻方—幻圆—幻方、幻圆比较研究—不定分析—乐律计算—历法计算—量制—亩—比例—线性方程—非整数开方—测量高度。

蓝丽蓉的英文译本忠实、流畅，可谓信达雅，注释周到、中肯，旁征博引，广泛引用当时已发表的各种论著而外，尤多她自己独到的创见。现以有关幻方、幻圆以及异形幻圆为例予以介绍。

有关杨辉幻方构造法的复原设想，对六六图、九九图与洛书图的联系，七七图与镶边三阶幻方的形成过程等我们已在第五章一再引用。有关杨辉幻圆、异形幻圆的构造复原设想以及各元素间性质她尤有心得，道出前人未道之秘。

攒九图

蓝丽蓉指出构造法：在图 6.5.19 中，除去圆心的 9 以外，其余三十二个数分成二组，各写出四阶幻方，它们的幻和都是 69。在此基础上填出同一直径、同一同心圆上元素都有同一幻和的幻圆。(四阶幻方见图 6.7.8)

聚五图

她认为聚五图(图 6.5.20)的构造是以五五图第一元(图 6.5.3)为基础：正中那一环五个数取自左第一列，上、下两环取自第四、三行，左、右两环取自第一、二行。第五行末四数 3，10，22，25 未取。她还指出杨辉自己未道的另一有趣性质。与圆心等距的另二组同心圆上四元素连中心数在一起，与其他的五环都有幻和 65(图 6.7.9)(5，6，14，17，23)，(5，2，18，19，21)。

20	33	12	4
16	1	31	21
23	13	19	14
10	22	7	30

6	8	28	27
32	17	5	15
29	26	11	3
2	18	25	24

图 6.7.8

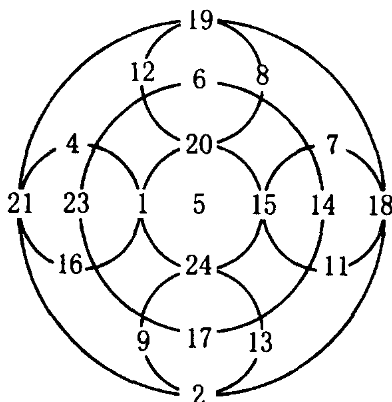


图 6.7.9

聚六图

她敏锐地看到如果按照杨辉原著翻刊本单纯地理解为(图 6.5.21)“六子回环,各一百一十一”,那是太肤浅(superficial)了。经过仔细推敲她指出,非常可能是在多次传抄、复刻时被搅乱、歪曲(distorted)。注意到元素 31，35，7，24，6，33 与中心等距，但它们的和不等于六阶幻方的幻和 111，她设计当 8，35，28，1，6，33 六元素在同一同心圆上时有幻和 111，就把原著图除了三环保留不动外，把其余四环绕自己的对称心转动，使中左环的 8，上右环的 28，中右环的 1 与不动三环的元素 35，6，33 与全图中心有等距离(图 6.7.10)，于是元素 12，10，23，22，20，18 在外同心圆周上，它们也有幻和 111，而且其余二十四个元素分两组(十二对)有规律地安排在半径不同的同心圆上,它们分别都有等和 2 倍幻和 111×2=222，它们是：

11，27；31，32；4，3；2，30；24，15；36，7；

21，5；16，14；19，29；17，35；20，25；13，9。

这证实现存刻本所记是被舛误了。

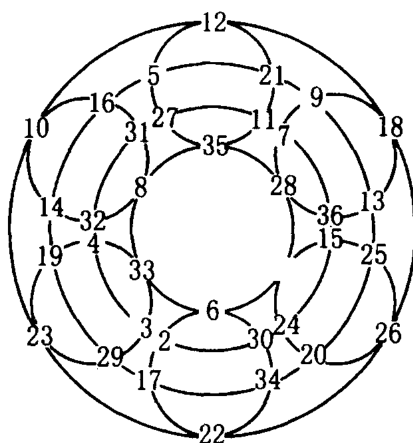


图 6.7.10

聚八图

自然数 1～24 填记在四个互交圆上(图 6.5.22)除了杨辉所指出的性质二十四子作三十二子用外，蓝丽蓉还注意到众多的等和。

四个圆，每圆八数有等和 100(图 6.7.11)。

四个圆交于八点，它们有等和 100。其余十六个点，分为两组，都分别与全图中心有等距离：

23，4；12，13；21，2；6，11 有等和 100，又

11，16；24，1；9，14；22，3 也有等和 100

她进一步考察具有等和为 50 的四个元素：

①把四个圆作水平直径分为八个等分，每等分上元素和

②用竖直直径分为八等分，每等分上元素和

③全图穿过四个元素的四条水平直线上元素和

④穿过四个元素的四条竖直直线上元素和

⑤靠近中心四个数：8，17，6，19 的和

⑥所有关于过中心的水平直线对称的任何四数的和

以她的生花妙笔，把聚八图描绘得如此妙趣横生，令人不可思议。不仅如此，她还给出了复原设想。

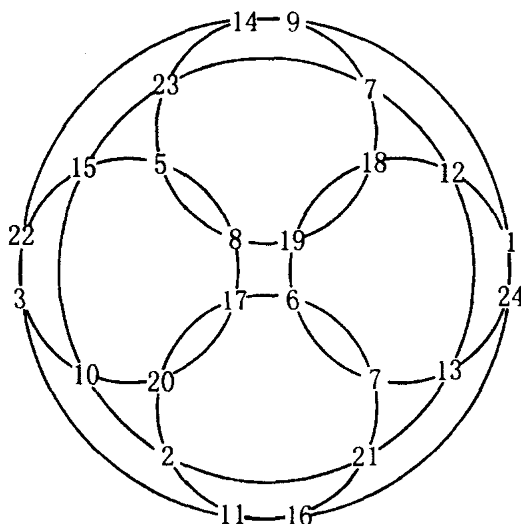


图 6.7.11

构造程序：(i)把 1～24 写成互为补数(和 25)的数对：1，24；2，23；3，22；…等等。(ii)过图形中心作水平直线。所有元素都关于此水平线都与其补数互相轴对称。(iii)所有元素关于图形中心后继奇数或后继偶数心对称：如 1，3；2，4；5，7；6，8；等等。(iv)所有元素分四组和谐地分布在四个圆环上。

八阵图

蓝丽蓉观察到八阵图(图 6.5.23)是怎样构造的。构造程序为

(i)把自然数 1～64 写出互为补数(和为 65)的三十二对数：1，64；2，63；3，62；…；32，33。

(ii)把八个圆环排成两行(图 6.7.12)。填写 1，2，3，4 四元素及圆环号一、二、三、四。又关于图形中心心对称位置写出 5，6，7，8 及五、六、七、八。

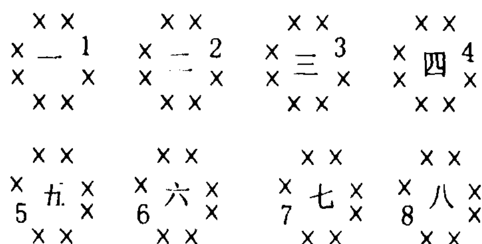


图 6.7.12

(iii)然后按(ii)反方向在 1，2，3，…，8 关于各自圆心的对称位置填写 16，15，14，…，9。

(iv)继续在一、二、三、四圆环内左下角填写 17，18，19，20(顺序)，而在五、六、七、八圆环右上角(各自相应心对称位置)。再一轮是 25～32 从第八环起填(图 6.7.13)。

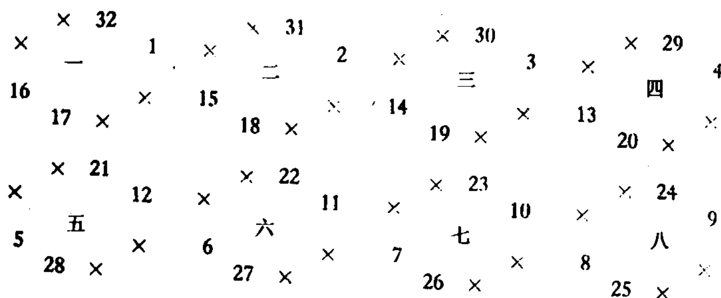


图 6.7.13

(v)把 1～32 各自补数填入各圆环通过各自中心的水平轴轴对称位置。

(vi)把九个环平移(无转动)到图 6.7.14 的位置。

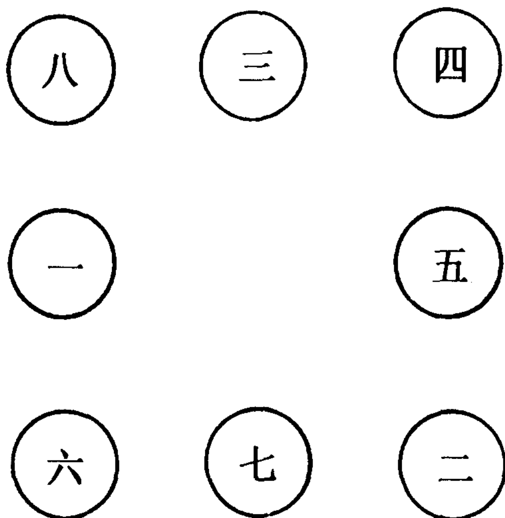


图 6.7.14

(vii)最后把第三、七两环绕自己的心顺时针向转 90°。

由于每一个环各含四对补数，因此各自有等和 260。

蓝丽蓉还指出：

其一 八阵图(图 6.5.23)四个数对(1,64)(3,62)(5,60)(7,58)适为奇数环上最靠近图形中心,它们在同一同心圆上也有等和 260。

其二 十分有趣的是如果把杨辉的易数图(图 6.5.10)分为八个区域①，那么各自所含元素恰如图 6.5.23 中的八个圆环所含数，这就说明八阵图的构造法。

连环图

蓝丽蓉对连环图也作出复原设想，其构造程序是：

(i)1～72 自然数，写出三十六对互有和 73 的补数对，如 1,

① 竖向分成四双列，然后以中央水平线等分这些双列。

72；2，71；3，70；…

(ii)列出九个圆环(图 6.5.24)，自上而下三行，自左而右三列，每环有八个位置。

(iii)从上右环开始，在其上左角填 1，下右角填 2。相应位置在上中、上左圆环分别填 3，4；5，6。在相应的下右、下中、下右圆环位置填 7～12。至于中行三圆环也始于右环，但在其下右位置填 13，上左位置填 14；类似地在左、中环填 15，16，17，18。又在中行左圆环在上左位置填 19，下右填 20，其余两圆环在同样位置填 21，22；23，24——类似方式一直填到 36 止(图 6.7.15)。

(iv)以各自补数关于通过圆环心的竖直轴填入已填各数的轴对称位置，连环图已填好。

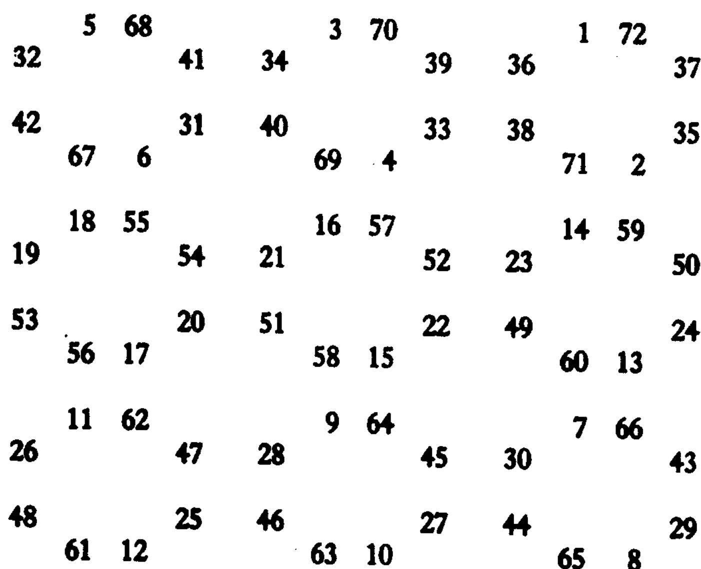


图 6.7.15

连环图中不但十三个圆环上八元素有等和 292，而且每一左

右半圆或是上下半圆四元素之和都是146。每圆环左右相对，上下相对四元素之和也都是146。

72	37	36	1
71	38	35	2
70	39	34	3
69	40	33	4
68	41	32	5
67	42	31	6
66	43	30	7
65	44	29	8
64	45	28	9
63	46	27	10
62	47	26	11
61	48	25	12
60	49	24	13
59	50	23	14
58	51	22	15
57	52	21	16
56	53	20	17
55	54	19	18

图 6.7.16

蓝丽蓉还提出另一种方案以获得九个圆环的元素：把1～72自然数排成四列如图6.7.16，每二行取八个数，这就是九个圆环所含元素。

对于连环图她只给出构造方法，未及理由。有待新世纪学者们进一步探索。

杨辉后期专著已有了英文注释本，其前期专著蓝丽蓉也撰文，使大白于西方世界。

《详解九章算法》英文节译本及其述评

《详解九章算法》少广章部分她分别在1969年、1980年在德国《自然科学史纪录》和美国《国际数学史杂志》撰文：英文全译在《永乐大典》所存问题及材料。这两篇论文在学术界特别是国际数学界无疑起了很重要作用，因为一般评介对杨辉的具体细节不可能有如此深入分析。在介绍杨辉引入其先辈刘益、贾宪有关数值方程时，蓝丽蓉还比较了西方有关发展史实，在历次国际科学(数学)史会议中她一再阐明杨辉这一功勋。

盈朒章部分她1974年在《国际数学史杂志》撰文：英文全译宜稼堂丛书本所收二十题以及杨辉所作“解题”、“比类”和“细草”，这是西方最早读到的杨辉有关机动灵活、不拘泥一格的解题思想。蓝氏还重点分析第9题(米粟同舂)、第10题(瓜瓠对长)、第12题(醇酒行酒)、第13题(大器小器)、第15题(漆三油四)、第18题(黄金白银)、第19题(良马驽马)，杨辉所作异于《九章算术》的新解法及其评论。

《日用算法》英文节译本及其述评

杨辉的前期第二部专著《日用算法》已佚，仅在《永乐大典》残本中尚有遗文。蓝丽蓉据中华书局1960年所辑全球尚存卷复印本撰写论文“13世纪算术教科书《日用算法》”于1972年在著名的科学史杂志《Isis》发表，对所存部分全文英译使西方世界能快啖硕果。在结论中她指出《日用算法》的大部分材料虽已不可复得，在道遗憾的同时，毕竟我们还能从仅存的十题中领略杨辉的数学才能：从分数化小数、长除法、两求斤化除法为乘法以及线性方程组解法。对第10题：“菽每石七百八十五文，麦每石一贯一百六十文，今用钱二贯九十七文，籴到菽、麦共三百石，问：本各几何”一题蓝氏特感兴趣并为原著附图（图6.7.17）作出解释。她设菽、麦各籴x，y石，据题意列方程组$x+y=300$，$785x+1\ 160y=297\ 000$做一次减法：$(1\ 160-785)y=297\ 000-785\times 300$，于是所求$y=\frac{61\ 500}{375}=164$（石）。她认为此图是这种方程组的图解法。她的解释至今有现实意义，用来作为线性方程组（二元）开头课教学，非常得体。

两宋时期研究论著文献

（为引用方便，本文献按作者分类，以作者姓名拼音字母为序．每类又以年代先后为序）

[阿耶波多 499] 阿耶波多．文集第二卷 Aryabhata，Aryabhatia，Indian Academy，1976

[白尚恕 1966] 白尚恕．秦九韶测望九问造述之探讨．宋元数学史论文集，北京：科学出版社，1966．290～303

[白尚恕 1985] 白尚恕．不定分析发展简史，数学史译文集（续集），上海：上海科技出版社，1985．133～168

[白尚恕 1986] 白尚恕．《数书九章》“计浚河渠”题分析，数学通报，1986(6)：43转33

[白尚恕、沈康身、李迪、李继闵 1987a] 白尚恕、沈康身、李迪、李继闵．《数书九章》研究总论，秦九韶与《数书九章》，北京：北京师范大学出版社，1987：1～11

[白尚恕、李兆华 1987b] 白尚恕、李兆华．《数书九章》对《九章算术》的继承和发展，北京：北京师范大学出版社，1987．103～123

[白尚恕、沈康身 1987c] 白尚恕、沈康身．李倍始《十三世纪中国数学》评述，北京：北京师范大学出版社，1987．467～477

[Э. И. Березкина（别列兹金娜）1980] Э. И. Березкина（别辽兹金娜）．Математика Древнего Китая. Москва：Издательство《Наука》。

[婆什迦罗 1150] 婆什迦罗. 丽罗娃祇 Bhasкara, Lilavati, H. T. Colebrooke 英译本, London, 1817

[陈信传、张文材、周冠文 1992] 陈信传、张文材、周冠文. 《数书九章》今译及研究. 贵阳: 贵州教育出版社, 1992

[陈艳 1991] 陈艳. 秦九韶大衍总数术研究, 杭州大学硕士论文

[陈玉森 1987] 陈玉森. "先天图"中的理数问题, 哲学研究, 1987(3): 57～62

[程金华 1987] 程金华. 秦九韶"三斜求积"造述之探讨, 湖北师范学院学报(自然科学版), 1987(1): 36～39

[程廷熙 1963] 程廷熙. 秦九韶雨深雪厚例解的讨论, 数学通报, 1963(1): 34～36

[董光璧 1988] 董光璧. "大衍数"与"大衍术". 自然辩证法通讯, 1988(3): 46～48

[杜石然 1966] 杜石然. 试论宋元时期中国和伊斯兰国家数学交流. 宋元数学史论文集, 北京: 科学出版社, 1966: 241～265

[杜石然等编 1982] 杜石然等. 中国科学技术史稿上、下册, 科学出版社

[杜石然 1987] 杜石然. 再论中国和阿拉伯国家间的数学交流. 香港大学中文系集刊, 中国科技史专号, 1987, 1 (2): 213～218

[冯礼贵 1987] 冯礼贵. 试论沈括的数学思想. 东北师大学报(自然科学版), 1987(3): 31～40

[冯立升 1996] 冯立升. 《数书九章》中的测量方法研究, 中国数学史论文集(四). 济南: 山东教育出版社, 1996. 81～87

[傅宗、李伦祖 1975] 傅宗、李伦祖. 隙积术与会圆术, 甘肃师大学报(自然科学版), 1975(4): 17～22

[傅种孙 1918] 傅种孙. 大衍(求一术), 北京高师数理杂志,

1(1)：70～77

[高均 1920] 高均.大衍术论.工科杂志(复旦大学院)，1920(2)：7～64

[高斯，1801] 高斯. 算术探讨.（拉丁文本）

[C. F. Gauss(高斯)] C. F. Gauss(高斯). Disquisitiones Arithmetique，Yale Univesity Press 英译本，1966

[郭书春 1982] 郭书春. 学习《数书九章》札记二则，科技史文集第 8 集"数学史专辑"，上海：上海科学技术出版社，1982. 123～127

[郭书春 1988] 郭书春. 贾宪《黄帝九章算经细草》初探. 自然科学史研究，1988，7(4)：51～58

[郭书春 1989a] 郭书春. 贾宪的数学成就. 自然辩证法通讯，1989(1)：53～61

[郭书春 1989b] 郭书春. 李籍《九章算术音义》初探. 自然科学史研究，1989，8(3)：197～204

[郭世荣 1988] 郭世荣. 对"计作清台"题的探讨. 内蒙古师大学报(自然科学版)，1988(4)：51～58

[郭熙汉 1997] 郭熙汉. 杨辉算法导读，武汉：湖北教育出版社，1997

[何丙郁(Ho Peng Yoke)1974～1975] 何丙郁(Ho Peng Yoke). Ulrich Libbrecht, Chinese Mathematics in the Thirteenth Century, Pacific Aflairs，1974. 46，585

[何丙郁(Ho Peng Yoke) 1975] 何丙郁(Ho Peng Yoke). Ulrich Libbrecht, Chinese Mathematics in the Thirteenth Century, Hemisphere，1975. 19，36～37

[何丙郁 1985] 何丙郁. 中西数学家传奇—高次方程数学史与秦九韶和卡丹诺. 中华文史论丛，1985(1)：239～267

[何绍庚 1992] 何绍庚.《梦溪笔谈》中的运筹思想. 中国

传统科技文化探胜. 北京：科学出版社，1992. 27～29

[何章陆 1984] 何章陆.《数书九章》算题选读，浙江师范学院油印本

[洪万生 1982] 洪万生. 中西“巴斯卡三角”的比较研究：1000～1700，思与言，1982，19(6)：525～538

[洪万生 1983] 洪万生. “十三世纪中国数学”摘要，科学史通讯. 1983，2：22

[户谷清一 1981] 户谷清一. 宋元时代计算方式的演变，中华珠算. 1981(2)：26～28

[胡道静 1979] 胡道静.《梦溪笔谈》在国外. 沈括研究，杭州，浙江人民出版社，1979

[阿尔・卡西 1427] 阿尔・卡西. 算术钥，1956（俄文）

[孔国平 1988] 孔国平. 大衍术—《数书九章》的一次同余式理论. 北京师范学院学报(自然科学版)，1988(2)：20～25

[孔国平 1992] 孔国平. 宋元时期的哲学与数学. 中国传统科技文化探胜，北京：科学出版社，1992. 46～51

[孔国平 1993] 孔国平. 杨辉《详解九章算法》初探. 数学史研究文集，1993（4)：36～41

[孔国平 1998] 孔国平. 宋元数学的抽象化. 数学史研究文集，1998（6)：49～52

[刘钝 1992] 刘钝. 一类不定方程的秦九韶解法及其推广. 中国传统科技文化探胜，北京：科学出版社，1992. 155～160

[刘钝 1993] 刘钝. 大哉言数. 沈阳：辽宁教育出版社，1993

[刘克明 1990] 刘克明. 中国古代绘画对宋代工程图学发展的促进作用. 科学技术与辩证法，1990(6)：41～46

[Lam Lay Yong(蓝丽蓉)1968] Lam Lay Yong(蓝丽蓉). The Yang Hui Suan Fa, A Thirteenth Century Chinese Mathematical Treatise. Chung Chi Journal，1968，7：171～176

[Lam Lay Yong(蓝丽蓉)1969a] Lam Lay Yong(蓝丽蓉). On the Existing Fragments of Yang Hui's Hsiang Chieh Suan Fa. Archive for History of Exact Sciences, 1969, 6: 82～88

[Lam Lay Yong(蓝丽蓉)1969b] Lam Lay Yong(蓝丽蓉). The Geometrical Basis of the Ancient Chinese Square－Root Method. 1969, 61: 92～102

[Lam Lay Yong(蓝丽蓉)1972] Lam Lay Yong(蓝丽蓉). The Jih Yung Suan Fa: An Elementary Arithmetic Textbook of the Thirteenth Century. 1972, 63: 370～383

[Lam Lay Yong(蓝丽蓉)1974] Lam Lay Yong(蓝丽蓉). Yang Hui's Commentary on the Ying Nu Chapter of the Chiu Chang Suan Shu, Historia Mathematica 1, 1974: 47～64

[Lam Lay Yong(蓝丽蓉)1977] Lam Lay Yong(蓝丽蓉). A Critical Study of the Yang Hui Suan Fa. Singapore: Singapore University Press, 1977

[劳汉生 1988] 劳汉生. 秦九韶与 Avicenna 之比较，陕西师大学报(自然科学版)，1988(2): 84～89

[U. Libbrecht(李倍始)1973] U. Libbrecht(李倍始). Chinese Mathematics in the Thirteenth Century (The Shu－Shu Chiu－Chang of Chin Chiu－shao). Massachusetts: MIT Press.

[李迪 1962] 李迪. "海伦公式"的历史，数学通报. 1962(7): 42～43

[李迪 1984] 李迪. 中国数学史简编，沈阳：辽宁人民出版社，1984

[李迪 1987a] 李迪. 秦九韶传，秦九韶与《数书九章》. 1987: 25～42

[李迪 1987b] 李迪.《数书九章》流传考，秦九韶与《数书九章》. 北京：北京师大出版社，1987. 43～58

［李迪 1987c］ 李迪.《数书九章》中的统计资料，秦九韶与《数书九章》. 北京：北京师大出版社，1987. 451～453

［李迪 1987d］ 李迪.《数书九章》与南宋社会经济，秦九韶与《数书九章》. 北京：北京师大出版社，1987. 454～466

［李迪 1991］ 李迪. 宋元时期数学形式的转变. 中国科学技术史论文集(一)，呼和浩特：内蒙古教育出版社，1991. 219～233

［李迪 1992a］ 李迪. 关于秦九韶与《数书九章》研究的近30年之进展.《数书九章新释·附录》，1992：602～610

［李迪 1992b］ 李迪. 有关秦九韶与《数书九章》的论著目录(1960～1990).《数书九章新释·附录》，1992：610～615

［李迪 1996a］ 李迪. 关于秦九韶与《数书九章》的研究史. 中国数学史论文集(四)，济南：山东教育出版社，1996

［李迪 1996b］ 李迪. 通过《数书九章》探讨“缀术”，中国数学史论文集(四)，1996：68～72

［李迪 1999a］ 李迪. 中国数学通史(宋元卷)，南京：江苏教育出版社，1999

［李迪 1999b］ 李迪. 中华传统数学文献精选导读，武汉：湖北教育出版社，1999

［李继闵 1974］ 李继闵. 沈括“隙积术”的成就，科学普及资料，1974(11)：6～7 转 19

［李继闵 1987a］ 李继闵. 中国古代不定分析的成就与特色. 香港大学中文系集刊，1987，1 (2)：249～264

［李继闵 1987b］ 李继闵.“蓍卦发微”初探. 秦九韶与《数书九章》. 北京：北京师范大学出版社，1987. 124～137

［李继闵 1987c］ 李继闵. “大衍求一术”溯源. 秦九韶与《数书九章》. 北京：北京师范大学出版社，1987. 138～158

［李继闵 1987d］ 李继闵. 从“演纪之法”与“大衍总数术”看秦九韶在算法上的成就，秦九韶与《数书九章》. 北京：北

京师范大学出版社，1987. 203～219

[李继闵 1987e] 李继闵. 关于“大衍总数术”中求定数算法的探讨，秦九韶与《数书九章》. 北京：北京师范大学出版社，1987. 220～234

[李继闵 1987f] 李继闵. 秦九韶关于“调日法”的记述，秦九韶与《数书九章》. 北京：北京师范大学出版社，1987. 327～337

[李继闵 1996a] 李继闵. 秦九韶关于上元积年推算的论述. 中国数学史论文集(四)，济南：山东教育出版社，1996. 22～36

[李继闵 1996b] 李继闵. 秦九韶“大衍总数术”造术之探讨. 中国数学史论文集(四)，济南：山东教育出版社，1996. 37～53

[李继闵 1996c] 李继闵. 秦九韶求定数算法“约‘奇’弗约‘偶’”辨析. 秦九韶与《数书九章》. 北京：北京师范大学出版社，1996. 54～67

[李培业 1985] 李培业. 杨辉算法中的简捷乘除法. 新珠潮，1985(2)：46～54

[李培业 1987] 李培业. 秦九韶测望造术思想之探讨. 秦九韶与《数书九章》，1987：354～372

[李文铭 1988] 李文铭. 相似三角形理论在“数书九章”中的应用. 陕西师大学报(自然科学版)，1988(1)：84～87

[李文林 1979] 李文林. 论汉历上元积年的计算. 科技史文集第3辑，1979，70～75

[李信明 1998] 李信明. 中国数学五千年. 台北：台湾书店，1998

[李俨 1925] 李俨. 大衍求一术之过去与未来. 学艺，1925，7(2)：1～45；中算史论丛第一集

[李俨 1926] 李俨. 重差术源流及新证. 学艺，1926，7

(8)：1～15

[李俨 1927] 李俨．中算家之纵横图研究．学艺，1927，8(9)：1～40；中算史论丛第一集

[李俨 1929a] 李俨．中算家之级数论．科学，1929，13(9)：1139～1172；1929，13(10)：1349～1401；中算史论丛第一集

[李俨 1929b] 李俨．中算家之 Pascal 三角形研究．学艺，1929，9(9)：1～15；中算史论丛第一集

[李俨 1930a] 李俨．宋杨辉算书考．图书馆学集刊，1930，4(1)：1～21；中算史论丛第二集

[李俨 1930b] 李俨．中算家之方程论．科学，1930，15(1)：7～44；中算史论丛第一集

[李俨 1931] 李俨．中国数学大纲上纲．上海：商务印书馆，1931

[李俨 1933] 李俨．唐宋元明数学教育制度．科学，1933，17(10)：1545～1565；中算史论丛第四集，238～280

[李兆华 1987] 李兆华．秦九韶方变锐阵题解法改正，秦九韶与《数书九章》，1987：428～432

[李兆华 1988] 李兆华．秦九韶求定数探讨，陕西师大学报(自然科学版)，1988(3)：78～83

[李兆华 1993] 李兆华．正负开方术札记二则．数学史研究文集第四辑，1993：50～54

[李兆华 1995] 李兆华．中国数学史，台北：文津出版社，1995

[罗见今 1987] 罗见今．《数书九章》与《周易》，秦九韶与《数书九章》，1987：89～102

[罗见今 1996] 罗见今．高次方程数值解的秦九韶程序，中国数学史论文集(四)，济南：山东教育出版社，1996：73～80

[鲁又文 1986] 鲁又文.《数书九章》中的几何问题，数学通报，1986 (6)：40～43

[马若安(J. C. Martzloff)1988] 马若安(J. C. Martzloff). Histoire Des Mathematiques Chinoises, Masson.

[茅以升 1987] 茅以升. 中国古桥技术史，北京：北京出版社，1987

[L. Matthiessen 1874] L. Matthiessen. Zur Algebra der Chinais. Auszugaus einem Brief an M. Cantor. Zeitschrift für Mathematika und Physik. 1874，19：270～271

[梅荣照 1966] 梅荣照. 唐中期到元末的实用算术，宋元数学史论文集，北京：科学出版社，1966. 10～35

[梅荣照 1987] 梅荣照. 秦九韶是如何得出求定数方法的，自然科学史研究，1987，6(4)：293～298

[梅荣照 1988] 梅荣照. 宋元数学的盛衰. 自然科学史研究，1988，7(3)：205～213

[梅荣照 1989] 梅荣照. 贾宪的增乘开方法—高次方程数值解法的关键一步. 自然科学史研究，1989，8(1)：1～8

[梅荣照 1990] 梅荣照. 宋元数学中新的思想、方法和理论. 自然科学史研究，1990，9(1)：28～37

[莫绍揆 1987] 莫绍揆. 秦九韶大衍求一术的新研究. 秦九韶与《数书九章》，1987：180～202

[莫绍揆 1989] 莫绍揆. 关于秦九韶生平及其成就. 自然杂志，1989，12(1)：57～63

[莫绍揆 1993] 莫绍揆. 论秦九韶大衍总数术. 数学史研究文集第四辑，1993：29～35

[《梦溪笔谈》译注组 1978] 《梦溪笔谈》译注组.《梦溪笔谈》译注. 合肥：安徽科技出版社，1978

[钱宝琮 1921] 钱宝琮. 求一术源流考. 学艺，1921，3

(4)：1～16；古算考源

[钱宝琮 1959a]　钱宝琮．增乘开方法的历史发展，科学史集刊．1959，2：126～143；宋元数学史论文集，北京：科学出版社，36～59

[钱宝琮 1959b]　钱宝琮．沈括，科学报，1959－09－15

[钱宝琮 1964]　钱宝琮．中国数学史，北京：科学出版社，1964

[钱宝琮 1966a]　钱宝琮．秦九韶《数书九章》研究．宋元数学史论文集，北京：科学出版社，1966：60～103

[钱宝琮 1966b]　钱宝琮．宋元时期数学与道学的关系．宋元数学史论文集，北京：科学出版社，1966：225～240

[钱宝琮 1966c]　钱宝琮．《梦溪笔谈》"棋局都数"条校释．宋元数学史论文集，北京：科学出版社，1966：266～269

[钱克仁 1990]　钱克仁．秦九韶大衍求一术中的求定数问题．第三届国际中国科学史讨论会论文集，1990：52～56

[清水 1962]　清水．宋代的沈括．青海日报，1962－09－25

[曲安京 1991]　曲安京．《数书九章》行程相及题意辨析．数学史研究文集第二辑，1991：71～73

[А. П. Юшкевич 1961. История Математики в средние века]
А. П. Юшкевич 1961. История Математики в средние века.

[Y. Mikami(三上义夫)1913]　Y. Mikami(三上义夫). The Development of Mathematics in China and Japan, Leipzig.

[尚智丛 1993]　尚智丛．秦九韶大衍术之"正用"求法．数学史研究文集第五辑，1993：32～37

[沙娜 1993]　沙娜．杨辉《详解九章算法纂类》研究．中数史研究文件第5卷．内蒙：内蒙大学出版社，1993：38～41

[沈康身 1978]　沈康身．弩机功能试释．杭州大学学报(自然)，1978(4)

[沈康身 1986a] 沈康身. 中算导论，上海：上海教育出版社，1986

[沈康身 1986b] 沈康身.《数书九章》中的数论命题. 杭州大学学报(自然科学版)，1986(4)：421～434

[沈康身 1986c] 沈康身. 秦九韶の大衍总数術と関孝和の诸约術，数学史研究(通卷 109)，1986：1～23

[Shen Kangshen (沈康身)1986d] Shen Kangshen (沈康身). Kuttaka and Qiuyishu, Indian Journl of History of Science, 19 (4)：397～405

[沈康身 1987a] 沈康身. 宜稼堂本《数书九章》正误. 秦九韶与《数书九章》. 北京：北京师范大学出版社，1987：59～72

[沈康身 1987b] 沈康身. 库塔卡与大衍求一术，同上，1987：253～268

[沈康身 1987c] 沈康身.《丽罗娃祇》与《数书九章》. 同上，1987：269～284

[沈康身 1987d] 沈康身. 秦九韶大衍总数术与关孝和诸约之术. 同上，1987：285～298

[沈康身 1987e] 沈康身.《数书九章》中的天文问题. 同上，1987：314～326

[沈康身 1987f] 沈康身. 秦九韶与土木建筑学. 同上，1987：373～397

[沈康身 1987g] 沈康身. 增乘开方法源流. 同上，1987：398～427

[沈康身 1987h] 沈康身.《数书九章》第九章互易三题释. 同上，1987：433～440

[沈康身 1987i] 沈康身.《数书九章》均货推本题分析. 同上，1987：441～450

[沈康身 1987j] 沈康身. 关孝和、李善蘭と自然数累乘の

和に砲する公式. 数学史研究(通卷115), 1987: 21～36

[沈康身1988a] 沈康身. 中国剩余定理的历史发展. 杭州大学学报(自然科学版), 1988, 15(3): 270～282

[沈康身1988b] 沈康身. Mutual－Sultraction Algorithm and Its Applications in Ancient China, Historia Mathematica. 18, 1988:135～147

[沈康身1988c] 沈康身. 东洋诸国の三角形の面积公式しつひての探索. 数学史研究(通卷119),1988:20～27

[沈康身1988d] 沈康身. Historical Development of the Chinese Remainder Theorem, Archive for History of Exact Sciences, 1988, 38(4): 285～305

[沈康身1989] 沈康身. 秦九韶对数学的杰出贡献. 自然杂志, 1989, 12(1): 52～56

[沈康身1992] 沈康身. 秦九韶大衍术与高斯《算术探讨》. 数学研究与评论, 1992, 12(2): 307～312

[沈康身1995] 沈康身. 秦九韶传. 世界数学家思想方法. 济南: 山东教育出版社, 1995: 243～261.

[邵启昌1988] 邵启昌. 秦九韶籍贯考. 西南师范大学学报(自然科学版), 1988(4): 126～128

[孙宏安1995] 孙宏安. 杨辉与数学教育. 数学通报. 1995(12): 38～39

[孙康1995] 孙康. 中国的"大衍求一术"与古代印度不定分析理论比较研究. 辽宁师大学报(自然科学版), 1995, 18(1): 21～26

[特古斯1990] 特古斯. 刘益及其佚著《议古根源》. 数学史研究文集第一辑, 1990: 56～63

[佟健华1997] 佟健华. 宋元数学人才群体之探索. 自然科学史研究, 1997, 16(3): 197～206

[王锦光 1956] 王锦光. 中国古代伟大科学家—沈括. 科学画报，1956(5)：212～213

[王桂芹 1993] 王桂芹.《习算纲目》与杨辉的数学教育思想. 数学史研究文集第四辑，1993：114～116

[王荣彬 1990] 王荣彬. 丁易东对纵横图的研究. 数学史研究文集第一辑，1990：74～82

[Wang Rong bin (王荣彬)1997] Wang Rong bin (王荣彬). On Liu Yi's Positive - Negative Root Extraction Algorithm, Wuhan University Journal of Natural Science, 1997, 2(1)：1～8

[王荣彬 1998a] 王荣彬. 关于正负开方术发展历史的讨论. (新竹)清华学报，1998，新 28(1)：1～18

[王荣彬 1998b] 王荣彬. 关于大衍术源流的算例分析. 自然科学史研究，1998(1)

[王荣彬 1999] 王荣彬. 对刘益正负开方术的新研究. 自然科学史研究，1999，18(1)：28～35

[王守义 1957] 王守义. 圆束绝不是六角束. 数学通报. 1957(5)：8～9

[王守义 1992] 王守义. 数书九章新释，合肥：安徽科学技术出版社，1992

[王宪昌 1997] 王宪昌. 宋元数学与珠算的比较评价. 自然科学史研究，1997，16(1)：21～27

[王渝生 1987] 王渝生. 秦九韶求“定数”方法的成就和缺陷. 自然科学史研究，1987，6(4)：299～307

[王翼勋 1987a] 王翼勋. 秦九韶、时曰醇、黄宗宪的求定数法. 同上，1987：308～313

[Wang Xixun(王翼勋)1987b] Wang Xixun(王翼勋). No Parallel lines but the Gougu and the Chongcha in Qin Jiushao's

Sarveying Problems，纪念秦九韶国际会议论文.

［王翼勋 1990a］　王翼勋. 从“大衍术”到“大衍求一术”. 苏州大学学报(自然科学版)，1990(1)：16～18

［王翼勋 1990b］　王翼勋. 清代学者对大衍术的探讨. 明清数学史论文集，南京：江苏教育出版社，1990：317～333

［王翼勋 1997］　王翼勋. 秦九韶演纪积年法初探. 自然科学史研究. 1997，16(1)：10～20

［吴文俊 1986］　吴文俊. 中国数学史的新研究. 自然杂志，1986

［吴文俊 1987a］　吴文俊. 秦九韶与《数书九章》. 北京：北京师范大学出版社，1987

［吴文俊 1987b］　吴文俊. 从《数书九章》看中国传统数学的构造性与机械化的特色. 秦九韶与《数书九章》，1987：73～88

［熊极生 1955］　熊极生. 杨辉五五图浅释. 数学通讯，1995，53：22～26

［解延年 1987］　解延年. 中国南宋大数学家秦九韶. 数学通报，1987(8)：44～46

［夏明德 1981］　夏明德. 秦九韶的三斜求积法. 上海教育，1981(4)

［许康 1987］　许康. 黄宗宪生平史料的发掘. 纪念秦九韶国际会议论文.

［许康，张杰恒 1998］　许康、张杰恒. 迄今所知世界最早的一例随机抽样. 数学史研究文集，1998 (6)：53～55

［许莼舫 1953］　许莼舫. 多才多艺的数学家—沈括. 科学大众，1953(11)：416～418

［许莼舫 1952］　许莼舫. 中国代数故事. 北京：中国青年出版社，1952

［许莼舫 1965］　许莼舫. 从“刍童”求积谈到“隙积”和四

角垛级数. 数学通报，1965 (2)：45～49

[徐志锐 1987] 徐志锐. 邵雍在数学上的伟大贡献. 社会科学战线，1987(2)：91～99

[徐义保 1990] 徐义保. 对《益古集》的复原与研究. 数学史研究文集，1990 (1)：64～73

[徐义保 1991] 徐义保. 中算家对方程正根个数的认识. 数学史研究文集，1991 (2)：66～70

[严敦杰 1943a] 严敦杰. 宋元算书与信用货币史料. 益世报·文史副刊，38. 1943－07－29.

[严敦杰 1943b] 严敦杰. 宋史历志之校算. 读书通讯，1943，72：6～9.

[严敦杰 1947] 严敦杰. 宋元算学丛考. 科学，1947，29 (4)：109～114

[严敦杰 1957] 严敦杰. 中学数学课程中的中算材料. 北京：人民教育出版社，1957

[严敦杰 1966a] 严敦杰. 宋杨辉算书考. 宋元数学史论文集，北京：科学出版社，1966：149～165

[严敦杰 1966b] 严敦杰. 宋金元历法中的数学知识. 同上，1966：210～224

[严敦杰 1986] 严敦杰. 宋元数学书录. 科学史与博物馆—荆三林教授执教五十年及七十寿辰(1985 年 4 月 26 日)纪念论文集，1986：1～50

[严敦杰 1987] 严敦杰. 秦九韶年谱初稿. 秦九韶与《数书九章》，1987：12～24

[杨齐 1987] 杨齐. 涪州石鱼石刻. 纪念秦九韶国际会议论文，1987

[燕霞 1955] 燕霞. 海伦—秦九韶公式. 数学通报，1955 (3)：4；初等数学史，北京：科学技术出版社，1959：102～103

[燕星 1955] 燕星. 杨辉弧矢公式质疑. 数学通报，1955：38～39

[姚家超 1957] 姚家超. 谈宋代大数学家秦九韶. 天津日报，1957－06－03

[殷长生 1981a] 殷长生. 围绕“清明上河图”的考察. 中华珠算，1981(3)：1～3

[殷长生 1981b] 殷长生. 考察“清明上河图”鉴定中国算盘产生的年代. 珠算，1981(3)：10～15

[殷长生 1981c] 殷长生. 从“清明上河图”看中国算盘. 中国科技史料，1981(4)：62～66

[中外数学简史编写组 1986] 中外数学简史编写组. 中国数学简史，济南：山东教育出版社，1986

[袁向东，李文林 1987] 袁向东，李文林.《数书九章》中的大衍术类问题及大衍总数术. 秦九韶与《数书九章》，1987：159～179

[余嘉锡 1946] 余嘉锡. 南宋算学家秦九韶事迹考. 大公报·文史周报 9 期(沪、津版)，1946－12－11

[查有梁 1987] 查有梁. 论秦九韶的“缀术推星”. 大自然探索，1987(4)：160～166

[张素亮 1986] 张素亮. 秦九韶和《数书九章》. 中学数学杂志，1986(4)：39～40

[张秀琴 1988] 张秀琴. 秦九韶评传. 山西大学学报(自然科学版)，1988(2)：16～20

[V. K. Zharol1986] V. K. Zharol. On two Problems from the tract Mathematics in Nine Books by Qin Jiushao. Istoriko Mathematishes Kie Issledovaniya，1986，30：338～342

[曾雄生 1996] 曾雄生.《数书九章》与农学. 自然科学史研究，1996，15(3)：207～218

[周瀚光 1983] 周瀚光. 宋明理学对古代数学发展的作用和影响. 论宋明理学，杭州：浙江人民出版社，1983

[周瀚光 1989] 周瀚光. 秦九韶道学思想. 传统思想与科学技术，上海：学林出版社，1989：111～122

[周瀚光，孔国平 1994] 周瀚光，孔国平. 刘徽评传(附秦九韶、杨辉评传)，南京：南京大学出版社，1994：169～272、

[中央民族学院艺术系 1971] 中央民族学院艺术系.《梦溪笔谈》音乐部分注释. 北京：北京人民音乐出版社，1971

[竺可桢 1926] 竺可桢. 北宋沈括对地学之贡献与记述. 科学，1926，11(6):792～807

人名索引

（健在的中国学者不录）

G

H

J

K

L